5ZF-04

数学教育における証明学習のための図示化を用いた学習支援ツール

青木　杏奈[*1]　渡部　孝幸[*2]　宮崎　佳典[*3]

静岡大学情報学部[*1]　静岡大学自然科学系教育部[*2]　静岡大学大学院情報学研究科[*3]

1. 導入

証明は，自然言語によって記述されることが多い．しかし，証明の構造は単純ではない．例えば，複数の前提から一つの結論が推論されたり，逆に，一つの前提から複数の結論が推論されたりすることがある．このため，自然言語から証明の論理構造を適切に解釈することは，学習者にとって容易ではない．そこで，先行研究では自然言語で書かれた証明を図示することで，証明の過程でどのような推論を行ったのか，論理の過程を明確にし，学習者の理解を補助する図の提案を行った．

本研究では，先行研究で提案された図式化の有用性の検証，ならびに同図作成ツールの提案を行う．

2. 証明の図式化

渡部ら[1]は，自然言語で書かれた証明を図式化するためのフレームワークを提案した．ここで提案する図は，自然演繹[2]にもとづいている．証明は，上から下へ命題の列として表現され，命題同士は直線で結ばれる．それぞれの命題は，上の命題がすべて真であれば，その下の命題は必ず真となる関係にある．この上側の命題を前提と呼び，下側の命題を結論と呼ぶ．それぞれの命題は，四角形で囲まれて表現される．

複数の前提から 1 つの結論を得るような推論も表現することができる．例えば，「A かつ B ならば C」という証明を図にしたものを図 1 に示す．また，「前提 A から結論 B が導かれた」という推論から，「A ならば B」という命題を導く場合がある．この入れ子構造を直感的に表現するために，「A1⇒A2⇒...⇒An」という推論全体を点線で囲み，その下に「A1 ならば An」という命題を置く．この例を，図 2 に示す．なお，この入れ子構造内の推論では，一番上の前提，ならびに一番下に置かれる結論は必ず 1 つであるとする．

証明には，命題や推論の解説に類する情報が含まれることがある．証明の過程を理解するうえで，解説は重要である．それらを表現するために，コメントを挿入する機能を用意している．コメントは吹き出しの形で表され，単一の推論（直線），または，単一の命題（四角形）に挿入することができる．推論に対するコメントの例を図 3 に，命題に対するコメントの例を図 4 に示す．

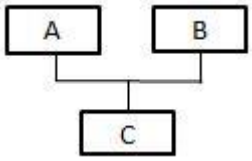

図 1：A かつ B ならば C

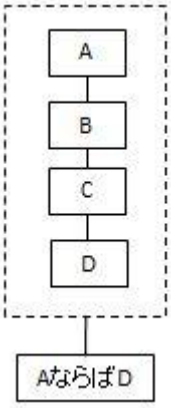

図 2：入れ子構造の例

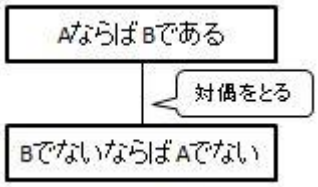

図 3：コメント例 1

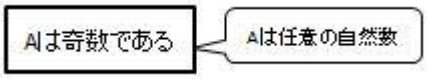

図 4：コメント例 2

これらの構成要素を用いて，「自然数a, b, cについて，$a^2 + b^2 = c^2$が成り立つとき，a, b, cのうち少なくとも 1 つは偶数である」という証明を図示した例を図 5 に示す．

3. 図の作成ツールの提案

実際にこの図を教育現場で用いる場合，教育者が簡単に図を提示することができるツールが必要になる．そこで，先行研究で提案された図示に特化した証明図の作成ツールの提案を行う．このツールは，命題やコメント，命題同士の関係を入力すると，自動的に図が生成されるものである．図 6 に，入力のフォーマットを示す．図 6 をもとに，図 5 が作成される．「ID」列は，それぞれの命題を一意に識別するものである．「命題」列に，命題の内容を記入する．「前提」列は，その命題がどの命題から推論されたのか，前提となる命題の ID を記入する．「コメント（命題）」列には，単一の命題に対するコメント，「コメント（推論）」列には単一の推論に対するコメントを記入する．また，入れ子の始

Application to Help Learn Mathematical Proofs Using Logical Diagrams

*1 Anna Aoki, Faculty of Informatics, Shizuoka University
*2 Takayuki Watabe, Graduate School of Science and Technology, Educational Division, Shizuoka University
*3 Yoshinori Miyazaki, Graduate School of Informatics, Shizuoka University

Copyright ©2015 Information Processing Society of Japan.
All Rights Reserved.

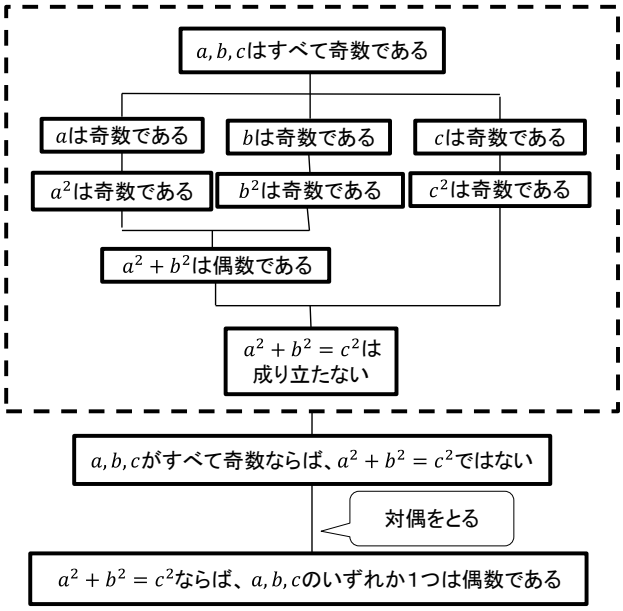

図 5：証明の図示例

めと終わりの命題の行の「nest」列に同一の識別子を記入することで，図 2 のような入れ子によった推論を記述することができる．入れ子の中身全体を前提とした命題を記述するときは，その結論となる命題の「前提」列に，入れ子の中身の一番下の命題の ID を記述する．

ID	命題	前提	コメント（命題）	コメント（推論）	nest
1	a, b, cはすべて奇数である				X
2	aは奇数である	1			
3	bは奇数である	1			
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
7	c^2は奇数である	4			
8	a^2+b^2は偶数である	5,6			
9	$a^2+b^2=c^2$は成り立たない	7,8			X
10	a, b, cがすべて奇数ならば、$a^2+b^2=c^2$ではない	9		対偶をとる	
11	$a^2+b^2=c^2$ならば、a, b, cのいずれか1つは偶数である	10			

図 6：図の作成ツールの入力フォーマット

4. 実験

前述したツールを作成するにあたって，始めに，先行研究で提案された図を用いることで，証明の論理の理解が促進されるのか調査した．対象者は，2014 年度某大学の微分積分学 I（一年次用），離散数学（二年次用）の講義を履修している学生それぞれ 61 名，33 名である．

それぞれの講義の履修学生を，自然言語で書かれた証明を提示されるグループと図示された証明を提示されるグループの 2 つに分け，その証明に対する問題を解かせた．小問の内容は，「命題 1 はどの命題から導かれるか」や，「命題 2 と命題 3 から導かれる命題はどれか」といった，証明の論理の流れを理解できているか調査することを目的としたものである．それぞれのグループの正答率から，証明の理解度を測る．

実験の結果，問題ごとに正答率をまとめると，図示した証明を提示した場合に，より高い正答率が得られている問題が多いことが分かった．例えば，『「a^2+b^2は偶数である」という命題は，どの命題から導かれるか』という問題では，自然言語で書かれた証明を提示されたグループの正答率は，0.261 であったのに対し，図示された証明を提示されたグループの正答率は，0.646 であった．これらの結果から，図示された証明を提示された学習者の方が，証明の理解度が高いことが推察される．

次に，作成したツールの評価実験を行う．実際に教育者に作成したツールを利用して証明の図を作ってもらい，ツールの評価を行う．また，ツールの操作性に関する聞き取り調査も行う．

2 つの実験結果については発表当日にスライドにて詳述する．

5. 結論

本稿では，証明学習の支援のための，自然演繹に基づく証明の図の構造と，その有用性を調べる実験，および，図を作成するためのツールについて述べた．今後の展望として，インターフェースの改良を検討している．現在，表にデータを入力することで図を作成しているが，四角形をクリックして命題を選択し，その命題の上下いずれかに命題を挿入するという方法で図を作成するといった，より直感的なインターフェースも検討している．作成したデータの保存や，データの読み込み機能の実装も不可欠である．また，初めて利用する人にも分かりやすいように，証明図のテンプレートを用意することを考えている．

将来的には，図から自然言語へと自動的に変換することで，可読性の高い証明の文章の作成を支援するといったことも検討している．

参考文献

[1] 渡部 孝幸, 宮崎 佳典, 林 佳樹, “導出規則に着目した証明視覚化・式変形支援システムの提案,” 京都大学数理解析研究所講究録 1865, pp.137-145, （2013）

[2] Prawitz, D., “Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study”, Almquist & Wiksell, （1965）

Copyright ©2015 Information Processing Society of Japan.
All Rights Reserved.