3Y-01

線形代数の可視化と教材開発

五藤智彦† 斎藤隆文‡

†東京農工大学 工学部情報工学科

‡東京農工大学大学院 生物システム応用科学府

１．背景と目的

数学は複雑な計算式を用いることや，文字式等を用いた定式化のため抽象的な学問であるといえる．そのため学生にとって理解しづらい印象を与えてしまい，学習する際に問題を解くための学習はできても各演算の本質の理解にまで及んでいないことが多い．

その中でも線形代数は情報工学，物理学，解析学などさまざまな分野において特に基礎となる学問であるため，理工系の学問を学ぶ際の必携の知識ともいえる．

そこで本研究では，まず線形代数の各演算の意味がわかるような可視化を行う．行列を縦ベクトルとして考え，各演算によってそのベクトルの向きや大きさがどのように操作されているのかわかりやすく表現する．それをアニメーション等を用いて表現し，各演算の本質的な理解を促進するような教材を開発する．

２．数学教育における可視化

金子らの研究[1]では，線形代数の教育の現状として図の利用が少なく，教育効果の高い図を作成する余地があるとしている．一方，山本らの研究[2]では微分方程式やフーリエ変換等について視覚情報を与えることで得られる効果を調査しており，視覚情報を与えることは深い理解に貢献しているとされ，有用性を述べている．したがって，線形代数でも有用な視覚情報を与えれば同様の効果が得られると期待できる．

３．線形代数の各種演算の可視化

可視化を行うにあたり最初に二次元に絞って考える．本章ではその可視化方針と具体例を述べる．

Visualization of linear algebra for education.
Tomohiko GOTO†.Takafumi SAITO‡
†Department of Computer and Information Sciences, Tokyo University of Agriculture and Technology.
‡Graduate School of Bio-Applications and Systems Engineering, Tokyo University of Agriculture and Technology.

3.1 可視化方針

図１のような 2×2 の正方行列があったとき，これは縦ベクトルでつくられる平行四辺形として描くことができる．すると，この行列は $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ で作られる正方形がそれぞれ $\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix},\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}$ の平行四辺形に移る変換を行うものだといえる．この考え方に基づいて各演算について操作対象がどのように変換されていくのか考え，可視化を行う．

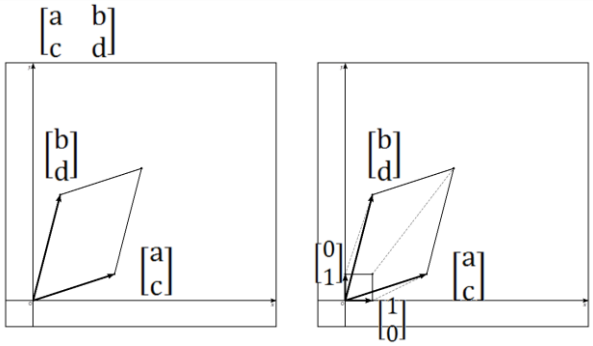


図１　行列の可視化方針

3.2　対象とする演算

本研究では以下の演算について可視化を行っている．

「線形変換，逆行列，ランク，行列式，クラメルの公式，掃き出し法，固有値・固有ベクトル，対角化，シュミットの正規直行化法」

紙面の関係上，本稿ではクラメルの公式について述べる．

3.3 クラメルの公式

クラメルの公式について以下の例を用いて説明する．

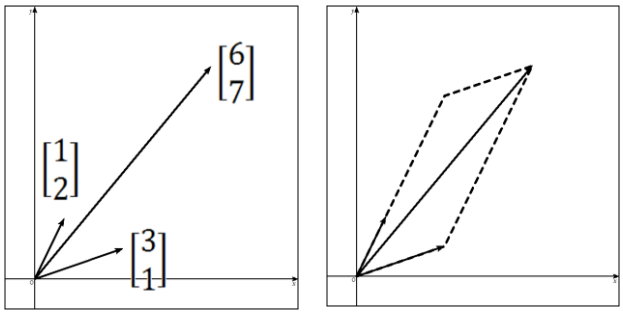
$$\begin{cases}3x+y=6\\x+2y=7\end{cases} \quad (1)$$

(1)式のような連立方程式が与えられたとき，行列を用いて(2)式のように書くことができる．

$$\begin{bmatrix}3&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\7\end{bmatrix} \quad (2)$$

Copyright ©2015 Information Processing Society of Japan.
All Rights Reserved.

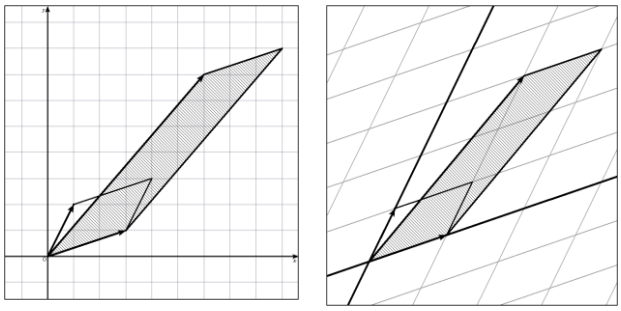
(2)式中のベクトルを図示すると図 2(a)のように表せられる．それぞれの縦ベクトルを使って考えるとこの式は$\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$を用いて$\begin{bmatrix}6\\7\end{bmatrix}$を作るためには各ベクトルを何倍すればよいかという意味と同義である．つまり各ベクトルを用いて図2(b)のような平行四辺形を作ればよい．



(a)各ベクトルの図示　(b)目標とする解

図 2　(2)式の図形的意味

次に$\begin{bmatrix}6\\7\end{bmatrix}$を作るために$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$を何倍する必要があるか考える．$\begin{bmatrix}3&6\\1&7\end{bmatrix}$と$\begin{bmatrix}3&1\\1&2\end{bmatrix}$で作られる平行四辺形を考えると共通の底辺をもつ図形だとわかる(図 3(a))．求める数はその図形の高さの比であるといえるので$\begin{bmatrix}3&1\\1&2\end{bmatrix}$を単位ベクトルとした変形格子を考えると格子三つ分の高さであることがわかる(図 3(b))．



(a)各行列の図示　(b)変形格子

図 3　y の解について

この高さの比というのは面積比とも言い換えられるので，行列式によってそれぞれの面積を求め比を計算すると(3)式のようになる．

$$y=\begin{vmatrix}3&6\\1&7\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}=3 \qquad (3)$$

同様に x について考えると(4)式を求められる．

$$x=\begin{vmatrix}6&1\\7&2\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}=1 \qquad (4)$$

4．インタフェース

3 章で述べた可視化を表示するインタフェースの作成における現在の進捗を述べる．最初にクラメルの公式について表示を行うインタフェースを作成した．まずコントロールウィンドウ(図4)で連立方程式の数値の入力ができる．入力に対して描画ウィンドウにベクトルが描画され，3 章のような説明をステップごとに表示する(図 5)．図 3(b)のような変形格子を描くときはアニメーションを用い，単位ベクトルの正方形が平行四辺形になる様子を見ることができる．

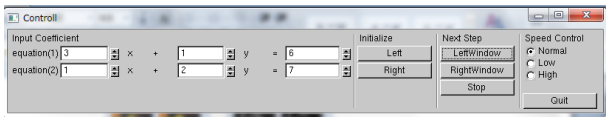


図 4 コントロールウィンドウ

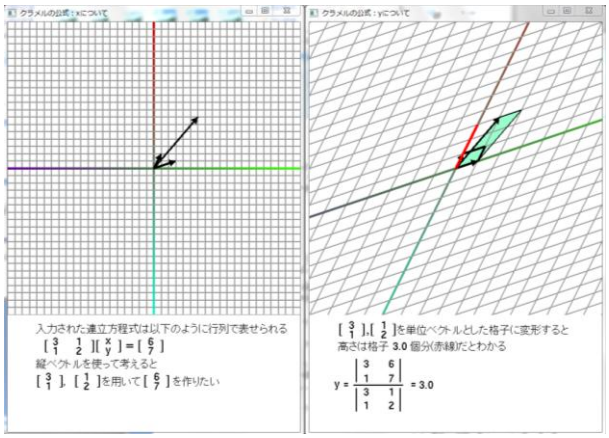


図 5　描画ウィンドウ

5．おわりに

本稿では線形代数の演算の可視化方針と具体例，また作成したインタフェースについて述べた．現在はいくつかの演算について可視化，インタフェース作成を行っているものの，二次元での操作に限っている．今後は他の演算について可視化を行うとともに，三次元での操作についても着手していく．

参考文献

[1] 金子 真隆，阿部 孝之，山下 哲，泉 源，深澤 謙次，北原 清志，高遠 節夫，″線形代数の教科書における挿図の利用について:KETpic利用の可能性を中心に″，数理解析研究所講究録，pp. 12-25，2010

[2] 山本 修一，″イメージ化がもたらす深い理解と数学の有用性:ソフトMathematicaを活用して″，数理解析研究所講究録，pp. 221-231，2012

Copyright ©2015 Information Processing Society of Japan.
All Rights Reserved.