

過完備ICAにおける自然勾配型アルゴリズムの提案 と画像認識への適用*

菅原光太郎†

東京工業大学‡

1. はじめに

独立成分分析（以下、ICA という）は、原信号の統計的独立性のみを前提に信号分離を行う技術であり、音響、画像、脳波等、広範な応用を持つ。

復元すべき信号数が観測信号数より大きい状況は過完備（Overcomplete）といわれ、一般のICAで用いることのできた高速な最適化アルゴリズムが、過完備状況下ではうまく機能しなくなるため、より困難な問題となる。

本研究では、MAP 推定に基づく Hyvärinen らの手法 [1] を発展させた自然勾配型アルゴリズムを提案し、過完備状況下において既存手法よりも高速に局所的最適解を得ることを実験的に示す。さらに、一般画像認識に対し本手法を適用させ、高い認識精度を実現することを見る。

2. 基本ICAモデル

観測数 k の信号をベクトル表記したものを $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)^T \in \mathbf{R}^k$ とする。ここで、観測信号 $\mathbf{x}$ が n 個の統計的に独立な未知の原信号 $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)^T \in \mathbf{R}^n$ の線型混合で得られていると仮定する。すなわち、ある行列 $A \in \mathbf{R}^{k \times n}$ によって

$$\mathbf{x} = A\mathbf{s} \quad (1)$$

と表現される。ICA は、観測信号 $\mathbf{x}$ と原信号の統計的独立性の仮定のみから、(1) を満たす原信号 $\mathbf{s}$ と混合行列 A を推定する。推定の際は、原信号の独立性を表す関数（尺度関数）を導入し、これを最大化する方針がとられる。ICA の最適化アルゴリズムは複数提案されており、例えば FastICA は準ニュートン法に基づく高速な最適化アルゴリズムとして知られている。

3. 過完備ICAとその困難さ

過完備（Overcomplete）とは、5 人の会話を 3 つのマイクで集音する時のように、観測信号数よりも原信号数が多い状況をいう。過完備状況下の ICA は原信号の推定が困難となることが知られている。具体的な困難さのひとつに、退化（Degenerating）と呼ばれるものがある。これは、同一の原信号を複数復元してしまう現象で、前節の FastICA など過完備 ICA に適用した場合、退化が容易に起こってしまう。

4. 先行研究

Hyvärinen らは、MAP 推定に基づく以下の定式化によって、退化現象を制御する過完備 ICA を提案した [1]。

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & \mathbf{E}[L(W, \mathbf{x})] + \lambda \sum_{i < j} \log(1 - (\mathbf{w}_i^T \mathbf{w}_j)^2) \\ \text{Subject to} \quad & \|\mathbf{w}_j\| = 1 \quad (\text{for } \forall j) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $W \in \mathbf{R}^{k \times n}$ は復元行列、 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^k$ は観測信号を表す確率ベクトル、 $\mathbf{E}[\cdot]$ は期待値を表す。また、 L は推定した原信号 $\mathbf{s} := W^T \mathbf{x}$ の独立性の尺度関数である。目的関数の第一項は原信号の独立性、第二項は W の列ベクトル同士の角度に関するペナルティ項であり、退化を防ぐ効果がある。

5. 提案するアルゴリズム

最適化問題 (2) は、勾配法による更新と、 W の列ベクトルをノルム 1 に正規化する処理を繰り返す。この過程において、変数行列は Stiefel 多様体 $V(k, n)$ をスカラー倍した空間

$$\sqrt{\frac{n}{k}} \cdot V(k, n) := \left\{ W \in \mathbf{R}^{k \times n} \mid WW^T = \frac{n}{k} I_k \right\} \quad (3)$$

に近似的に属していることが、実装した結果からわかった。この事実に着目し、Stiefel 多様体上の

*Overcomplete ICA with Natural Gradient Like Algorithm

†Kotaro Sugawara

‡Tokyo Institute of Technology

Algorithm Natural Gradient Like Method

```

1: Initialize  $W \in \mathbf{R}^{k \times n}$  ( $k < n$ )
2: while  $\|\text{grad}_N L(W)\|_c > \epsilon$  do
3:    $W \leftarrow W / \|W\|_2$ 
4:   while  $\|WW^T - I_k\|_F > \epsilon$  do
5:      $W \leftarrow \frac{3}{2}W - \frac{1}{2}WW^TW$ 
6:   end while
7:    $w_j \leftarrow w_j / \|w_j\|$  (for every  $j$ )
8:   Compute Natural Gradient  $\text{grad}_N L(W)$ 
9:   Obtain step size  $\eta > 0$  by line search
10:  Update  $W$ 
     $W \leftarrow \text{Geo}(\text{grad}_N L(W), \eta)$ 
11: end while

```

Riemann 計量 [2] に基づく自然勾配を利用したアルゴリズムを提案する。ただし、 $\|\cdot\|_F$ はフロベニウスノルム、 $\|\cdot\|_2$ は行列の最大特異値、 $\|\cdot\|_c$ は Riemann 計量に基づくノルムである。また、 $\text{Geo}(\text{grad}_N L(W), \eta)$ は、点 W における自然勾配 $\text{grad}_N L(W)$ 方向の測地線を表す。測地線による更新は、 W を条件 (3) の空間に留める性質があり、一般の勾配法よりも効率的に局所解を求めることが期待できる。提案アルゴリズムの詳細については当日報告する。

6. 数値実験

最適化問題 (2) を一般の勾配法で解いた場合と、提案手法で解いた場合についての比較を行った。観測信号数 256 に対し、4 倍過完備な 1024 の原信号を推定している。図 1 は反復数ごとの目的関数値の変化を表す。提案手法がより速く局所解に近づいており、約 40 反復で、ほぼ収束していることが観察できる。

7. 一般画像認識への適用

与えられた画像を、イヌ・車・ヒトなどの大まかなカテゴリに分類する技術は一般画像認識と呼ばれる。認識精度の向上には、画像の特性をうまく表現する特徴量抽出 (Feature Extraction) が重要であるが、この分野において、過完備 ICA は特徴量抽出のための無教師学習としての応用を持つ。

本研究では、Coates ら [3] と同様の実験条件に従い、画像認識用データセット STL-10¹ に対して

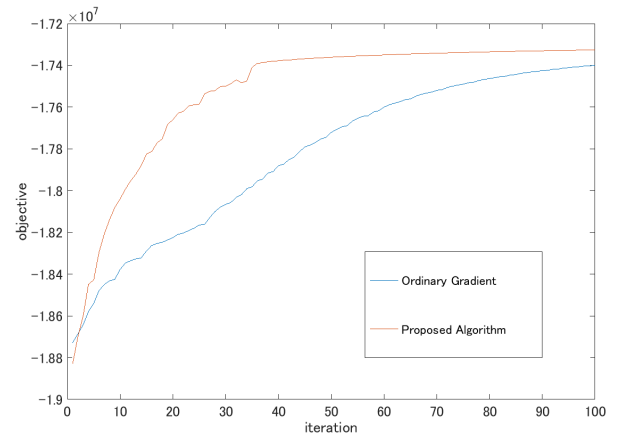


図 1: 反復数ごと目的関数値の比較

表 1: 手法ごとの認識精度

Method	Accuracy(%)
Sparse Coding	59.0
Sparse Filtering	53.5
RICA	52.9
K-means	51.5
Proposed method	55.1

提案手法を適用した。他の無教師学習の手法と認識精度の比較を行った結果を表 1 に示す。Sparse Coding には及ばないものの、無教師学習の有力な手法の中でも比較的優れた認識精度を実現していることがわかる。

参考文献

- [1] A. Hyvärinen and M. Inki, Estimating over-complete independent component bases for image windows, Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2002.
- [2] A. Edelman, T.A.Arias, and S.T.Smith, The geometry of algorithms with orthogonality constraints, SIAM J. Matrix Anal, 1998.
- [3] A. Coates, H. Lee, and A.Y. Ng, An analysis of single-layer networks in unsupervised feature learning, AISTAT, 2011

¹<http://cs.stanford.edu/~acoates/stl10>