

有限フレネル変換による関数近似

青柳智裕 大坪紘一 青柳宣生

東洋大学総合情報学部

1. はじめに

光学系における基本的な回折変換はレーリー回折であるが、実際には近似回折変換としてフレネル回折が用いられる。フレネル回折は積分の形で表され、これまで数学的にフレネル変換として定義され、その性質が研究されてきた[1]。また光学的な画像処理、データ処理や光アナログ演算などに応用されてきた。

私たちが扱う光学系は一般的に2次元的かつ円形開口であって、空間的な帯域制限を受ける。これまでの空間的な帯域制限の効果は、フーリエ変換に対するものであって、その標本化定理が導出され考察されてきた。ただし光学的なフーリエ変換はフレネル回折と凸レンズによって構成されるので実際にはフレネル変換による標本化定理が必要となる。そこで、本研究では円形開口の有限領域に帯域制限をすることによって極座標系におけるフレネル変換に対する標本化定理を導出する。

標本化定理を用いると、ヒルベルト空間上で定義された任意の関数 f は正規直交基底を用いて次のように表現することができる[4,7]。

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, s_n \rangle s_n. \quad (1)$$

ここで、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は内積、 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ は正規直交関数系を表す。計算機シミュレーションによって、フレネル変換による標本化関数系 $\{S_{\ell m}\}$ を用いて式(1)で表される関数を近似する問題に適用し、その有効性と限界を調べたので報告する。

2. フレネル変換と標本化定理

振幅透過率 $f(\omega, \varphi)$ を持つ平面物体に光が入射したとき、そこから距離 z だけ後方にある観測面での光の振幅分布を $g(r, \theta; z)$ とする。ただし、 ω, φ と r, θ はそれぞれ物体面とフレネル回折面での極座標の動径と角変数である。このとき $g(r, \theta; z)$ はフレネル近似のもとで次のように表し、フレネル変換として定義する。

$$g(r, \theta; z) = \frac{k \exp(ikz)}{i2\pi z} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(\omega, \varphi)$$

$$\times \exp \left[\frac{ik}{2z} \{r^2 + \omega^2 - 2r\omega \cos(\theta - \varphi)\} \right] \omega d\omega d\varphi \quad (2)$$

ここで、 k は光の波数である。またフレネル逆変換は(2)式で $f(\omega, \varphi)$ と $g(r, \theta)$ を入れ換えて k を $-k$ と置いたもので与えられる。

いま $g(r, \theta; z)$ は、 $r > R$ に対して常に零で、 $r \leq R$ に対してのみ零以外の値をとることができる。すると、 $g(\cdot)$ はフーリエ-ベッセル展開することができる。また $f(\cdot)$ は一価関数であるから φ について 2π を周期とする周期関数となり、フーリエ級数展開できる。このとき、フーリエ-ベッセルの展開係数とフーリエ級数展開の展開係数の関係から、ロメルの積分公式を使って次のような標本化定理を得ることができる。

標本化定理

フレネル回折面での光の振幅分布 $g(r, \theta; z)$ が半径 R の円形領域内のみで零以外の値をとるとすると、そのとき振幅透過率 $f(\omega, \varphi)$ の入力パターンは、その離散的な標本値列 $\{f_{\ell}(\nu_{\ell m} z / kR)\}$ が分かれば、標本化関数系 $\{S_{\ell m}(\omega, \varphi; z)\}$ を用いることによって、次のように級数の形で一意的に表現することができる。

$$f(\omega, \varphi) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_{\ell} \left(\frac{\nu_{\ell m} z}{kR} \right) S_{\ell m}(\omega, \varphi; z). \quad (3)$$

ただし、標本化関数系 $\{S_{\ell m}(\omega, \varphi; z)\}$ は次のように定義する。

$$S_{\ell m}(\omega, \varphi; z) = \frac{2\nu_{\ell m}}{J'_{\ell}(\nu_{\ell m})} \exp \left(\frac{iv_{\ell m}^2 z}{2kR^2} \right) \times \frac{J_{\ell} \left(\frac{k\omega R}{z} \right)}{\left(\frac{k\omega R}{z} \right)^2 - \nu_{\ell m}^2} \exp \left(-\frac{ik\omega^2}{2z} + i\ell\varphi \right) \begin{pmatrix} \ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ m = 1, 2, 3, \dots \end{pmatrix}, \quad (4)$$

ここで、 $\nu_{\ell m}$ は ℓ 次のベッセル関数 $J_{\ell}(r)$ の $r > 0$ における小さい方から m 番目の零点である。

展開係数 $f_{\ell}(\cdot)$ は、標本化関数系の直交関係を用いると、その内積によって次のように与えられる。

Functional approximation for finite Fresnel transform
Tomohiro Aoyagi, Kouichi Ohtsubo, Nobuo Aoyagi
Faculty of Information Sciences and Arts, Toyo University

$$f_\ell \left(\frac{v_{\ell m} z}{kR} \right) = \frac{\{kR J'_\ell(v_{\ell m})\}^2}{4\pi z^2} \times \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r, \theta; z) S_{\ell m}^*(r, \theta; z) r dr d\theta. \quad (5)$$

ここで、*は複素共役を表す。

3. 計算機シミュレーション

フレネル変換による標本化定理を使って関数を近似する問題を考える。入力 $f(\omega, \varphi) = A$, $\omega < W$ を満たす定数関数を使ってその有効性と限界を計算機シミュレーションによって調べる。今回軸対称性を考慮して $\ell = 0$ という条件で行う。まず、式(5)を使って展開係数を求めるが、入力が円形領域内で半径 W 以下でのみ値をもつので積分範囲が確定する。積分はシンプソンの公式を使って数値積分を行った[3,5]。展開係数を求めることができれば、式(3)のように標本化関数系を使って級数の形で元の関数を近似することができる。

振幅による誤差は次の式で定義する。

$$\text{error} = \frac{\|f_m - f\|_2}{\|f\|_2} \quad (6)$$

ここで、 $\|\cdot\|_2$ は ℓ^2 -ノルム、 f は元の関数、 f_m は 1 から m までの有限項の和で打ち切ったときの近似関数を表す。

Fig. 1 は標本点の値を増やしていったときの近似関数の振幅を表示したものである。 m の値を増やしていくことで元の関数に振幅が近づいていくことがわかる。Fig. 2 は標本点の値を増やしていったときの近似関数の位相を表示したものである。Fig. 3 は m の値を変化させたときの元の関数と近似関数との誤差を表示したものである。 R はフレネル変換面での零以外の値を持つ円形領域の半径を表す。標本点の数を増やしていくことで、もとの関数に近づいていくことがわかる。

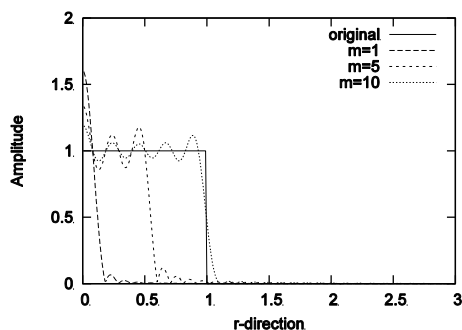


Fig. 1 Plots of original function and approximate functions. m is sampling points.

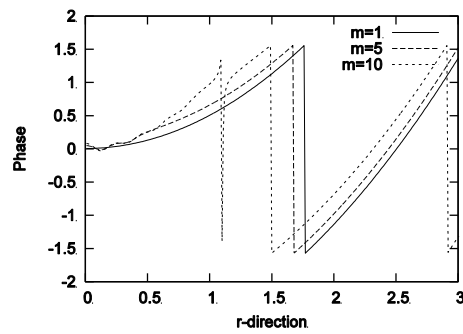


Fig. 2 Plots of the phase versus r-direction. m is the number of sampling points.

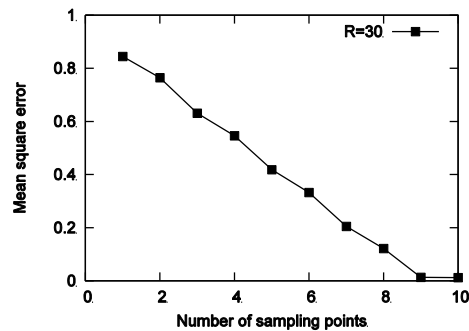


Fig. 3 Plots of the normalized mean square error versus the number of sampling points. R is the circle radius for Fresnel transform region.

4. まとめと今後の課題

円形領域内に帯域制限することによって、極座標系におけるフレネル変換による標本化定理を導出した。その標本化定理の有効性と限界を調べるために関数近似問題に適用して計算機シミュレーションを行った。標本化関数系の最適なパラメータを求める必要がある。

参考文献

- [1]N. Aoyagi: Doctoral dissertation, Tokyo Institute of Technology, Tokyo(1973).
- [2]T. Aoyagi, K. Ohtsubo and N. Aoyagi, "Error Analysis for Optical Fresnel Transform Systems", 9th Int. Conf. Optics-Photonics Design & Fabrication(2014).
- [3]W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery: Numerical Recipes in C (Cambridge University Press, 1988)
- [4]H. Ogawa, "What Can We See behind Sampling Theorems?", IEICE Trans. Fundamentals Vol.E92-A(2009)688.
- [5]泉信一, 近藤基吉, 穂刈四三二, 永倉俊充, "数学公式", 共立出版(1953).
- [6]青柳宣生, 小宮山悟, "有限開口瞳函数を有する光学系の解析", 昭和 52 年度東洋大学工学部研究報告(1977)117.
- [7]小川英光, "関数解析", 森北出版(2010).