

整数行列の正則性を簡約行列を用いて明確に判定する方法

出口洋三（無所属），豊泉正男（東洋大学）

概要

任意に与えられた行列の行列式の値が零か否か，すなわち行列の正則性の問題は線形計算において恒に基本的である．ここでは整数行列（整数を成分とする行列）に絞って，その正則性を，高い次数の行列に対しても適用可能なように，また実用的な計算時間内で判定可能となるような方法として示す．この方法を根底から支えている理論は，(1) 行列式の定義から導かれる基本的性質のいくつか．(2) 偶数と奇数の加法がもつ簡単な性質．(3) ガウスの消去法の前進過程に似たアルゴリズム等を用いた．

定義1 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ が

$$a_{ij} = \begin{cases} \text{奇数} & (i = j) \\ \text{偶数} & (i > j) \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

を満たすとき， A を n 次の奇行列という．

注意 奇行列は正則行列である．

基本変形 $A \in M_n(\mathbb{Z})$ に対して，次の基本変形のみを行う．

- (I) 行列 A の2つの行（列）を入れ換える．
- (II) 行列 A のある行を他の行に加える．
- (III) ある行（列）の成分が全て偶数のとき，
 - (i) その行（列）の成分が全て0ならば，そのままにしておく．
 - (ii) その行（列）の成分が全て0でないならば，その行（列）を2（必要ならば2のべき）で割って，その行（列）の少なくとも一つの成分が奇数であるようにする．

定義2 $A \in M_n(\mathbb{Z})$, $A = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$,

C_{11} は r 次の奇行列 ($1 \leq r \leq n$) ,

$C_{12} \in M_{r, n-r}(\mathbb{Z})$, $C_{21} \in M_{n-r, r}(\mathbb{Z})$,

$C_{22} \in M_{n-r, n-r}(\mathbb{Z})$

のとき， A を r 才の奇行列という．

補題 $A \in M_n(\mathbb{Z})$ を r 才 ($1 \leq r < n$) の奇行列とする．このとき，次が成り立つ．

(1) 第 $(r+1)$ 行に有限回の基本変形を施せば， A の第 $(r+1)$ 行は次のどれかに移る．

Type 1. すべての成分は0である．（このとき， A は正則行列ではない）

Type2. $(r+1, j)$ 成分 ($j = 1, \dots, r$) はすべて偶数で $(r+1, r+1)$ 成分は奇数である．（このとき， A は $(r+1)$ 才の奇行列となる）

Type3. すべての成分は偶数で，少なくとも1つは0ではない．

(2) A の第 $(r+1)$ 行は Type3 とする． A の第 $(r+1)$ 行に有限回の基本変形を施せば， A の第 $(r+1)$ 行は，上記の Type 1, Type 2, Type3 のどれかに移る．

定理1 $A \in M_n(\mathbb{Z})$ について，次は同値．

- (1) A は正則行列である．
- (2) A は有限回の基本変形で n 次の奇行列に移る．

定理2 $A \in M_n(\mathbb{Z})$ は r 才 ($1 \leq r < n$) の奇行列で第 $(r+1)$ 行は Type3 の行列とする． A の第 $(r+1)$ 行に基本変形（基本変形 (II) については第1行から第 r 行のみを用いる）を施して，第 $(r+1)$

行が Type 1 または Type2 に移らず, Type3 の形を繰り返すとする. 基本変形 (III) の (ii) を m 回行って得られる行列を $A(m)$ とすれば,

$$\det A = 2^{\ell_m} \det A(m)$$

となる正の整数 $\ell_m (\geq m)$ が存在する. ある定数 $M > 0$ に対して, $|a_{ij}| \leq M (i, j = 1, 2, \dots, n)$ で $\ell_m \geq [(\frac{1}{2} \log n + \log M)n] + 1$ ならば, A の第 $(r+1)$ 行ベクトルは, 第 1 行ベクトル, $\dots$ 第 r 行ベクトルの 1 次結合で表される. すなわち, A は正則行列ではない.

アルゴリズムの説明

整数行列の正則性の判定を行うアルゴリズムの核心部分について, 以下簡単に説明する. 任意に与えられた n 次の整数行列を A とする. A の各成分の偶奇性に依じてそれぞれが偶数のときに 0, 奇数のときに 1 を対応させて作られる行列のことを $\text{mod } 2$ による簡約行列といい, $A(\text{mod } 2)$ で表すことにする. 先に述べた「 A は r 才である」ということと, 「 $A(\text{mod } 2)$ の 1 から r までの各行各列をとってできる $A(\text{mod } 2)$ の小行列を考えて, その対角成分がすべて 1, かつ下三角部分の成分がすべて 0 である (上三角部分は何でもよい)」ということは同値である. A が正則であるかどうかの判定を, A に対応する簡約行列 $A(\text{mod } 2)$ の上で考えてゆく. ある段階で r 才である行列 A を $(r+1)$ 才とすることが可能かどうかを調べるには, 行列式の値を変えない基本変形を用いながら, $(r+1)$ 行ベクトルの, 1 から r までの成分をすべて偶数とすること, その状態を保ちながら $(r+1)$ 番目の成分に奇数のものを取り出せるかどうかを確かめればよい. この際に, 行列の各行 (各列) の成分に共通の約数があるときには, その約数を取り出すなどの操作を同時に行ってゆく. $A(\text{mod } 2)$ の上ではすべての要素が 0 であるかを調べ, そうであれば約数 2 が取り出せることになる. 簡約行列 $A(\text{mod } 2)$ 上の一つの変形の結果等は, 即時に同じ変形として A 上に反映される. A と $A(\text{mod } 2)$ は操作上の最新情報を同時進行で保持

することになる. このアルゴリズムの終了条件は, 以下のようなになる.

- (1) Type1 に陥ったとき, 行列 A の行列式の値は 0.
- (2) Type3 に陥り, 限りなく約数 2 が取り出せるとき, これは定理 2 の不等式より有限回で止まる. このとき, 行列 A の行列式の値は 0 である.
- (3) A の行列式の 2 の約数部分がすべて取り出され, n 才まで順調に進んで奇行列の部分が残る. このとき, A は正則行列である.