8

1D-7 代用電荷法による円弧スリット円環領域への数値等角写像の方法

Numerical Conformal Mapping onto a Circular Annulus with Concentric Circular Slits by the Charge Simulation Method

牧　直正　岡野　大[1]　緒方　秀教[1]　天野　要[1]
N. Maki　D. Okano　H. Ogata　K. Amano
(愛媛大学大学院理工学研究科　愛媛大学工学部情報工学科[1])

1　はじめに

等角写像は関数論の基本的な問題の一つであり，特に多重連結領域の等角写像は，流体力学，電磁場解析などへの応用上も重要である．天野ら[1],[2]はポテンシャル問題の高速解法として知られる代用電荷法を適用して，このような多重連結領域への等角写像を数値的に求める方法 (数値等角写像の方法) を提案した．これまでに，与えられた多重連結領域から円弧スリット領域，放射スリット領域，平行スリット領域，円弧スリット単位円板領域への数値等角写像の方法が提案されている．本発表では，有界な多重連結領域から円弧スリット円環領域への数値等角写像の方法を提案し，数値実験的にその有効性を検証する．

2　円弧スリットを伴う円環領域への等角写像

ここでは，有界な n 重連結領域 D から円弧スリット円環領域への等角写像 $w = f(z)$ を考える．ただし，領域 D は閉曲線 C_1 を外側の境界に，閉曲線 $C_2, \ldots, C_n$ を内側の境界にもつとする．円弧スリット円環領域は単位円 $S_1 : |w| = 1$ を外側の境界に，円 $S_2 : |w| = r_2 (r_2 < 1)$ を内側の境界にもち，円弧スリット $S_l : |w| = r_l (r_2 < r_l < 1, l = 3, \ldots, n)$ を伴うとする．等角写像による境界の対応は，C_1 が単位円 S_1 へ，C_2 が円 S_2 へ，$C_l (l = 3, \ldots, n)$ が円弧スリット S_l へ写るものとする．等角写像 $w = f(z)$ は，$\overline{D}$ に正規化点と呼ばれる任意の点 z_0 をとり，正規化条件 $f(z_0) = r_0 (0 < r_0 \leq 1)$ を課せば，一意的に定まる．

閉曲線 C_2 の内側に原点があるとしても，一般性は失われない．このとき，写像関数は

$$f(z) = z \exp(g(z) + \mathrm{i}h(z)) \tag{1}$$

と表現できる．ここに，$g(z), h(z)$ は D で共役な調和関数である．境界の対応と正規化条件は $g(z), h(z)$ を用いてそれぞれ

$$g(z) + \log|z| = \log r_l \quad (z \in C_l; l = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

$$g(z_0) + \mathrm{i}h(z_0) = \log r_0 - \log z_0 \tag{3}$$

と表される．ただし，$r_1 = 1$ とする．逆に，(2), (3) 式が成立すれば，(1) 式で定義される $f(z)$ が題意をみたす写像関数となる．解の存在と一意性より，等角写像の問題は (2), (3) をみたす共役調和関数 $g(z), h(z)$ を $r_1 (= 1), r_2, \ldots, r_n$ (及び r_0) の値とともに求める問題に帰着する．

3　代用電荷法による数値等角写像の方法

共役な調和関数の対 $g(z)$, $h(z)$ に対して代用電荷法を適用し，写像関数 $f(z)$ を

$$F(z) = z \exp(G(z) + \mathrm{i}H(z)), \tag{4}$$

$$G(z) + \mathrm{i}H(z) = Q_0 + \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log(z - \zeta_{li}) \tag{5}$$

と近似する．ただし，対数関数 log は主値を用いることにする．ここに，Q_0 は複素数の未定係数，Q_{li} は電荷と呼ばれる実数の未定係数である．ζ_{li} は電荷点と呼ばれる点であり，点 ζ_{1i} は C_1 の外側に，$\zeta_{2i}, \ldots, \zeta_{ni}$ は $C_2, \ldots, C_n$ の内側に配置する．電荷 Q_{li} は制約条件と 1 価性の条件

$$\sum_{i=1}^{N_1} Q_{1i} = -1, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} = 0 \quad (l = 2, \ldots, n) \tag{7}$$

を満たす．

境界条件 $|\dot{f}(z)| = r_l (z \in C_l, l = 1,\ldots,n)$ に対応して，$F(z)$ は拘束点 $z_{mj} \in C_l (j = 1,\ldots,N_m; m = 1,\ldots,n)$ で拘束条件 $|F(z_{mj})| = R_m (j = 1,\ldots,N_m; m = 1,\ldots,n)$，すなわち，

$$G(z_{mj}) - \log R_m = -\log|z_{mj}| \qquad (8)$$

$$(\ j = 1,\ldots,N_m;\ m = 1,\ldots,n\ )$$

を満たすとする．ここで $R_1(=1), R_2, \ldots, R_n$ はそれぞれスリットの半径 $r_1(=1), r_2, \ldots, r_n$ の近似解である．(6)，(7)，(8) は Q_{li}，R_m に関する連立 1 次方程式となる．これらから未知数 Q_{li}，R_m を求めれば，数値等角写像 $w = F(z)$ を得る．実際の計算では，領域 D 内に対数関数の不連続線が現われないように，(5) 式を

$$\begin{aligned} & G(z) + \mathrm{i}H(z) \\ = \ & \sum_{i=1}^{N_1} Q_{1i} \left\{ \log\left(1 - \frac{z}{\zeta_{1i}}\right) - \log\left(1 - \frac{z_0}{\zeta_{1i}}\right) \right\} \\ & + \sum_{i=1}^{N_2} Q_{2i} \left\{ \log\left(1 - \frac{\zeta_{2i}}{z}\right) - \log\left(1 - \frac{\zeta_{2i}}{z_0}\right) \right\} \\ & + \sum_{l=3}^{n} \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \left\{ \log\left(\frac{z - \zeta_{li}}{z - \zeta_{l0}}\right) - \log\left(\frac{z_0 - \zeta_{li}}{z_0 - \zeta_{l0}}\right) \right\} \\ & + \log R_0 - \log z_0 \end{aligned} \qquad (9)$$

と変形する．ただし，ここでは C_1 が原点に対し，$C_l\ (l = 2,\cdots,n)$ がその内部の 1 点 ζ_{l0} に対し，それぞれ星形であるとしている．また，$z_0 = z_{11} \in C_1$，したがって $R_0 = 1$ とする．

4 数値実験

上記の方法を，

$$\begin{aligned} C_1 &: \frac{x^2}{2^2} + y^2 = 1, \\ C_2 &: |z| = 0.5, \\ C_3 &: |z - 1.2| = 0.3 \end{aligned}$$

を境界とする 3 重連結領域 D に適用した．誤差は，各境界 C_m に対し，

$$E_m = \max_j \left| |F(z_{mj+1/2})| - R_m \right|$$

により評価する．ここで，$z_{mj+1/2}$ は境界上の拘束点 z_{mj}，z_{mj+1} の中間点で，R_m は計算によって得られたスリットの半径である．解析関数の最大値の原理より，近似写像関数の誤差の絶対値は境界上で最大値をとることから，E_m がおおよその誤差の評価を与えると期待される．

数値等角写像の様子を図 1 に，誤差評価 E_m の値を表 1 に示す．電荷点数は $N = N_1 = N_2 = N_3 = 32$ である．Reichel[3] は同じ問題に積分方程式法を適用して誤差 E_R を得ている．ただし，Reichel は S_1 の半径を 1.5 としているので，公平な比較には E_m を 1.5 倍すべきである．代用電荷法の結果は，Reichel の結果より 2 ～ 3 桁精度が高い．

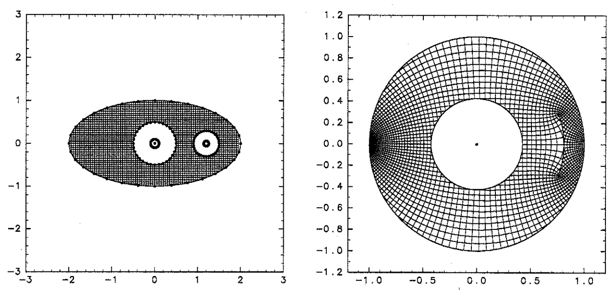

図 1: Reichel の問題に対する数値等角写像．

表 1: Reichel の方法との比較

C_n	E_R	E_m
C_1	1.1×10^{-3}	3.5×10^{-5}
C_2	1.6×10^{-5}	3.3×10^{-8}
C_3	7.8×10^{-7}	4.1×10^{-9}

参考文献

[1] 天野 要，岡野 大，緒方 秀教，猪狩 勝寿，津田 光一，杉原 正顕：非有界な多重連結領域の数値等角写像と 2 次元ポテンシャル流解析，愛媛大学工学部紀要，Vol.19, pp.387–399 (2000).

[2] 天野 要，岡野 大，緒方 秀教：代用電荷法による円弧スリット単位円板領域への数値等角写像の方法，情報処理学会論文誌，Vol.41, No.4, pp.998–1007 (2000).

[3] Reichel, L. : A Fast Method for Solving Certain Integral Equations of the First Kind with Application to Conformal Mapping, J. Comput. Appl. Math., Vol.14, No.1-2, pp.125–142 (1986).