

Approximation of the Derivative of Numerical Conformal Mapping by a Continuous Scheme

片山 茂 岡野 大¹ 緒方 秀教¹ 天野 要¹

S. Katayama D. Okano H. Ogata K. Amano

(愛媛大学大学院理工学研究科 愛媛大学工学部情報工学科¹)

1. はじめに

等角写像は関数論の基本的な問題の一つであり、応用も広い。しかし、その写像関数を初等関数で記述できる場合は限られている。一般的に、等角写像の計算には数値計算が必要となる[1]。

本稿では、代用電荷法を適用して、単純閉曲線の内部から単位円内部への数値等角写像の新しいスキームを提案し[2]、写像関数と導関数の近似精度を数値実験的に検討する。このスキームは対数関数の数値計算に主値を用いて連続かつ解析的で、座標のスケール変換に対しても自然な不変性を示す。導関数の計算に数値微分は不要である。

2. 写像定理

$z(=x+iy)$ 平面上に与えられたジョルダン閉曲線 C で囲まれた領域を D とし、 D 内の一点を z_0 とする。一般性を失うことなく、 $z_0 = 0$ として、この点を座標系の原点にとることができる。領域 D から w 平面上の単位円内部 $|w| < 1$ への等角写像は、その写像関数を $w = f(z)$ とすれば、正規化条件 $f(0) = 0, f'(0) > 0$ の下に一意に定まる。

この写像関数を

$$f(z) = \frac{z}{r_D} \exp(g(z) + ih(z)) \quad (1)$$

と表現する。 $g(z), h(z)$ は D で共役な調和関数で、 r_D は $f'(0) = 1/r_D > 0$ となる正の定数(写像半径)である。また C が単位円に移るための境界条件 $|f(z)| = 1 (z \in C)$ と正規化条件 $f'(0) = 1/r_D$ から、それぞれ

$$g(z) - \log r_D = -\log |z| \quad (z \in C) \quad (2)$$

と

$$g(0) + ih(0) = 0 \quad (3)$$

を満たさなければならない。

このように等角写像の問題は境界条件(2)を満たす調和関数 $g(z)$ と、その共役調和関数 $h(z)$ で正

規化条件を満たすものを同時に求めるという問題に帰着する。

3. 代用電荷法と数値等角写像

定式化1

境界 C が原点に対して星形である場合、近似写像関数

$$F(z) = \frac{z}{R_D} \exp(G(z) + iH(z)), \quad (4)$$

$$G(z) + iH(z) = \sum_{i=1}^N Q_i \log \left(1 - \frac{z}{\zeta_i} \right) \quad (5)$$

を構成することができる。ここで ζ_i は領域 D の外側に配置された N 個の電荷点である。電荷 $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ と写像半径 R_D は $N+1$ 元連立1次方程式

$$\sum_{i=1}^N Q_i \log \left| 1 - \frac{z_j}{\zeta_i} \right| - \log R_D = -\log |z_j| \quad (j = 1, 2, \dots, N), \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^N Q_i = -1 \quad (7)$$

の解となる。ここで、 z_j は境界上の拘束点である。

定式化2

境界 C が領域 D 内の点 z_s に対して星形である場合、近似写像関数

$$F(z) = \frac{z}{R_D} \exp(G(z) + iH(z)), \quad (8)$$

$$G(z) + iH(z) = \sum_{i=1}^N Q_i \left\{ \log \left(1 - \frac{z - z_s}{\zeta_i - z_s} \right) - \log \left(1 - \frac{-z_s}{\zeta_i - z_s} \right) \right\} \quad (9)$$

を構成することができる。電荷と写像半径は、 $N+1$

元連立1次方程式

$$\sum_{i=1}^N Q_i \left\{ \log \left| 1 - \frac{z_j - z_s}{\zeta_i - z_s} \right| - \log \left| 1 - \frac{-z_s}{\zeta_i - z_s} \right| \right\} - \log R_D = -\log |z_j| \quad (j = 1, 2, \dots, N), \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^N Q_i = -1 \quad (11)$$

の解となる。定式化2は連続スキームの適用性を広げるために有用である。

$F(z)$ の導関数はいずれの定式化でも

$$F'(z) = \frac{1}{R_D} \exp(G(z) + iH(z)) \left(1 + z \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{z - \zeta_i} \right) \quad (12)$$

となる。

4. 数値実験

1. 偏心円: $|z - x_0| < 1$ ($x_0 = 0.75$),

$$z_j = x_0 + e^{i\theta_j}.$$

2. カッシーニの楕形: $|z^2 - 1| < a^2$ ($a = 1.0219$),

$$z_j = r_j e^{i\theta_j},$$

$$r_j = \sqrt{\cos 2\theta_j + \sqrt{\cos^2 2\theta_j + a^4 - 1}},$$

$$\theta_j = 2\pi(j-1)/N \quad (j = 1, 2, \dots, N).$$

電荷点はいずれの場合にも

$$\zeta_j = z_j + \frac{q}{2} |z_{j+1} - z_{j-1}| \exp \left\{ i \left(\arg(z_{j+1} - z_{j-1}) - \frac{\pi}{2} \right) \right\} \quad (13)$$

で配置する。問題1, 2ともに写像関数の解析解が知られていて、近似写像関数の誤差を

$$E_F = \max_{1 \leq j \leq N} \{ |F(z_j) - f(z_j)|, |F(z_{j+\frac{1}{2}}) - f(z_{j+\frac{1}{2}})| \} \quad (14)$$

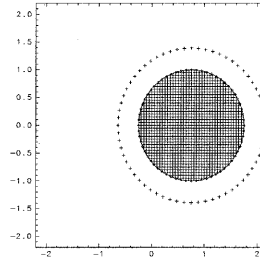
で、導関数の誤差を

$$E_{F'} = \max_{1 \leq j \leq N} \{ |F'(z_j) - f'(z_j)|, |F'(z_{j+\frac{1}{2}}) - f'(z_{j+\frac{1}{2}})| \} \quad (15)$$

で、評価する。 $z_{j+\frac{1}{2}}$ は境界上の中点である。

図1と2は偏心円とカッシーニの楕形の内部領域を単位円の内部に数値等角写像した図である。表1に計算結果を示す。 C_N は解くべき連立1次方程式の L_1 条件数である。

z -plane



w -plane

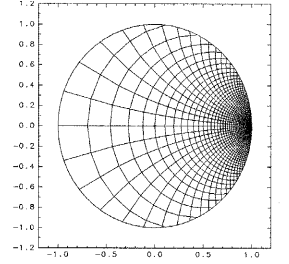
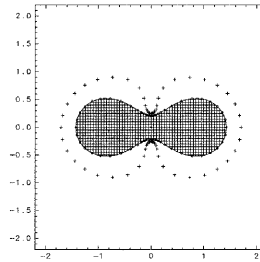


図1: 偏心円の内部から単位円板への等角写像

z -plane



w -plane

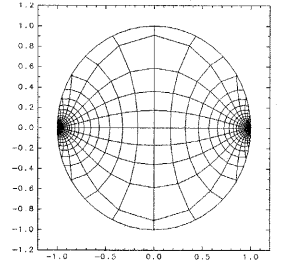


図2: カッシーニ楕形の内部から単位円板への等角写像

表1: 計算精度(定式化2)($N = 64$)

1. 偏心円					
q	2	4	6	8	
E_F	2.2E-05	2.5E-06	6.3E-06	7.6E-06	
$E_{F'}$	1.0E-03	9.6E-05	2.3E-04	2.7E-04	
R_D	4.4E-01	4.4E-01	4.4E-01	4.4E-01	
C_N	2.3E+06	8.5E+08	2.0E+12	2.1E+15	
2. カッシーニの楕形					
q	1	2	3	4	
E_F	1.3E-04	1.0E-05	1.0E-06	9.4E-05	
$E_{F'}$	1.5E-02	2.3E-04	2.1E-05	1.4E-03	
R_D	2.9E-01	2.9E-01	2.9E-01	2.9E-01	
C_N	1.0E+05	1.9E+06	3.2E+08	1.1E+10	

参考文献

- [1] P. Henrici: Applied and Computational Complex Analysis 3, John Wiley & Sons, New York, 1986.
- [2] K. Amano, D. Okano, H. Ogata, S. Katayama and N. Maki: Continuous Schemes of Numerical Conformal Mapping by the Charge Simulation Method, 第4回環瀬戸内応用数理研究部会シンポジウム講演プログラム要旨集, pp. 78-83, 2000.