

5T-08 データ点で接続しないインボリュート補間曲線

豊田工大 黒田 満

1. はじめに

円筒に糸を巻きつけてピンと張ったままほいてゆくとき、糸の先端はインボリュート曲線を描く。この曲線は古くから歯車をはじめ広い分野で使われて重要な役割を果たしてきた。最近ではインボリュート弧発生器を備えた数値制御（CNC）工作機械が利用できるようになっている。

インボリュート曲線はその曲率半径が (winding) 角、従って接線方向に比例するという優れた性質を持っている。類似のスパイラルとして、その曲率、曲率半径がそれぞれ弧長に比例するクロソイド及び対数らせんは曲率連続に接続してスプラインとして使われている。しかし、インボリュートスプラインはこれまで無かったので著者はこれを提案した¹⁾。

本研究ではこのインボリュートスプラインをデータ点で接続点しない方法^{2, 3)}によって拡張して、インボリュート弧の数を増やすことなく、より一層柔軟で滑らかな補間曲線を導く方法を提案する。設計者は特定点の接線や曲率を指定して曲率プロファイルをある程度直接制御することができる。

2. インボリュート曲線

一般に、平面曲線 r は曲線に沿う弧長 s と接線方向 θ を使って次のように表わされる。

$$r = \int \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} ds, \quad -\infty < \theta < \infty. \quad (1)$$

ここで、単位接線ベクトル t 、単位法線ベクトル n 及び曲率半径 ρ の間には次の関係が存在する。

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{dt}{ds} = \frac{d\theta}{ds} n = \frac{1}{\rho} n. \quad (2)$$

図1のように、インボリュート曲線では曲率半径が(宿閉線である)円の半径を μ として次のように表される。

$$\mu \equiv \frac{d\rho}{d\theta} = \text{const.} \quad (3)$$

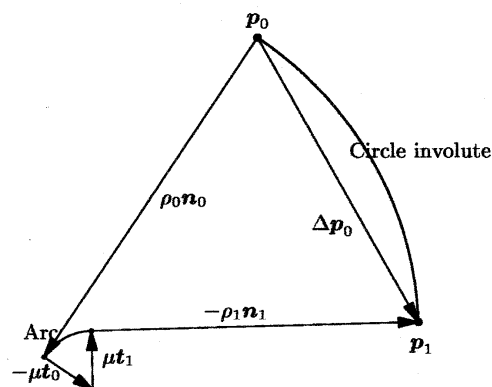


図1 インボリュート弧

このとき式(1)は次のように積分できる。

$$r = \int \rho t d\theta = -\rho n + \mu t \quad (4)$$

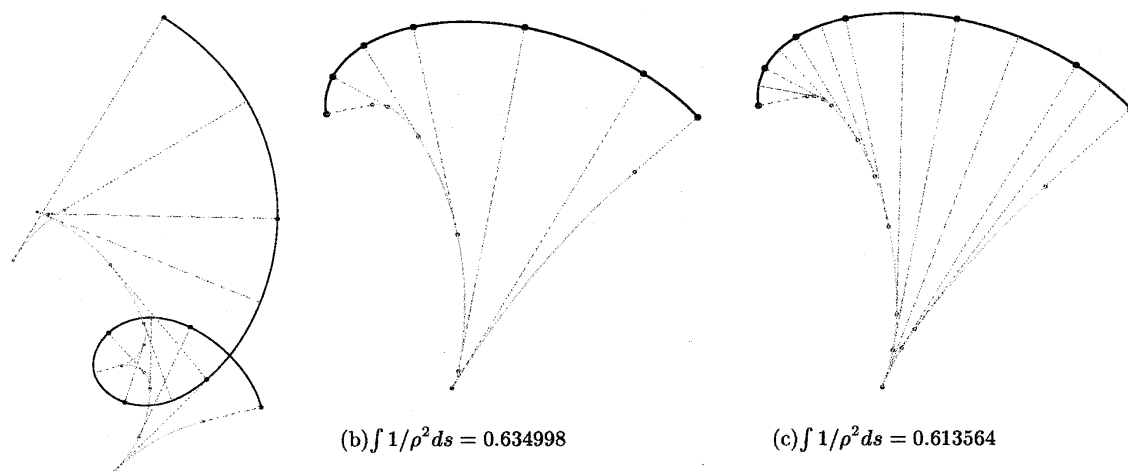
従って、インボリュート曲線は両端とそこでの角が与えられれば決まり¹⁾、式(4)を使って簡単に計算できる。また、(いわゆる「ひも」の長さを変えて生成される) オフセット曲線もインボリュート曲線であり、当然、インボリュートスプラインのオフセット曲線もインボリュートスプラインとなるので、容易に描画・加工することができる。

3. 双インボリュートスプライン

ここでは、インボリュート弧の接続点をデータ点に固定しないことによってより柔軟性のある曲線を導く。そのために、先ず各スパン(隣接データ点間)を次のように2つのインボリュート弧で表し、

$$r(\theta_{2i}) = p_i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (5)$$

これ等をデータ点で G^3 連続に接続する。つまり、データ点において隣接する2つのインボリュート弧は同一のインボリュート弧であるという条件を課する。ここで、未知数を $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{2n}, \rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{2n}$ の $4n+2$ 個とすれば、方程式は次の $3n-1$ 個となる。



$$(a) \int 1/\rho^2 ds = 3.17862$$

図 2 従来法による曲線 (b) と本手法による曲線 (a), (c)

$$\rho_{2i} n_{2i} + \frac{\Delta \rho_{2i}}{\Delta t_{2i}} \Delta t_{2i} + \frac{\Delta \rho_{2i+1}}{\Delta t_{2i+1}} \Delta t_{2i+1} - \rho_{2i+2} n_{2i+2} = \Delta p_i, \\ i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (6)$$

$$\frac{\Delta \rho_{2i+1}}{\Delta t_{2i+1}} = \frac{\Delta \rho_{2i+2}}{\Delta t_{2i+2}}, \quad i = 0, 1, \dots, n-2. \quad (7)$$

従って、我々はこれ等の方程式に 3つの境界条件と n 個の拘束条件を与えて解くことができる。このとき、 n 個の拘束条件には、円弧をデータ点で接続しない円弧補間曲線に対する最適解である²⁾ 次の (nominal) 値を仮に与えて、必要に応じてこれらの幾つかを具体的な拘束条件に置き換えると便利である。

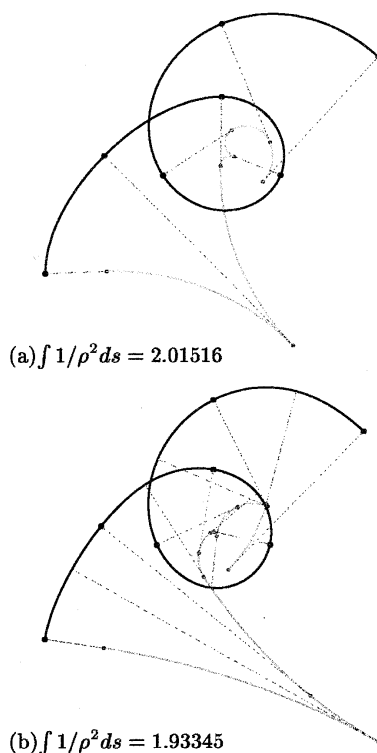
$$\theta_{2i+1} = \phi_i - \frac{\theta_{2i} + \theta_{2i+2}}{2}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (8)$$

4. 曲線例とまとめ

具体的なデータ点に対して曲線を導き比較する。図 2 (a) は文献 1) における曲線 ($\int 1/\rho^2 ds = 3.45166$) に対する本手法の曲線である。図 2 (c), 図 3 (b) はそれぞれ、従来法の曲線である図 2 (b), 図 3 (a) に対する本手法の曲線である。いずれの場合も本手法による曲線の曲率自乗積分が減少していることが分かる。このように、従来法より柔軟で滑らかなインポリュートスプライン補間曲線を導くことができた。

参考文献

- 1) 黒田 満：曲率連続なインポリュートスプライン補間曲線，情報処理学会第 59 回全国大会講演論文集 (1999) 4-155-4-156.



$$(a) \int 1/\rho^2 ds = 2.01516$$

$$(b) \int 1/\rho^2 ds = 1.93345$$

図 3 従来法による曲線 (a) と本手法による曲線 (b)

- 2) Su Bu-qing and D.Y. Liu: *Computational Geometry — Curve and Surface Modeling*, Academic Press, San Diego (1989) 199-202.
- 3) Meek, D.S. and Walton, D.J.: Planar osculating arc splines, *Computer Aided Geometric Design*, Vol.13, pp.653-671 (1996).