Vol. 25 No. 1　　情報処理学会論文誌　　Jan. 1984

受動資源と能動資源を有する待ち行列システム†

川口 喜三男††　田村 隆善†††

受動資源と能動資源から成るサービスシステムが扱われる．ジョブの到着過程はポアソン的であるが，システムの入口である受動資源割当てゲートの前には待ち行列を作らない．つまり，受動資源が不足する場合，到着ジョブは失われる．能動資源としてのサーバは s 個である．サービスは Cox 型の多段階サービスである．サーバ割当て規律として後着ジョブ優先割込み方式が採られる．ジョブにはクラス区分があり，クラスごとに異なる受動資源要求量分布とサービス時間分布（細分すれば，サービスフェーズに対する時間分布とフェーズ遷移確率から成る）が定義される．なお，ジョブがシステムにとどまる間，割り当てられ保持する受動資源量を変更することはない．このシステムの平衡方程式の解析解が明示される．さらに，サービス時間分布が一般の関数で与えられる場合の解法のアウトラインが示される．また，本稿の後着ジョブ優先割込み方式が，ある意味で最も公平なサービス方法であることも示される．

1. はじめに

社会的システムや計算機システムの内部では待合せ現象がしばしば見られる．待合せにはサーバの割当てのほかに種々の資源をも割り当てる必要があり，また資源量の有限性から待合せに制約があるのが実際の姿である．たとえば，計算機システムでは，ジョブにサービスを施すサーバとして CPU や IO プロセッサのような能動資源のほかにシステム内のジョブ量を制限して負荷を調整する役割をになう記憶装置のような受動資源があり，両者によってサービスシステムが構成される．このようなシステムの確率モデルとして，近年，受動資源と能動資源を含む待ち行列システムが考察の対象になってきている[1]．

しかし，平衡状態に対する解析であっても，この種の確率モデルの平衡方程式は一般に未知変数の数があまりにも大であるので，計算量の組合せ論的厖大さから数値解析による解を得ることがきわめて困難であるのが普通である．そのような事情から，可能なものであるならば，解析解を求めて最終的な数値解が容易に算出できるようにすることが，求解の一つの方法として重要となる．

従来，いくつかの制限されたモデルについて解析解が得られているが[2)~8)]，本稿では，さらに一般性のあるモデルを扱う．

受動資源と能動資源を有する待ち行列システムは，ここでは，次の要素から成るものとする（**図1**）．

（1） システムの外界に有限または無限のジョブの母集団が存在する．この入力源からジョブがシステムに到着し，また，システムを離脱すれば母集団へ復帰する．到着過程は，基本的にはポアソン的であると仮定する．さらに，すべてのジョブの集合に対し，ある類別（クラス分け）が存在することを仮定する．個々のジョブがどの類（クラス）に属するかはクラス区分により表示される．クラス区分は，たとえば，長時間，短時間（大型，小型）ジョブといったジョブ区分を表すとしてもよいし，部課名または個人名を表すとしてもよい．意味づけは自由である．

個々のジョブが受けるサービスは，Cox 型の多段階サービス[9)]で定義される．サービスの各段階を，本稿では，サービスフェーズまたはたんにフェーズと呼ぶ．ジョブは，1) そのクラス区分 c，2) フェーズ間遷移を制御する役割をもつ助変数の値 p（正整数が用いられる），3) トークン（受動資源個体を表す）要求量 $\boldsymbol{u}$（トークンが，m 台の磁気テープ装置，n 台の印刷装置，…といったように R 種類存在するならば，R 組数ベクトルが用いられる）の3組 $(c, p, \boldsymbol{u})$ でその現在フェーズ*が表示される．ジョブが $(c, p, \boldsymbol{u})$ で表示されるとき，このジョブはステージ p にあるという．

（2） 多種類のトークンのプール，割当てゲート，解放ゲートから成る受動資源サブシステムがシステム

† A Queueing Model with a Passive Resource and an Active Resource by KIMIO KAWAGUCHI-IZAWA (Department of Computer Science and Communication Engineering, Nagoya Institute of Technology) and TAKAYOSHI TAMURA (Department of Management Engineering, Nagoya Institute of Technology).

†† 名古屋工業大学工学部情報工学科
††† 名古屋工業大学工学部経営工学科

* ジョブはサービス待ちの状態に移行することもありうる．その状態にあるジョブも，次に受けるサービスフェーズに対応する表示 $(c, p, \boldsymbol{u})$ で表示するものとする．

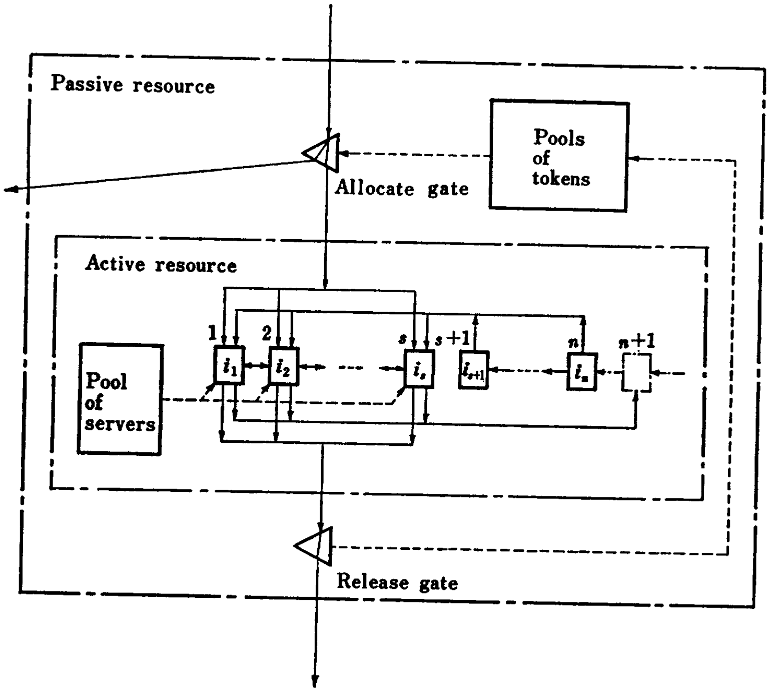

図1 システム Q
Fig. 1 System Q.

内部の第一の構成要素を形づくる．外界から割当てゲートに向かってジョブが到来したとき，このジョブの要求トークン量以上のトークン残量がプール内にあれば，このジョブは，システムによって受け入れられ，要求量だけトークンの割当てを受けて割当てゲートを通過し，能動資源サブシステムへ進む．もしもプール内のトークン残量では不足するならば，このジョブはシステム内に受け入れられず，ただちに外界に戻される．ジョブが能動資源サブシステム内にとどまる間，それが保持占有するトークン量に変化はないものとする．能動資源サブシステムで全（必要とするだけのフェーズすべての）サービスを受け終わったジョブはこのサブシステムを離れ，解放ゲートを通り保有するトークンを全量プールに返却して外界へ離脱する．なお，割当てゲートおよび解放ゲートを通過するのに要する時間は零であると仮定する．ここで述べた機能によってこのサブシステムは，次に述べる能動資源サブシステム上の負荷量を調節する働きをもつ．

（3） ジョブはサービスを享受しまたは待機するために行列を形成する．このための行列位置番号の系列 $1, 2, \cdots$，相等しい能力をもつ s 個のサーバの集合，および，待合せ規律がシステム内部の第二の構成要素，すなわち，能動資源サブシステムを形づくる．このサブシステムだけを抽出すれば，それは伝統的な待ち行列システムである．本稿で扱う待合せ規律の特徴は，詳細な記述は次章にゆずるが，1) 新規到着ジョブによって，非特定のサーバの横取り (preemption) が起こりうること，2) その結果サービスが中断して，待ちの状態にあるジョブのなかから再びサービスを享受するジョブを選出するときの規律はランダム選択であること，である*.

このシステムを以下ではシステム Q と呼ぶことにする．

2. システム Q の諸要素の定義

ジョブの到着過程は基本的にはポアソン的であると仮定される．到着時間間隔を確率変数 $\boldsymbol{T}$ で表すと，$\boldsymbol{T}$ は，システム内に n 個のジョブが存在するとき，パラメータ λ_n の指数分布

$$P\{\boldsymbol{T}\le t\}=\begin{cases}1-e^{-\lambda_n t} & (t\ge 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases} \tag{1}$$

に従う．このとき，到着率は λ_n である．

入力源が有限である場合，たとえば，次式

$$\lambda_n=\begin{cases}\lambda\cdot\min\{N-n, r\} & (0\le n<N)\\ 0 & (n\ge N)\end{cases}$$

（ただし，N（ジョブ総数）と r（正整数）は入力源のシステム定数であるものとする）

が成り立つことを仮定してもよい．

すべてのジョブの集合に対してあるクラス分けが存在することを仮定する．クラスの集合を $C=\{c_\alpha|\alpha\in A, A$ は添字の任意の集合である$\}$ で表す．

個々のジョブが受けるサービスは，Cox 型の多段階サービスで定義され，サービスの各段階はサービスフェーズまたはたんにフェーズと呼ばれる．フェーズ間の遷移を制御するための助変数がジョブに付随して存在するものとする．この助変数の値 p は正整数をとるものとし，これらの値の集合を H で表す．与えられたジョブのこの助変数の値が p であるとき，このジョブはステージ p にあるという．

受動資源サブシステムには R 種類のトークンのプールが存在し，種類 ν ($\nu=1, 2, \cdots, R$) のトークンの総量は Γ_ν であるものとする．

* なお，このランダム選択という規律は，モデルを解析可能ならしめる本質的な条件ではないことを付言しておく．たとえば，FIFO 規律を採っても本稿の方法で解析可能である．

ところで，R 個の数の順序づけられた組，すなわち，R 組数ベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_R)$，$\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_R)$ に対して関係≦を次のように定義する．

$$\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{y}\Longleftrightarrow\forall\nu(\nu=1,2,\cdots,R):\ x_\nu\leq y_\nu \tag{2}$$

とくに，等号については

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}\Longleftrightarrow\forall\nu(\nu=1,2,\cdots,R):\ x_\nu=y_\nu \tag{3}$$

また，加減算が次のとおりに定義される．

$$\boldsymbol{x}\pm\boldsymbol{y}=(x_1\pm y_1, x_2\pm y_2, \cdots, x_R\pm y_R) \tag{4}$$

なお，$\mathbf{0}$ は零ベクトル $(0,0,\cdots,0)$ を表す．

R 組数ベクトルの集合

$$\boldsymbol{\Gamma}=\{\boldsymbol{x}\,|\,\mathbf{0}\leq\boldsymbol{x}\leq(\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_R)\} \tag{5}$$

を（受動）資源空間という．与えられたベクトル $\boldsymbol{u}(\mathbf{0}\leq\boldsymbol{u}\leq(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_R))$ に対し，$\boldsymbol{\Gamma}$ の部分空間 $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{u})$ を

$$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{u})=\{\boldsymbol{x}\,|\,\mathbf{0}\leq\boldsymbol{x}\leq(\Gamma_1,\cdots,\Gamma_R)-\boldsymbol{u}\} \tag{6}$$

と定義する．$\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{0})=\boldsymbol{\Gamma}$ は明らか．また，$\boldsymbol{u}\leq\boldsymbol{v}$ ならば，$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{u})\supseteq\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{v})$ が成り立つ．

システム内に n 個のジョブが存在して，それぞれが $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ の量のトークン（受動資源個体）を占有しているものとすると，当然 $\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\cdots+\boldsymbol{u}_n\in\boldsymbol{\Gamma}$ であり，$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{u}_1+\cdots+\boldsymbol{u}_n)$ はそのときのプール内トークン残量を表す．

システム内の与えられたジョブがクラス c に属し，ステージ p にあり，また $\boldsymbol{u}$ 量のトークンを占有保持しているとする．このとき，このジョブは3組 $(c, p, \boldsymbol{u})$ で表示される．今後，このような3組をたんに $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$，等で表す．

システムへの到着ジョブが，クラス c に属してステージ p からサービスを受け始めるものであり，かつトークンを $\boldsymbol{u}$ 量だけ要求するものである確率は，$g_{\cdot\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{i}=(c, p, \boldsymbol{u}))$ で与えられると仮定する．$C\times H\times\boldsymbol{\Gamma}$ は集合 $C, H, \boldsymbol{\Gamma}$ のデカルト積であるとすると，

$$\sum_{\boldsymbol{i}\in C\times H\times\boldsymbol{\Gamma}} g_{\cdot\boldsymbol{i}}=1 \tag{7}$$

したがって，システム内に n 個のジョブが存在するとき，Δt 時間の間にジョブ $\boldsymbol{i}$ が到着する確率は，$\lambda_n g_{\cdot\boldsymbol{i}}\Delta t+o(\Delta t)$ ($o(\Delta t)$ は Δt に対する高位の無限小を表す）である．

ジョブ $\boldsymbol{i}=(c, p, \boldsymbol{u})$ のフェーズサービス時間を確率変数 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{i})$ で表すと，$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{i})$ は，$\boldsymbol{i}$ に依存して定まるパラメータ $\mu(\boldsymbol{i})$ の指数分布

$$P[\boldsymbol{S}(\boldsymbol{i})\leq x]=\begin{cases}1-e^{-\mu(\boldsymbol{i})x} & (x\geq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases} \tag{8}$$

に従うものとする．$1/\mu(\boldsymbol{i})$ は，ジョブ $\boldsymbol{i}$ の平均フェーズサービス時間である．

一つのフェーズが終了すると，それによりそのジョブの全サービスが完了するか，あるいは次のフェーズ（またはそのフェーズのサービスを待つ状態）に移行することになる．ジョブ $\boldsymbol{i}$ のフェーズ終了がこのジョブの全サービスの完了である確率は $g_{\boldsymbol{i}\cdot}$ で与えられる．$\boldsymbol{i}$ で表示されるジョブが次のフェーズ（またはサービス待ちの状態）に遷移して $\boldsymbol{j}$ で表示される確率は $g_{\boldsymbol{ij}}$ で与えられると仮定すると，確率 $g_{\boldsymbol{i}\cdot}, g_{\boldsymbol{ij}}$ は，条件

$$g_{\boldsymbol{i}\cdot}+\sum_{\boldsymbol{j}\in C\times H\times\boldsymbol{\Gamma}} g_{\boldsymbol{ij}}=1 \tag{9}$$

を満足する．また，$\boldsymbol{i}=(c, p, \boldsymbol{u})$，$\boldsymbol{j}=(d, q, \boldsymbol{v})$ とおくと，常に次式が成立するものと仮定する．

$$\boldsymbol{u}\not\leq\boldsymbol{v}\ \Rightarrow\ g_{\boldsymbol{ij}}=0 \tag{10}$$

なお，いかなるジョブも一度システム内に入れば，確率1をもってやがては全サービスを享受し終わるものと仮定する．また，確率 $g_{\cdot\boldsymbol{i}}$, $g_{\boldsymbol{i}\cdot}, g_{\boldsymbol{ij}}$ はいずれも定常的であることも仮定する．

システム内に n 個のジョブ $\boldsymbol{i}_1=(c_1, p_1, \boldsymbol{u}_1), \cdots, \boldsymbol{i}_n=(c_n, p_n, \boldsymbol{u}_n)$ が存在するとき，システムの状態は，下記に述べる待合せ規律によって定まる順序に従って排列された系列―行列と呼ぶ―$[\boldsymbol{i}_1, \cdots, \boldsymbol{i}_n]$ で表される．このとき，$\boldsymbol{i}_\nu(\nu=1, \cdots, n)$ は行列の ν 番目の位置にあるという．システム内にジョブが存在しない空状態は，$[\ \ ]$で表される．

行列 $[\boldsymbol{i}_1, \cdots, \boldsymbol{i}_n]$ の順序は，このシステムの待合せ規律によって次のように定められる．システムには，ベクトル $(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_R)$ で表される量の R 種類のトークンと s 個の相等しいサーバが用意されていると仮定する．

（1） システムが空状態 $[\ \ ]$ にあるとき，ジョブ $\boldsymbol{i}=(c, p, \boldsymbol{u})$ が到着すると，このジョブは，$\boldsymbol{u}$ 量だけのトークンの割当てを受け（プール内トークン残量は $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{u})$ となる），ただちに能動資源サブシステム内の行列の1番目の位置に入り，1個のサーバの割当てを受ける．この結果，状態は $[\boldsymbol{i}]$ に移行する．

（2） システムが状態 $[\boldsymbol{i}_1, \cdots, \boldsymbol{i}_n]$ ($\boldsymbol{i}_1=(c_1, p_1, \boldsymbol{u}_1), \cdots, \boldsymbol{i}_n=(c_n, p_n, \boldsymbol{u}_n)$, $n<s$) にあるとする．この状態では，ジョブ $\boldsymbol{i}_1, \cdots, \boldsymbol{i}_n$ のそれぞれにサーバが1個ずつ割り当てられていて，おのおのフェーズサービスを行っている．この状態にあるとき，

a）新たなジョブ $\boldsymbol{i}_{n+1}=(c_{n+1}, p_{n+1}, \boldsymbol{u}_{n+1})$ の到着があると，もしも，$\boldsymbol{u}_{n+1}\notin\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{u}_1+\cdots+\boldsymbol{u}_n)$，すなわち，要求を満たすにはプール内のトークン残量が不足であるならば，受動資源サブシステムはこの

ジョブの受入れを拒絶し（この結果，システムの状態に変化は生じない），$\boldsymbol{u}_{n+1}\in\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{u}_1+\cdots+\boldsymbol{u}_n)$，すなわち，要求を満たすのに十分なトークン残量が存在するならば，このジョブは受け入れられて，$\boldsymbol{u}_{n+1}$ 量のトークンの割当てを受け，ただちに能動資源サブシステムへ入る．能動資源サブシステムに入来したジョブ $\boldsymbol{i}_{n+1}$ は，等確率，すなわち，$1/(n+1)$ の確率で行列の1番目，…，または $n+1$ 番目の位置に入って，その結果，状態は〔$\boldsymbol{i}_{n+1}, \boldsymbol{i}_1, \cdots, \boldsymbol{i}_n$〕，〔$\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_{n+1}, \boldsymbol{i}_2, \cdots, \boldsymbol{i}_n$〕，…，または〔$\boldsymbol{i}_1, \cdots, \boldsymbol{i}_n, \boldsymbol{i}_{n+1}$〕に移行する．

b）ジョブ $\boldsymbol{i}_1, \cdots, \boldsymbol{i}_n$ のなかの一つ $\boldsymbol{i}_\nu$ のフェーズサービスが終了して，次にこのジョブが $\boldsymbol{i}_\nu'=(c_\nu', p_\nu', \boldsymbol{u}_\nu)$ に推移するものとすると，システムの状態は，〔$\cdots, \boldsymbol{i}_{\nu-1}, \boldsymbol{i}_\nu, \boldsymbol{i}_{\nu+1}, \cdots$〕から〔$\cdots, \boldsymbol{i}_{\nu-1}, \boldsymbol{i}_\nu', \boldsymbol{i}_{\nu+1}, \cdots$〕へ遷移する．$\boldsymbol{i}_\nu$ から $\boldsymbol{i}_\nu'$ への変化によってこのジョブのトークン保持量に変更はない．

c）ジョブ $\boldsymbol{i}_1, \cdots, \boldsymbol{i}_n$ のなかの一つ $\boldsymbol{i}_\nu$ のフェーズサービスが終了し，これによりこのジョブの全サービスが完了するならば，このジョブは能動資源サブシステムを離れ，解放ゲートを通り保有するトークンをすべてプールへ返却して外界へ離脱する．この結果，システムの状態は〔$\cdots, \boldsymbol{i}_{\nu-1}, \boldsymbol{i}_\nu, \boldsymbol{i}_{\nu+1}, \cdots$〕から〔$\cdots, \boldsymbol{i}_{\nu-1}, \boldsymbol{i}_{\nu+1}, \cdots$〕に変化する．

（3） システムが状態〔$\boldsymbol{i}_1, \cdots, \boldsymbol{i}_n$〕（$\boldsymbol{i}_1=(c_1, p_1, \boldsymbol{u}_1), \cdots, \boldsymbol{i}_n=(c_n, p_n, \boldsymbol{u}_n), n\geq s$）にあるとする．この状態では，ジョブ $\boldsymbol{i}_1, \cdots, \boldsymbol{i}_s$ にサーバがそれぞれ1個ずつ割り当てられていて，おのおのフェーズサービスを行っている．残余のジョブ $\boldsymbol{i}_{s+1}, \cdots, \boldsymbol{i}_n$（$n>s$ のとき）は，サービス待ちの状態にある．システムがこの状態にあるとき，

a）新たなジョブ $\boldsymbol{i}_{n+1}=(c_{n+1}, p_{n+1}, \boldsymbol{u}_{n+1})$ の到着があると，もしも，$\boldsymbol{u}_{n+1}\notin\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{u}_1+\cdots+\boldsymbol{u}_n)$ であるならば，受動資源サブシステムはこのジョブの受入れを拒絶し，$\boldsymbol{u}_{n+1}\in\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{u}_1+\cdots+\boldsymbol{u}_n)$ であるならば，このジョブは受け入れられて，$\boldsymbol{u}_{n+1}$ 量のトークンの割当てを受け，ただちに能動資源サブシステムへ進む．能動資源サブシステムに入来したジョブ $\boldsymbol{i}_{n+1}$ は，等確率，すなわち，$1/s$ の確率で行列の1番目，2番目，…，または s 番目の位置に入る．このとき，それまでその位置にあってサーバによりサービスされていたジョブは，サービスを中断されて（サーバを放棄して）行列の最後尾（位置 $n+1$）へ移動する．したがって，システムの状態は，〔$\boldsymbol{i}_{n+1}, \boldsymbol{i}_2, \cdots, \boldsymbol{i}_n, \boldsymbol{i}_1$〕，〔$\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_{n+1}, \boldsymbol{i}_3, \cdots, \boldsymbol{i}_n, \boldsymbol{i}_2$〕，…，または〔$\boldsymbol{i}_1, \cdots, \boldsymbol{i}_{s-1}, \boldsymbol{i}_{n+1}, \boldsymbol{i}_{s+1}, \cdots, \boldsymbol{i}_n, \boldsymbol{i}_s$〕に移行する．

b）ジョブ $\boldsymbol{i}_1, \cdots, \boldsymbol{i}_s$ のなかの一つ $\boldsymbol{i}_\nu$ のフェーズサービスが終了して，次のこのジョブが $\boldsymbol{i}_\nu'=(c_\nu', p_\nu', \boldsymbol{u}_\nu)$ に推移するものとすると，システムの状態は，〔$\cdots, \boldsymbol{i}_{\nu-1}, \boldsymbol{i}_\nu, \boldsymbol{i}_{\nu+1}, \cdots$〕から〔$\cdots, \boldsymbol{i}_{\nu-1}, \boldsymbol{i}_\nu', \boldsymbol{i}_{\nu+1}, \cdots$〕に遷移する．

c）ジョブ $\boldsymbol{i}_1, \cdots, \boldsymbol{i}_s$ のなかの一つ $\boldsymbol{i}_\nu$ のフェーズサービスが終了して，これによりこのジョブの全サービスが完了するならば，このジョブは，能動資源サブシステムを離れ，解放ゲートを通り保有するトークンをすべてプールへ返却して外界へ離脱する．同時に，待ちの状態にあるジョブ $\boldsymbol{i}_{s+1}, \cdots, \boldsymbol{i}_n$（$n>s$ のとき）のなかから，等確率，すなわち，$1/(n-s)$ の確率で一つのジョブ $\boldsymbol{i}_\kappa$ が選出されて，これが行列の ν 番目の位置に移動し，再びサーバを割り当てられる．したがって，システムの状態は，$n=s$ のとき，〔$\cdots, \boldsymbol{i}_{\nu-1}, \boldsymbol{i}_{\nu+1}, \cdots$〕に推移し，$n>s$ のときは，〔$\cdots, \boldsymbol{i}_{\nu-1}, \boldsymbol{i}_\kappa, \boldsymbol{i}_{\nu+1}, \cdots, \boldsymbol{i}_s, \cdots, \boldsymbol{i}_{\kappa-1}, \boldsymbol{i}_{\kappa+1}, \cdots$〕に推移する．

上記の待合せ規律によれば，①新規到着ジョブによって非特定のサーバ（したがって，1番目から s 番目までの非特定の行列位置）の横取りが生じえ，また②サービス待ちの状態にあるジョブのなかからサービスを再開するジョブを選出する規準はランダム選出である．したがって，システムの状態として意味をもつのは，順列〔$\boldsymbol{i}_1, \cdots, \boldsymbol{i}_n$〕であるよりも，$n\leq s$ のときは，組合せ $\{\boldsymbol{i}_1, \cdots, \boldsymbol{i}_n\}$，$n>s$ のときは，組合せの2組（$\{\boldsymbol{i}_1, \cdots, \boldsymbol{i}_s\}$，$\{\boldsymbol{i}_{s+1}, \cdots, \boldsymbol{i}_n\}$）である．下記ではシステムの状態表示として，〔$\boldsymbol{i}_1, \cdots, \boldsymbol{i}_n$〕のほかに（$\{\boldsymbol{i}_1, \cdots, \boldsymbol{i}_n\}$，$\{\ \}$）（$n\leq s$），（$\{\boldsymbol{i}_1, \cdots, \boldsymbol{i}_s\}$，$\{\boldsymbol{i}_{s+1}, \cdots, \boldsymbol{i}_n\}$）（$n>s$）を併用する．

3. システム Q の平衡方程式と解

システムの状態〔$\boldsymbol{i}_1, \cdots, \boldsymbol{i}_n$〕の平衡状態確率を P〔$\boldsymbol{i}_1, \cdots, \boldsymbol{i}_n$〕で表すと，システム Q の平衡方程式は次式で与えられる．

〔平衡方程式〕

$$\lambda_0 P[\ \ ]=\sum_{\boldsymbol{h}\in C\times H\times\boldsymbol{\Gamma}}\mu(\boldsymbol{h})g_{\boldsymbol{h}.}P[\boldsymbol{h}] \tag{11}$$

$$\{\lambda_n \sum_{\boldsymbol{h}\in C\times H\times\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{u}_1+\cdots+\boldsymbol{u}_n)} g_{.\boldsymbol{h}} + \sum_{\kappa=1}^{n}\mu(\boldsymbol{i}_\kappa)\}P[\boldsymbol{i}_1, \cdots, \boldsymbol{i}_n]$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{\boldsymbol{h}\in C\times H\times \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{u}_1+\cdots+\boldsymbol{u}_n)} \mu(\boldsymbol{h}) g_{\boldsymbol{h}.}\{P[\boldsymbol{h},\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_n]\\
&\quad +P[\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{h},\boldsymbol{i}_2,\cdots,\boldsymbol{i}_n]+\cdots\\
&\quad +P[\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_n,\boldsymbol{h}]\}\\
&\quad +\sum_{\boldsymbol{h}\in C\times H\times \boldsymbol{\Gamma}} \mu(\boldsymbol{h})\{g_{\boldsymbol{h}\boldsymbol{i}_1}P[\boldsymbol{h},\boldsymbol{i}_2,\cdots,\boldsymbol{i}_n]\\
&\quad +g_{\boldsymbol{h}\boldsymbol{i}_2}P[\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{h},\boldsymbol{i}_3,\cdots,\boldsymbol{i}_n]+\cdots\\
&\quad +g_{\boldsymbol{h}\boldsymbol{i}_n}P[\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_{n-1},\boldsymbol{h}]\}\\
&\quad +\frac{\lambda_{n-1}g_{.\boldsymbol{i}_1}}{n}P[\boldsymbol{i}_2,\cdots,\boldsymbol{i}_n]\\
&\quad +\frac{\lambda_{n-1}g_{.\boldsymbol{i}_2}}{n}P[\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_3,\cdots,\boldsymbol{i}_n]+\cdots\\
&\quad +\frac{\lambda_{n-1}g_{.\boldsymbol{i}_n}}{n}P[\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_{n-1}]
\end{aligned}
$$

(ただし，$n<s$)　　(12)

式(12)右辺第1項は前記待合せ規律における項目(2)の c)，第2項は項目(2)の b)，第3項以下は項目(2)の a)にそれぞれ対応する．

$$
\begin{aligned}
&\{\lambda_n \sum_{\boldsymbol{h}\in C\times H\times \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{u}_1+\cdots+\boldsymbol{u}_n)} g_{.\boldsymbol{h}}\\
&\quad +\sum_{\kappa=1}^{s}\mu(\boldsymbol{i}_\kappa)\}P[\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_s,\boldsymbol{i}_{s+1},\cdots,\boldsymbol{i}_n]\\
&=\sum_{\boldsymbol{h}\in C\times H\times \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{u}_1+\cdots+\boldsymbol{u}_n)} \frac{\mu(\boldsymbol{h})g_{\boldsymbol{h}.}}{n-s+1}\\
&\quad \times\{(P[\boldsymbol{h},\boldsymbol{i}_2,\cdots,\boldsymbol{i}_s,\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_{s+1},\cdots,\boldsymbol{i}_n]\\
&\quad +P[\boldsymbol{h},\boldsymbol{i}_2,\cdots,\boldsymbol{i}_s,\boldsymbol{i}_{s+1},\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_{s+2},\cdots,\boldsymbol{i}_n]+\cdots\\
&\quad +P[\boldsymbol{h},\boldsymbol{i}_2,\cdots,\boldsymbol{i}_s,\boldsymbol{i}_{s+1},\cdots,\boldsymbol{i}_n,\boldsymbol{i}_1])\\
&\quad +(P[\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{h},\boldsymbol{i}_3,\cdots,\boldsymbol{i}_s,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_{s+1},\cdots,\boldsymbol{i}_n]+\cdots\\
&\quad +P[\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{h},\boldsymbol{i}_3,\cdots,\boldsymbol{i}_s,\boldsymbol{i}_{s+1},\cdots,\boldsymbol{i}_n,\boldsymbol{i}_2])+\cdots\\
&\quad +(P[\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_{s-1},\boldsymbol{h},\boldsymbol{i}_s,\cdots,\boldsymbol{i}_n]\\
&\quad +P[\boldsymbol{i}_1,\cdots+\boldsymbol{i}_{s-1},\boldsymbol{h},\boldsymbol{i}_{s+1},\boldsymbol{i}_s,\boldsymbol{i}_{s+2},\cdots,\boldsymbol{i}_n]+\cdots\\
&\quad +P[\boldsymbol{i}_1,\cdots+\boldsymbol{i}_{s-1},\boldsymbol{h},\boldsymbol{i}_{s+1},\cdots,\boldsymbol{i}_n,\boldsymbol{i}_s])\}\\
&\quad +\sum_{\boldsymbol{h}\in C\times H\times \boldsymbol{\Gamma}} \mu(\boldsymbol{h})\{g_{\boldsymbol{h}\boldsymbol{i}_1}P[\boldsymbol{h},\boldsymbol{i}_2,\cdots,\boldsymbol{i}_n]\\
&\quad +g_{\boldsymbol{h}\boldsymbol{i}_2}P[\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{h},\boldsymbol{i}_3,\cdots,\boldsymbol{i}_n]+\cdots\\
&\quad +g_{\boldsymbol{h}\boldsymbol{i}_s}P[\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_{s-1},\boldsymbol{h},\boldsymbol{i}_{s+1},\cdots,\boldsymbol{i}_n]\}\\
&\quad +\frac{\lambda_{n-1}g_{.\boldsymbol{i}_1}}{s}P[\boldsymbol{i}_n,\boldsymbol{i}_2,\cdots,\boldsymbol{i}_s,\boldsymbol{i}_{s+1},\cdots,\boldsymbol{i}_{n-1}]\\
&\quad +\frac{\lambda_{n-1}g_{.\boldsymbol{i}_2}}{s}P[\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_n,\boldsymbol{i}_3,\cdots,\boldsymbol{i}_s,\cdots,\boldsymbol{i}_{n-1}]+\cdots\\
&\quad +\frac{\lambda_{n-1}g_{.\boldsymbol{i}_s}}{s}P[\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_{s-1},\boldsymbol{i}_n,\boldsymbol{i}_{s+1},\cdots,\boldsymbol{i}_{n-1}]
\end{aligned}
$$

(ただし，$n\geq s$)　　(13)

式(13)右辺第1項は前記待合せ規律における項目(3)の c)，第2項は項目(3)の b)，第3項以下は項目(3)の a)にそれぞれ対応する．

平衡状態確率が存在するならば，それは，平衡方程式(11)，(12)，(13)を条件

$$
\begin{aligned}
&P[\ ]+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\boldsymbol{i}_1\in C\times H\times\boldsymbol{\Gamma}}\ \sum_{\boldsymbol{i}_2\in C\times H\times\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{u}_1)}\cdots\\
&\quad\cdots\sum_{\boldsymbol{i}_n\in C\times H\times\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{u}_1+\cdots+\boldsymbol{u}_{n-1})}P[\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_n]=1 \quad (14)
\end{aligned}
$$

の下で解くことによって得られる．

〔求解〕 平衡方程式(11)，(12)，(13)の解析解は，幸いにして単純な積形式で得ることができる．求解の方法は，解が次のように $\boldsymbol{i}_\nu(\nu=1,\cdots,n)$ の未定関数 $X(\boldsymbol{i}_\nu)$ の積の形式をとるものと仮定し，後に関数 X を定める．

$$
\left\{
\begin{aligned}
&P[\ ]=P_0\\
&P[\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_n]\\
&\quad=\frac{P_0}{n!}\prod_{\nu=1}^{n}\lambda_{\nu-1}\prod_{\nu=1}^{n}X(\boldsymbol{i}_\nu)\quad (n<s)\\
&P[\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_s,\boldsymbol{i}_{s+1},\cdots,\boldsymbol{i}_n]\\
&\quad=\frac{P_0}{s!\,s^{n-s}}\prod_{\nu=1}^{n}\lambda_{\nu-1}\prod_{\nu=1}^{n}X(\boldsymbol{i}_\nu)\quad (n\geq s)
\end{aligned}
\right. \qquad (15)
$$

仮定解(15)は，平衡方程式(11)～(13)を満足しなければならない．まず，式(11)に式(15)を代入すると，

$$
\sum_{\boldsymbol{h}\in C\times H\times\boldsymbol{\Gamma}}\mu(\boldsymbol{h})g_{\boldsymbol{h}.}X(\boldsymbol{h})=1 \qquad (16)
$$

を得る．次に，式(12)に式(15)を代入すると，

$$
\begin{aligned}
&\Big\{\lambda_n\sum_{\boldsymbol{h}\in C\times H\times\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{u}_1+\cdots+\boldsymbol{u}_n)}g_{.\boldsymbol{h}}\\
&\qquad+\sum_{\kappa=1}^{n}\mu(\boldsymbol{i}_\kappa)\Big\}\prod_{\nu=1}^{n}X(\boldsymbol{i}_\nu)\\
&\quad=\lambda_n\sum_{\boldsymbol{h}\in C\times H\times\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{u}_1+\cdots+\boldsymbol{u}_n)}\mu(\boldsymbol{h})g_{\boldsymbol{h}.}X(\boldsymbol{h})\prod_{\nu=1}^{n}X(\boldsymbol{i}_\nu)\\
&\qquad+\sum_{\kappa=1}^{n}\sum_{\boldsymbol{h}\in C\times H\times\boldsymbol{\Gamma}}\mu(\boldsymbol{h})g_{\boldsymbol{h}\boldsymbol{i}_\kappa}X(\boldsymbol{h})\prod_{\substack{\nu=1\\(\nu\neq\kappa)}}^{n}X(\boldsymbol{i}_\nu)\\
&\qquad+\sum_{\kappa=1}^{n}g_{.\boldsymbol{i}_\kappa}\prod_{\substack{\nu=1\\(\nu\neq\kappa)}}^{n}X(\boldsymbol{i}_\nu) \qquad (17)
\end{aligned}
$$

を得る．式(13)からも，式(15)を代入することにより同形式の式*が得られる．

ここで，次の補題が成立することを示す．

〔補題 1〕 次の式

$$
\begin{aligned}
&\mu(\boldsymbol{i})X(\boldsymbol{i})\\
&\quad=\sum_{\boldsymbol{h}\in C\times H\times\boldsymbol{\Gamma}}g_{\boldsymbol{h}\boldsymbol{i}}\mu(\boldsymbol{h})X(\boldsymbol{h})+g_{.\boldsymbol{i}}\\
&\qquad(\boldsymbol{i}\in C\times H\times\boldsymbol{\Gamma}) \qquad (18)
\end{aligned}
$$

は，式(16)，(17)の十分条件である．

* ただし，式(17)中に出現する $\sum_{\kappa=1}^{n}$ をすべて $\sum_{\kappa=1}^{s}$ に書き換える．

(証明) まず，式(18)が成り立つならば，次式

$$\sum_{h\in C\times H\times\Gamma(v)}\mu(h)g_{h.}X(h)=\sum_{h\in C\times H\times\Gamma(v)}g_{.h} \tag{19}$$

が，任意の $v\in\Gamma$ に対して成り立つことを示す．

式(18)から

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\in C\times H\times\Gamma(v)}\mu(i)X(i)\\
&=\sum_{i\in C\times H\times\Gamma(v)}\ \sum_{h\in C\times H\times\Gamma}g_{hi}\mu(h)X(h)\\
&\quad+\sum_{i\in C\times H\times\Gamma(v)}g_{.i}\\
&=\sum_{i\in C\times H\times\Gamma(v)}\ \sum_{h\in C\times H\times\Gamma(v)}g_{hi}\mu(h)X(h)\\
&\quad+\sum_{i\in C\times H\times\Gamma(v)}g_{.i}\\
&=\sum_{h\in C\times H\times\Gamma(v)}(1-g_{h.})\mu(h)X(h)\\
&\quad+\sum_{i\in C\times H\times\Gamma(v)}g_{.i}
\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\sum_{h\in C\times H\times\Gamma(v)}\mu(h)g_{h.}X(h)=\sum_{h\in C\times H\times\Gamma(v)}g_{.h}$$

とくに $v=0$ と置くと，式(16)が得られる．

次に，式(19)において $v=u_1+\cdots+u_n$ と置き，式(17)に適用すると，式(17)は，両辺の第1項が消去されて，次のようになる．

$$\begin{aligned}
&\sum_{\kappa=1}^{n}\mu(i_\kappa)\prod_{\nu=1}^{n}X(i_\nu)\\
&=\sum_{\kappa=1}^{n}\ \sum_{h\in C\times H\times\Gamma}\mu(h)g_{hi_\kappa}X(h)\prod_{\substack{\nu=1\\(\nu\neq\kappa)}}^{n}X(i_\nu)\\
&\quad+\sum_{\kappa=1}^{n}g_{.i_\kappa}\prod_{\substack{\nu=1\\(\nu\neq\kappa)}}^{n}X(i_\nu)
\end{aligned} \tag{20}$$

次に，式(18)は式(20)を満足することを示す．式(18)から

$$\begin{aligned}
&\mu(i_\kappa)X(i_\kappa)\prod_{\substack{\nu=1\\(\nu\neq\kappa)}}^{n}X(i_\nu)\\
&=\sum_{h\in C\times H\times\Gamma}\mu(h)g_{hi_\kappa}X(h)\prod_{\substack{\nu=1\\(\nu\neq\kappa)}}^{n}X(i_\nu)\\
&\quad+g_{.i_\kappa}\prod_{\substack{\nu=1\\(\nu\neq\kappa)}}^{n}X(i_\nu)
\end{aligned}$$

κ について総和をとれば，式(20)が得られる． ∎

補題1により，連立1次方程式(18)の解は，平衡方程式(11)，(12)，(13)の解を与えることになる．そこで，次に，連立1次方程式(18)の解を求める．

連立1次方程式(18)の未知変数 $X(i)$ の個数はたかだか $|C\times H\times\Gamma|$ である．$|C\times H\times\Gamma|$ が有限である場合，未知変数の個数を比較すれば，連立方程式(11)，(12)，(13)を直接に解こうとするときの複雑さにくらべて，求解が本質的に容易になることが了解されよう．

$|C\times H\times\Gamma|$ は有限であると仮定し，$C\times H\times\Gamma$ の要素を $j_1, j_2, \cdots, j_N$ $(N=|C\times H\times\Gamma|)$ と置いて，式(18)を行列形式に書き直すと，

$$\begin{bmatrix}
(1-g_{j_1j_1}) & -g_{j_2j_1} & \cdots & -g_{j_Nj_1}\\
-g_{j_1j_2} & (1-g_{j_2j_2}) & \cdots & -g_{j_Nj_2}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
-g_{j_1j_N} & -g_{j_2j_N} & \cdots & (1-g_{j_Nj_N})
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
\mu(j_1)X(j_1)\\
\mu(j_2)X(j_2)\\
\vdots\\
\mu(j_N)X(j_N)
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
g_{.j_1}\\
g_{.j_2}\\
\vdots\\
g_{.j_N}
\end{bmatrix} \tag{21}$$

となる．係数行列の行列式を Δ，係数行列の k 番目の列を式(21)の右辺に現れるベクトルで置き換えた行列の行列式を $\Delta(j_k)$ と置くと，

$$\Delta=\begin{vmatrix}
(1-g_{j_1j_1}) & -g_{j_2j_1} & \cdots & -g_{j_Nj_1}\\
-g_{j_1j_2} & (1-g_{j_2j_2}) & \cdots & -g_{j_Nj_2}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
-g_{j_1j_N} & -g_{j_2j_N} & \cdots & (1-g_{j_Nj_N})
\end{vmatrix} \tag{22}$$

$$\Delta(j_k)=\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} & & \text{列 } k & & \\ & & \vee & & \end{array}\\
\begin{vmatrix}
(1-g_{j_1j_1}) & \cdots & g_{.j_1} & \cdots & -g_{j_Nj_1}\\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots\\
 & & g_{.j_k} & & \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots\\
-g_{j_1j_N} & \cdots & g_{.j_N} & \cdots & (1-g_{j_Nj_N})
\end{vmatrix}
\end{array} \tag{23}$$

と書ける．

$\Delta\neq 0$ であるとする（条件(9)，および，すべてのジョブが終局的には全サービスの享受を完了してシステムから離れるに到る仮定から，実際このとおりになるが，いまは深く論じないことにする）と，連立1次方程式(21)（または式(18)）の解は次のとおりである．

$$X(j_k)=\frac{1}{\mu(j_k)}\cdot\frac{\Delta(j_k)}{\Delta} \quad (k=1,\cdots,N) \tag{24}$$

したがって，これを式(15)に代入して得られる次式(A)は，平衡方程式(11)，(12)，(13)の解である．

$$\text{(A)}\quad\left\{\begin{aligned}
&P[\ \ ]=P_0\\
&P[i_1,\cdots,i_n]\\
&\quad=\frac{P_0}{n!}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\lambda_{\nu-1}}{\mu(i_\nu)}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\Delta(i_\nu)}{\Delta}\quad(n<s)\\
&P[i_1,\cdots,i_s,i_{s+1},\cdots,i_n]\\
&\quad=\frac{P_0}{s!\,s^{n-s}}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\lambda_{\nu-1}}{\mu(i_\nu)}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\Delta(i_\nu)}{\Delta}\quad(n\geq s)
\end{aligned}\right.$$

式(A)を式(14)に代入することにより，P_0 が決定される．

$$P_0=\Big[\sum_{n=0}^{s-1}\frac{1}{n!}\sum_{\boldsymbol{i}_1\in C\times H\times\boldsymbol{\Gamma}}\ \sum_{\boldsymbol{i}_2\in C\times H\times\boldsymbol{\Gamma}(u_1)}\cdots\sum_{\boldsymbol{i}_n\in C\times H\times\boldsymbol{\Gamma}(u_1+\cdots+u_{n-1})}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\lambda_{\nu-1}}{\mu(\boldsymbol{i}_\nu)}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\Delta(\boldsymbol{i}_\nu)}{\Delta}$$
$$+\frac{1}{s!}\sum_{n=s}^{\infty}\frac{1}{s^{n-s}}\sum_{\boldsymbol{i}_1\in C\times H\times\boldsymbol{\Gamma}}\ \sum_{\boldsymbol{i}_2\in C\times H\times\boldsymbol{\Gamma}(u_1)}\cdots\sum_{\boldsymbol{i}_n\in C\times H\times\boldsymbol{\Gamma}(u_1+\cdots+u_{n-1})}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\lambda_{\nu-1}}{\mu(\boldsymbol{i}_\nu)}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\Delta(\boldsymbol{i}_\nu)}{\Delta}\Big]^{-1} \tag{25}$$

順列 $\pi=[\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_n]$ において，$\boldsymbol{j}$ の出現回数を $N(\boldsymbol{j}|\pi)$ で表し，$N[\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_n]$ を

$$N[\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_n]=\prod_{\boldsymbol{j}\in C\times H\times\boldsymbol{\Gamma}}\{N(\boldsymbol{j}|\pi)!\} \tag{26}$$

と定義する*．組合せによって表示される状態の平衡状態確率は，

$$(\mathrm{B})\ \begin{cases} P(\{\ \},\{\ \})=P_0 \\ P(\{\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_n\},\ \{\ \}) \\ \quad=\dfrac{n!}{N[\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_n]}P[\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_n] \\ \quad=\dfrac{P_0}{N[\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_n]}\displaystyle\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\lambda_{\nu-1}}{\mu(\boldsymbol{i}_\nu)}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\Delta(\boldsymbol{i}_\nu)}{\Delta}\quad(n<s) \\ P(\{\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_s\},\ \{\boldsymbol{i}_{s+1},\cdots,\boldsymbol{i}_n\}) \\ \quad=\dfrac{s!}{N[\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_s]}\cdot\dfrac{(n-s)!}{N[\boldsymbol{i}_{s+1},\cdots,\boldsymbol{i}_n]}P[\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_n] \\ \quad=\dfrac{P_0(n-s)!}{N[\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_s]N[\boldsymbol{i}_{s+1},\cdots,\boldsymbol{i}_n]s^{n-s}} \\ \qquad\cdot\displaystyle\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\lambda_{\nu-1}}{\mu(\boldsymbol{i}_\nu)}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{\Delta(\boldsymbol{i}_\nu)}{\Delta}\quad(n\geq s) \end{cases}$$

となる．

4. 例

下記を仮定する．

（1） 到着率は一定である．すなわち，$\lambda_n=\lambda$ とする．

（2） 資源空間は，$\boldsymbol{\Gamma}=\{x|0\leq x\leq\gamma\ (\text{正整数})\}$ とし，また，どのジョブの資源要求量も1トークンとする．

（3） クラスの集合は，$C=\{1,2,\cdots,K\}$ とし，クラス $c\in C$ のジョブは，フェーズサービス率が $\mu(c)$ の k_c-アーラン分布に従うものとする．ステージは $1,2,\cdots$ と進み，k_c で終わるものとする．

（4） クラス c，ステージ p のジョブは (c,p) で表示する．フェーズ遷移確率は次のごとくである．

$g_{\cdot(c,1)}(=g_{\cdot c})\neq 0$

$g_{\cdot(c,p)}=0\quad(1<p\leq k_c)$

$g_{(c,p)(c,p+1)}=1(1\leq p<k_c)$

$g_{(c,k_c)\cdot}=1$

（5） $C\times H$ の元の排列順は，$(1,1),(1,2),\cdots,(1,k_1),(2,1),\cdots,(K,1),\cdots,(K,k_K)$ とする．

上記の項(5)で定めた $C\times H$ の元の排列順の下で，行列 G_c, $G_{c,p}$, $F^d_{c,p}(c,\ d\in C,\ p\in H)$ を次のように定義すると，Δ および $\Delta(c,p)$ は下記のようになる．

$$G_c=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \mathbf{0} \\ & -1 & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{27}$$

ただし，k_c 行 k_c 列から成る．

$$G_{c,p}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & g_{\cdot c} & & & \\ -1 & \ddots & 0 & & \mathbf{0} & \\ & \ddots\ 1 & \vdots & & & \\ & -1 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & 0 & \\ & \mathbf{0} & \vdots & -1 & \ddots & \\ & & 0 & 0 & \ddots\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{28}$$
$$\qquad\qquad\qquad\widehat{\text{列}\ p}$$

ただし，k_c 行 k_c 列から成る．

$$\qquad\qquad\overset{\text{列}\ p}{\vee}$$
$$F^d_{c,p}=\begin{pmatrix} & g_{\cdot d} & \\ 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{pmatrix} \tag{29}$$

ただし，k_d 行 k_c 列から成る．

$$\Delta=\begin{vmatrix} G_1 & & 0 \\ & G_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & G_K \end{vmatrix}=1 \tag{30}*$$

$$\Delta(c,p)=\begin{vmatrix} G_1 & 0 & F^1_{c,p} & & \\ & \ddots & \vdots & \mathbf{0} & \\ & G_{c-1} & F^{c-1}_{c,p} & & \\ & & G_{c,p} & & \\ \mathbf{0} & & F^{c+1}_{c,p} & G_{c+1} & \\ & & \vdots & 0 & \ddots \\ & & F^K_{c,p} & & G_K \end{vmatrix}$$
$$=g_{\cdot c} \tag{31}*$$

したがって，解は次のとおりである．

$$\begin{cases} P[\ ]=P_0 \\ P[(c_1,p_1),\cdots,(c_n,p_n)] \end{cases}$$

* ただし，$0!=1$ とする．

* 行列式の計算は読者にまかせる．

$$(\mathrm{A}_1)\quad = \begin{cases} \dfrac{P_0\lambda^n}{n!}\prod_{\nu=1}^{n}\dfrac{g._{c_\nu}}{\mu(c_\nu)} & (n<s,\ n\leq\gamma) \\ \dfrac{P_0\lambda^n}{s!s^{n-s}}\prod_{\nu=1}^{n}\dfrac{g._{c_\nu}}{\mu(c_\nu)} & (n\geq s,\ n\leq\gamma) \\ 0 & (n>\gamma) \end{cases}$$

ただし，

$$P_0=\left[\sum_{n=0}^{s-1}\frac{\lambda^n}{n!}\left(\sum_{c=1}^{K}\frac{k_c g._c}{\mu(c)}\right)^n + \frac{\lambda^s}{s!}\left(\sum_{c=1}^{K}\frac{k_c g._c}{\mu(c)}\right)\right]^s \cdot\left\{1-\left(\frac{\lambda}{s}\sum_{c=1}^{K}\frac{k_c g._c}{\mu(c)}\right)^{\gamma-s+1}\right\} \Bigg/ \left\{1-\frac{\lambda}{s}\sum_{c=1}^{K}\frac{k_c g._c}{\mu(c)}\right\}\Bigg]^{-1} \tag{32}$$

とくに，$\gamma=\infty$，$s=\infty$ の場合は，

$$(\mathrm{A}_1')\quad \begin{cases} P_0=\mathrm{Exp}\left(-\lambda\sum_{c=1}^{K}\dfrac{k_c g._c}{\mu(c)}\right) \\ P[(c_1,p_1),\cdots,(c_n,p_n)] \\ \quad =\dfrac{P_0\lambda^n}{n!}\prod_{\nu=1}^{n}\dfrac{g.c_\nu}{\mu(c_\nu)} \quad (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

また，とくに，$\gamma=\infty$，$s=1$ の場合は，

$$(\mathrm{A}_1'')\quad \begin{cases} P_0=1-\lambda\sum_{c=1}^{K}\dfrac{k_c g._c}{\mu(c)} \\ P[(c_1,p_1),\cdots,(c_n,p_n)] \\ \quad =P_0\lambda^n\prod_{\nu=1}^{n}\dfrac{g.c^\nu}{\mu(c_\nu)} \quad (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

後者 ($\gamma=\infty$，$s=1$) の場合，システム内ジョブ数の平均 L は，

$$L=\frac{\lambda\sum_{c=1}^{K}\dfrac{k_c g._c}{\mu(c)}}{1-\lambda\sum_{c=1}^{K}\dfrac{k_c g._c}{\mu(c)}} \tag{33}$$

待ち時間の平均 W は，

$$W=\frac{\sum_{c=1}^{K}\dfrac{k_c g._c}{\mu(c)}}{1-\lambda\sum_{c=1}^{K}\dfrac{k_c g._c}{\mu(c)}} \tag{34}$$

システム内のクラス c のジョブ数の平均 $L^{(c)}$ は，

$$L^{(c)}=\frac{\lambda\dfrac{k_c g._c}{\mu(c)}}{1-\lambda\sum_{d=1}^{K}\dfrac{k_d g._d}{\mu(d)}} \tag{35}$$

クラス c のジョブの待ち時間の平均 $W^{(c)}$ は，

$$W^{(c)}=\frac{\dfrac{k_c}{\mu(c)}}{1-\lambda\sum_{d=1}^{K}\dfrac{k_d g._d}{\mu(d)}} \tag{36}$$

したがって，

$$\frac{W^{(c)}}{W^{(c')}}=\left(\frac{k_c}{\mu(c)}\right)\Bigg/\left(\frac{k_{c'}}{\mu(c')}\right) \tag{37}$$

クラス同士の待ち時間の比は，平均サービス時間の比に等しいことがわかる．このことは，このシステムがすべてのクラスに対して公平なサービスを行うことを表している．

5. おわりに

（1） システムQにおける各クラスのジョブの全サービス時間は，その時間の長さが指数分布に従うフェーズのネットワーク[9]によって与えられるので，その分布は，指数分布，超指数分布，アーラン分布，一定分布，Luchak[10]/Gaver[11] の一般型分布，等を包含する．しかも，クラスによって異なる型の分布が対応することも可能である．

さらに，任意に与えられた密度関数 $f(x)$* を階段関数 $g(x)=f(x_i)$ $(x\in[x_i,\ x_{i+1}),\ x_0(=0)<x_1<x_2<\cdots)$ で近似し，クラスの集合を $C=\{x_0,\ x_1,\cdots\}$ と定義すると，クラス x_i のジョブは到着率 $\lambda g._{x_i}=\lambda f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$ でシステムに入来し，このクラスのジョブはサービス時間が x_i である一定分布に従うように諸パラメータを定めることにより，サービス分布の密度関数が $f(x)$ である場合に対する近似解，また，さらに $\max_i\{x_{i+1}-x_i\}\to 0$ とすることにより精密解が得られる．

たとえば，前章の例において，$\gamma=\infty$，$s=1$ の場合，$K=\infty$ として，クラス i のジョブは全サービス時間が $x_i(=\lim_{k_i\to\infty}[k_i/\mu(i)])$ (ただし，$x_0(=0)<x_1<x_2<\cdots$，$x_{i+1}-x_i=\Delta x$) である一定分布に従うものとすると，サービス時間の分布の密度関数が任意の $f(x)$ で与えられた場合に対する近似が得られる．たとえば，待ち時間の平均は次式で近似される．

$$W=\frac{\sum_{i=0}^{\infty}x_i f(x_i)\Delta x}{1-\lambda\sum_{i=0}^{\infty}x_i f(x_i)\Delta x} \tag{38}$$

さらに，$\Delta x\to 0$ とすると，

$$W=\frac{\int_0^\infty x f(x)dx}{1-\lambda\int_0^\infty x f(x)dx}=\frac{1}{\mu-\lambda} \tag{39}$$

* ただし，広義のリーマン積分 $\frac{1}{\mu}=\int_0^\infty xf(x)dx$ (ただし，$x<0$ ならば $f(x)=0$ とする) が定義されるような関数であるという制限条件を設ける．

を得る．また，サービス時間が x であるジョブの待ち時間の平均 W_x は次のとおり得られる．

$$W_x=\frac{x}{1-\lambda\mu^{-1}} \tag{40}$$

したがって，

$$W_x/W_y=x/y \tag{41}$$

を得る．この結果は，本稿の待合せ規律がこのように最も簡明な形で表せる公平さをもったサービス方法であると一般に（つまり，サービス分布にかかわりなく）いえることを示している．

なお，同じく $\gamma=\infty$，$s=\infty$ の場合も同方法で，一般サービス分布に対するシステム内ジョブ数の分布が

$$P_n=e^{-\frac{\lambda}{\mu}}\cdot\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \tag{42}$$

というように求められる．これは，M/G/∞ システムに対する既存の結果と一致している．

ここで述べた方法は，たとえば，M/G/s（プロセッサシェアリング）の解析を可能ならしめるなど，多くの可能性を妊んでいる．

（2） 受動資源サブシステムにおける多種類のトークンの意味を実際状況に適合するように定めることにより，有用な応用例が多々得られる．たとえば，トークンのプールは通信回線網を表すとするなど[6]．

（3） 能動資源サブシステムが待ち行列網から成る場合の解析へ発展させることも可能である．

参 考 文 献

1) Reiser, M. and Sauer, C. H.: Queueing Network Models: Methods of Solution and Their Program Implementation, in Mani Chandy K. and Yeh, R. T. (eds.), *Current Trends in Programming Methodology*, Vol. III, *Software Modeling*, Chap. 4, pp. 115-167, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1978).
2) 伊澤喜三男：動的再配置の解析とスケジューリングの効果，情報処理学会システム性能評価研究会資料，74-4 (1974).
3) 伊澤喜三男：動的再配置の解析と最適システムの設計，情報処理，Vol. 16, No. 5, pp. 410-418 (1975).
4) 伊澤喜三男：動的再配置系における待ち時間の平均，信学論 (D), 59-D, 2, pp. 77-84 (1976).
5) 伊澤喜三男：記憶空間配分の待ち行列モデル，情報処理，Vol. 19, No. 3, pp. 219-227 (1978).
6) 川口喜三男：資源割当ての待ち行列システムについて，情報処理学会計算機システムの解析と制御，4-2 (1979).
7) Betteridge, T.: An Analytic Storage Allocation Model, *Acta Inf.*, Vol. 3, No. 2, pp. 101-122 (1974).
8) Bryant, R. M. and Agrawala, A. K.: An Evaluation of M/M/R Queues as Finite Memory Size Models of Computer Systems, Computer Performance Evaluation, Proc. 1977 SIGMETRICS/CMG VIII, pp. 43-52 (1977).
9) Cox, D. R.: An Use of Complex Probabilities in the Theory of Stochastic Processes, Proc. Cambridge Phil. Soc., 51, pp. 313-319 (1955).
10) Luchak, G.: The Solution of the Single-Channel Queuing Equations Characterized by a Time-Dependent Poisson-Distributed Arrival Rate and a General Class of Holding Times, *Oper. Res.*, Vol. 4, pp. 711-732 (1956).
11) Gaver, D. P.: The Influence of Servicing Times in Queuing Processes, *Oper. Res.*, Vol. 2, pp. 139-149 (1954).

（昭和58年2月7日受付）
（昭和58年6月20日採録）