ある分割問題の動的計画法による高速アルゴリズム†

岩 根 雅 彦†† 佐 藤 文 孝†††

n 個の要素からなる集合 A の各要素 $a(i)$ に二つの自然数 $s(a(i)), q(a(i))$ が与えられ，また m は与えられた定数とする．そして集合 A の m 個の部分集合 $A(1), A(m)$ を取り出したとき，部分集合 $A(j)$ のなかの $s(a(i))$ の最大のものを $s(j)$, $A(j)$ のなかの $q(a(i))$ の和を $q(j)$ とする．目的関数 $u=s(1)q(1)+s(2)q(2)+\cdots+s(m)q(m)$ を最小にし，$A=A(1)\cup A(2)\cup\cdots\cup A(m)$ となるような m 個の部分集合を求める問題を考える．この問題の最適解の性質を調べて定理としてまとめ，これらの定理から，(1)目的関数の評価回数が $C(n-1, m-1)$ なる問題に変換できること，(2)この変換問題に対して順方向の最適性の原理が成り立つこと，(3)最適解の範囲が限定できることを示した．この変換問題に動的計画法を適用し，さらに最適解の範囲の限定による層別化により，目的関数を多くとも $(m-2)*n**2/2-m*(m-4)*n/2+m*(m**2-6*m+5)/6$ 回 $(m\geq 2)$ 評価するだけで最適解が求まるアルゴリズムを提案した．

1. はじめに

組合せ的な制約条件のもとで，ある目的関数を最小（最大）にする組合せ計画問題[1)~3)]のうちで，ナップザック問題，最短経路問題，巡回セールスマン問題などのいくつかの問題は動的計画法によって効率よく解くことができる[4)]．長さ $a(1), a(2), \cdots, a(n)$ の鋼板において，それぞれ $b(1), b(2), \cdots, b(n)$ 枚の需要が見込まれるとき，ストックしている長さ $d(1), d(2), \cdots, d(m)$ の鋼板1枚から必要な鋼板1枚だけを切り取る条件でむだが最小になるように，鋼板の長さ $d(1), d(2), \cdots, d(m)$ を決める標準化問題を考える．この問題の工学的応用の一つにマイクロプログラム制御計算機におけるマシンサイクル時間の最適化問題がある[7)]．これは，マイクロプログラムを構成している各マイクロ命令の実行時間とその頻度から，平均命令実行時間を最小にするような数種類のマシンサイクル時間を決定する問題である．性能評価のためのいくつかのプログラムを実行したときのマイクロ命令 $a(i)$ の実行時間を $s(a(i))$，その頻度を $q(a(i))$ としたときの，各マイクロ命令 $a(i)$ は異なるマイクロ命令実行時間 $s(a(i))$ をもち n をマイクロ命令の種類とすると，マシンサイクル時間がマイクロ命令実行時間と等しい理想的な平均命令実行時間 $u(n)$ は次式で与えられる．

$$u(n)=\sum_{i=1}^{n} s(a(i))q(a(i))$$

しかし n が大きい場合，n 種類のマシンサイクル時間を実現することは現実的でない．そこで，n 種類のマイクロ命令実行時間のなかから m 種類 $(m\ll n)$ のマシンサイクル時間 $s(j)$ を選んだとき，マイクロ命令実行時間 $s(a(i))$ をもつマイクロ命令 $a(i)$ は，$s(a(i))$ よりも大きいマシンサイクル時間の中の最小のマシンサイクル時間 $s(j)$ で実行される．このときの平均命令実行時間 $u(m)$ は次式で与えられる．

$$u(m)=\sum_{j=1}^{m} s(j)q(j)$$

$$s(j)=\max_{i\in A(j)}(s(a(i))$$

$$q(j)=\sum_{i\in A(j)} q(a(i))$$

ここで，$A(j)$ はマシンサイクル時間 $s(j)$ で実行されるマイクロ命令の集合である．そこで，m が与えられたとき，平均命令実行時間 $u(m)$ が最小となるようなマシンサイクル時間 $s(j)$ を決定することが問題である．なお，この問題では各マイクロ命令が異なるマイクロ命令実行時間をもつとしたが，同じマイクロ命令実行時間をもつマイクロ命令が存在したとき，それらのマイクロ命令実行頻度の和をとって一つのマイクロ命令で代表させることによって同じ問題に帰着できる．

本論文では，この問題を一般化した数学モデル[8)]において順方向の最適性の原理が成立することを示し，動的計画法を適用することによって高速なアルゴリズムが得られることを示す．

2. 定式化と変換問題

自然数 m と n 個の要素 $a(1), a(2), \cdots, a(n)$ からなる集合 A とその要素のおのおのに自然数 $s(a(i)), q(a(i))$

---

† A Fast Algorithm for a Partition Problem Using Dynamic Programming by MASAHIKO IWANE (Department of Information and Control Engineering, Toyota Technological Institute), FUMITAKA SATO (Ome Works, Toshiba Corporation).
†† 豊田工業大学制御情報工学科
††† (株)東芝青梅工場

が与えられており，

$A=A(1)\cup A(2)\cup A(3)\cup\cdots\cup A(m)$

$A(i)\subseteq A,\quad A(i)\neq\phi\quad(i=1,2,\cdots,m)$

$a(i)\neq a(k),\quad s(a(i))\neq s(a(k))\quad(i\neq k)$

$s(j)=\max_{a(i)\in A(j)} s(a(i)),\quad q(j)=\sum_{a(i)\in A(j)} q(a(i))$

とするとき，

目的関数 $u=s(1)q(1)+s(2)q(2)+\cdots+s(m)q(m)$

を最小にする問題に一般化できる．

ここで，u を最小とする A の部分集合族 $A(1), A(2),\cdots,A(m)$ を最適解と呼び，$(A(1),A(2),\cdots,A(m))$ で表すと，この最適解に対して次の定理が成立する．

（定理 1） $(A(1),A(2),\cdots,A(m))$ は集合Aの分割である．

（証明） $(A(1),A(2),\cdots,A(m))$ がAの分割でないと仮定する．すると，$A(i)\cap A(j)\neq\phi$ となるような部分集合 $A(i),A(j)$ が存在する．$a(k)\in A(i)\cap A(j)$ なる要素 $a(k)$ が存在し，$a(k)$ を $A(i)$ から除いた部分集合を $A'(i)$ とする．そして $A(1),A(2),\cdots,A(m)$ に対する目的関数値を u, $A(1),\cdots,A(i-1),A'(i),A(i+1),\cdots,A(m)$ に対する目的関数値を u' とする．$u>s(1)q(1)+s(2)q(2)+\cdots+s(m)q(m)-s(i)q(a(k))=u'$ となり，uが最小値であることに矛盾する．ゆえに $(A(1),A(2),\cdots,A(m))$ はAの分割である． （証明終）

（定理 2） $(A(1),A(2),\cdots,A(m))$ の任意の二つの部分集合を $A(k),A(l)$ とすると，$\forall a(i)\in A(k),\forall a(j)\in A(l)[s(a(i))<s(a(j))]$，または $\forall a(i)\in A(k),\forall a(j)\in A(l)[s(a(i))>s(a(j))]$ が成立する．

（証明） (1) $s(k)<s(l)$ の場合．$s(a(j))<s(k)$ なる $a(j)\in A(l)$ が存在すると仮定する．この $a(j)$ を $A(l)$ から $A(k)$ に移した部分集合を $A'(k),A'(l)$ とする．$A(1),\cdots,A(m)$ に対する目的関数値を u, $A(1),\cdots,A(k-1),A'(k),A(k+1),\cdots,A(l-1),A'(l),A(l+1),\cdots,A(m)$ に対する目的関数値を u' とする．すると，$u-u'=s(k)q(k)+s(l)q(l)-(s(k)(q(k)+q(a(j)))+s(l)(q(l)-q(a(j))))=(s(l)-s(k))q(a(j))$．ところで $s(k)<s(l)$ であるので，$u>u'$ となりuが最小値であることに矛盾．ゆえに任意の $a(j)\in A(l)$ に対して $s(a(j))>s(k)$ である．(2) $s(k)>s(l)$ の場合も (1) と同様に任意の $a(i)\in A(k)$ に対して $s(a(i))>s(l)$ である．(3) $s(k)=s(l)$ の場合は $s(a(i))\neq s(a(j))\quad(i\neq j)$ であるので，存在しない．ゆえに (1), (2), (3) より定理2は成立． （証明終）

元の問題は要素 $a(i)$ を $s(a(i))$ の小さい順に並べた集合Aを目的関数uが最小となるように $m-1$ 個の仕切を入れて分割する問題に変換できる．この仕切を入れて分割する問題を変換問題と呼ぶことにする．

ここで目的関数uを評価する回数を調べてみる．元の問題において，目的関数uの評価回数は，n 種類の区別できる要素をm個の区別できない箱に空箱ができないように入れる入れ方と同じであり，その数は次式で与えられるスターリング数 $s(n,k)$[6] である．

$s(n+1,k)=s(n,k-1)+ks(n,k)\quad(1<k<n)$

$s(n,1)=s(n,n)=1$

一方変換問題において，評価回数は，$s(a(i))$ の小さい順に並べた集合Aに $m-1$ 個の仕切を入れる入れ方と同じで $C(n-1,m-1)$ である．そこで，以後の議論では $s(a(i))<s(a(j))\quad(i<j)$ と仮定した変換問題を取り扱う．

3. 動的計画法

この変換問題に動的計画法[5] を適用するために準備する．

（定理 3） $(A(1),A(2),\cdots,A(m))$ の任意の二つの部分集合 $A(i),A(j)$ において $s(i)<s(j)\quad(i<j)$ とする．$(A(1),A(2),\cdots,A(m))$ のなかのk個の部分集合 $A(i_1),A(i_2),\cdots,A(i_k)$ をとる．この部分集合の和集合 $B=A(i_1)\cup A(i_2)\cup\cdots\cup A(i_k)$ を目的関数uが最小となるようにk分割するとき，このときの最適解を $(B(1),B(2),\cdots,B(k))$ とすると，$B(1)=A(i_1), B(2)=A(i_2),\cdots,B(k)=A(i_k)$ である．

（証明） $A(i_1),A(i_2),\cdots,A(i_k)$ が集合Bをk分割したときの最適解でないと仮定する．すると集合Bをk分割したときの最適解 $(A'(i),A'(i_2),\cdots,A'(i_k))$ が別に存在する．$A(1),A(2),\cdots,A(m)$ に対する目的関数値を $u(1)$, $A(i_1),A(i_2),\cdots,A(i_k)$ に対する目的関数値を $u(2)$, $A'(i_1),A'(i_2),\cdots,A'(i_k)$ に対する目的関数値を $u(3)$, $A(1),A(2),\cdots,A(i_1-1),A'(i_1),A'(i_2),\cdots,A'(i_k),A(i_k+1),\cdots,A(m)$ に対する目的関数値を $u(4)$ とする．

$$u(1)=s(1)q(1)+\cdots+s(i_1-1)q(i_1-1)+u(2)+s(i_k+1)q(i_k+1)+\cdots+s(m)q(m)$$

$$u(4)=s(1)q(1)+\cdots+s(i_1-1)q(i_1-1)+u(3)+s(i_k+1)q(i_k+1)+\cdots+s(m)q(m)$$

仮定より，$u(3)$ は最小値であるので，$u(3)\leq u(2)$ である．ゆえに $u(4)\leq u(1)$ となる．ところが $u(1)$ は最小値であるにもかかわらず，$u(4)$ が存在することになり矛盾する．よって $A(i_1),A(i_2),\cdots,A(i_k)$ が最適解で

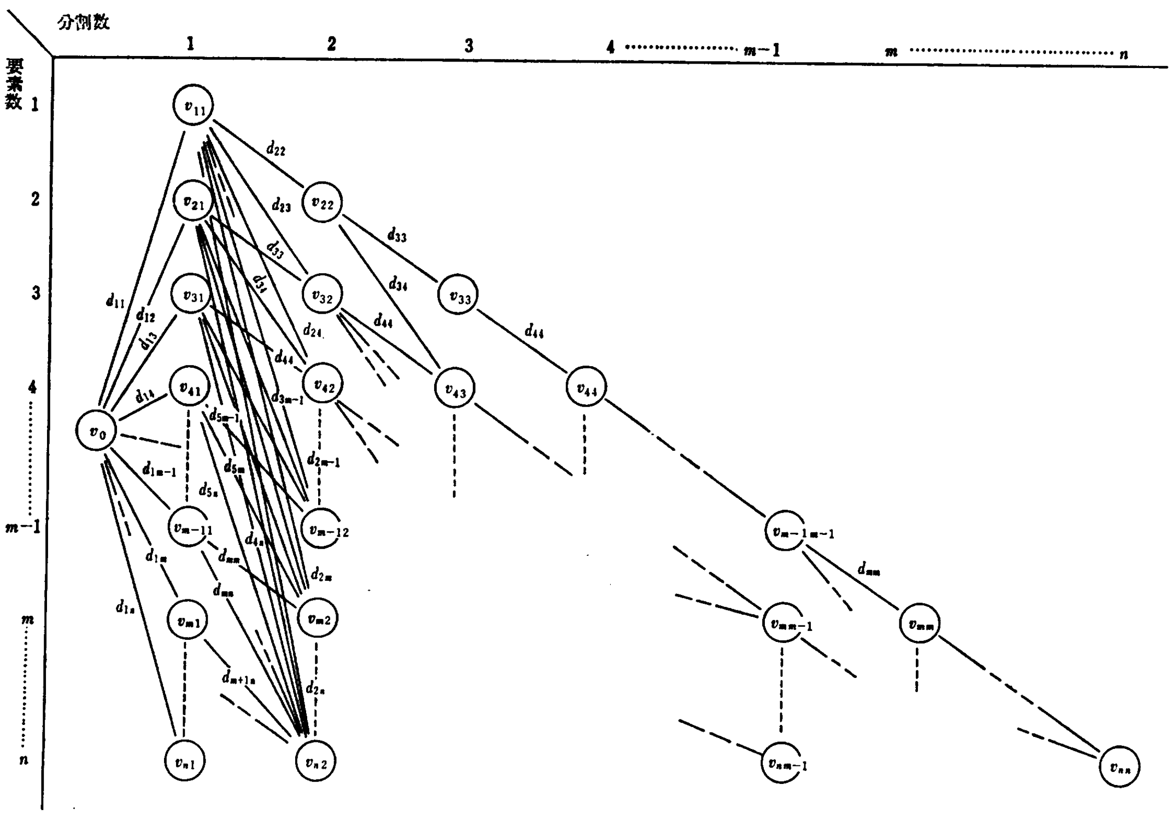

図 1 N段ネットワーク
Fig. 1 N stages network.

ある.　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

以後の議論において，定理3の記述の中で明示したように，$(A(1), A(2), \cdots, A(m))$ の任意の二つの部分集合 $A(i), A(j)$ をとったとき $s(i)<s(j)$ $(i<j)$ であるとする.

さて，任意の集合の要素数 n と分割数 m について定理3が成立するので，分割数を各段にとった**図1**に示す多段ネットワークを考える．図1において，各頂点 $v(j, k)$ は j 個の要素からなる集合を目的関数 u が最小となるように k $(k\leq j)$ 分割した状態，各辺はある頂点から他の頂点に移るときの目的関数値の増分とする．そして各頂点における目的関数値を $u(j, k)$，各辺に与えられた増分を $d(l, j)$ とおくことによって，次の漸化式と初期条件が導かれる．ここで各段のどの辺を選ぶかを「決定」，その結果得られる始点からの路を「方策」，各頂点を「状態」とみなすと，順方向の最適性の原理が成立していることは明らかである.

$$u(j, 1)=d(1, j)$$

$$u(j, k)=\min_{k\leq l\leq j}[u(l-1, k-1)+d(l, j)]$$

$$d(l, j)=s(a(j))(q(a(l))+q(a(l+1))+\cdots+q(a(j)))$$

$$(j=1, 2, \cdots, n\ ;\ k=2, 3, \cdots, m\ ;\ j\geq k)$$

ゆえに，多段ネットワークの最短路問題を順方向最適性の原理を具現化した動的計画法によるものと同じ手法により，この問題を解くことができる.

次に目的関数 $u(j, k)$ の右辺の評価回数は，第1段では n 回，第 k 段では $(1+2+\cdots+(n-k+1))$ 回 $(k=2, 3, \cdots, m-1)$，第 m 段では $n-m+1$ 回の評価が必要であるので，全体の評価回数 T は次式となる.

$$T=n+\sum_{k=2}^{m-1}(1+2+\cdots+(n-k+1))+(n-m+1)$$

$$=(m-2)*n**2/2-m*(m-4)*n/2$$

$$+m*(m**2-6*m+5)/6$$

4. 層　別　化

動的計画法の適用によって，目的関数の評価回数は $c(n-1, m-1)$ から T に削減できた．ここでは最適解の範囲を限定することによって評価回数をもっと少な

くする．そのための準備を行う．

(定理 4)　$(A(1), A(2), \cdots, A(m))$ のなかの $k-1$ 個の部分集合 $A(i), A(i+1), \cdots, A(i+k-2)$ と $A'(i+k-1) \subseteq A(i+k-1)$ なる部分集合 $A'(i+k-1)$ をとる．これらの部分集合の和集合 $B=A(i) \cup A(i+1) \cup \cdots \cup A(i+k-2) \cup A'(i+k-1)$ を目的関数 u が最小となるように k 分割するとき，$s(B(k-1))<s(A(i+k-2))$ を満たす最適解 $B(1), B(2), \cdots, B(k)$ が存在する．

ここで，$s(B(k-1))=\max_{a(i) \in B(k-1)} s(a(i))$,

$s(A(i+k-2))=\max_{a(i) \in A(i+k-2)} s(a(i))$ とする．

(証明)　B を k 分割したときのどんな最適解も $s(B(k-1)) \leq s(A(i+k-2))$ を満たさないと仮定する．

部分集合 $A(i), \cdots, A(i+k-2), A(i+k-1)$ に対する目的関数値を $u(1)$, $B(1), \cdots, B(k-1), B(k)$ に対する目的関数値を $u(2)$, $A(i), \cdots, A(i+k-2), A'(i+k-1)$ に対する目的関数値を $u(3)$, $B(1), \cdots, B(k-1), B'(k)$, $(B'(k)=B(k) \cup (A(i+k-1)-A'(i+k-1)))$ に対する目的関数値を $u(4)$ とする．そして，

$$q(B(j))=\sum_{a(i) \in B(j)} q(a(i)),$$

$$q(A(j))=\sum_{a(i) \in A(j)} q(a(i))$$

とすると，

$$\begin{aligned} u(1)=u(3)&+(s(A(i+k-1)) \\ &-s(A'(i+k-1)))q(A'(i+k-1)) \\ &+s(A(i+k-1))(q(A(i+k-1)) \\ &-q(A'(i+k-1))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(4)=u(2)&+(s(B'(k))-s(B(k)))q(B(k)) \\ &+s(B'(k))(q(B'(k))-q(B(k))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &u(1)-u(4) \\ &=u(3)-u(2)+s(A(i+k-1))q(A(i+k-1)) \\ &\quad -s(B(k))q(A'(i+k-1)) \\ &\quad +s(B(k))q(B(k))-s(B'(k))q(B'(k)) \end{aligned}$$

ところで，$A(i+k-1)-B'(k)=A'(i+k-1)-B(k)$, $s(B'(k))=s(A(i+k-1))$, $s(A'(i+k-1))=s(B(k))$ であるので，上式は次のように変形できる．

$$\begin{aligned} u(1)-u(4)=u(3)-u(2)&+(s(A(i+k-1)) \\ &-s(B(k)))(q(A'(i+k-1))-q(B(k))) \end{aligned}$$

ところが仮定より $s(B(k-1))>s(A(i+k-2))$ であるので，$B(k) \subseteq A'(i+k-1) \subseteq A(i+k-1)$ となり，$s(A(i+k-1))-s(B(k)) \geq 0$, $q(A'(i+k-1))-q(B(k)) \geq 0$, また，$u(3)-u(2) \geq 0$ であるので，$u(1) \geq u(4)$ となり，$u(1)$ が最小値であることに矛盾する．

ゆえに，$s(B(k-1)) \leq s(A(i+k-2))$ である．

(証明終)

$(A(1), A(2), \cdots, A(m))$ の任意の部分集合 $A(j)$ のすべての要素を $s(a(j_k))$ の小さい順に並べると $a(j_1)$, $a(j_2), \cdots, a(j_l)$ であるとする．$A(j)$ の部分集合 $A'(j)$ を考えるとき，$a(j_k), a(j_{k+1}), \cdots, a(j_l)$ からなる部分集合を上に隣接しているとよぶことにする．

(定理 5)　$(A(1), A(2), \cdots, A(m))$ のなかの $k-1$ 個の部分集合 $A(i-k+2), A(i-k+3), \cdots, A(i)$ と $A'(i-k+1) \subseteq A(i-k+1)$ なる上に隣接した部分集合 $A'(i-k+1)$ をとる．これらの部分集合の和集合 $B=A'(i-k+1) \cup A(i-k+2) \cup \cdots \cup A(i)$ を目的関数 u が最小となるように k 分割するとき，$s(A(i-k+1)) \leq s(B(i-k+1))$ を満たす最適解 $B(i-k+1), B(i-k+2), \cdots, B(i)$ が存在する．

(証明)　定理 4 と同様に証明できる．　(詳細略)

(定理 6)　集合 A を目的関数 u が最小となるように m 分割したときの最適解 $(A(1), A(2), \cdots, A(m))$ において，A を同様に $m+1$ 分割したとき，$s'(1) \leq s(1) \leq s'(2) \leq s(2) \leq \cdots \leq s'(m-1) \leq s(m-1) \leq s'(m) \leq s(m)=s'(m+1)$ を満たす最適解 $(A'(1), \cdots, A'(m), A'(m+1))$ が存在する．

(証明)　i 個の部分集合 $A(1), A(2), \cdots, A(i)$ の和集合 $B(i)=A(1) \cup \cdots \cup A(i-1) \cup A(i)$ と i 個の部分集合の和集合 $C(i)=A'(1) \cup \cdots \cup A'(i-1) \cup A'(i)$ を考える．ただし $i \leq m$ とする．集合 $B(m), C(m)$ をおのおの目的関数 u が最小になるように m 分割すると，$s'(m) \leq s(m)$ であるので定理 4 より $s'(m-1) \leq s(m-1)$ である．次に集合 $B(m-1), C(m-1)$ を同様に $m-1$ 分割すると，$s'(m-1) \leq s(m-1)$ であるので定理 4 より $s'(m-2) \leq s(m-2)$ である．以下同様に $s'(m-3) \leq s(m-3)$, $s'(m-4) \leq s(m-4), \cdots, s'(2) \leq s(2)$, $s'(1) \leq s(1)$ である．次に i 個の部分集合 $A(m-i+1), A(m-i+2), \cdots, A(m-1), A(m)$ の和集合 $D(i)=A(m-i+1) \cup A(m-i+2) \cup \cdots \cup A(m)$ と i 個の部分集合 $A'(m-i+2), \cdots, A'(m), A'(m+1)$ の和集合 $E(i)=A'(m-i+2) \cup \cdots \cup A'(m) \cup A'(m+1)$ を考える．ただし $1 \leq i \leq m$ とする．集合 $D(m), E(m)$ をおのおの目的関数 u が最小になるように m 分割すると，定理 5 より，$s(1) \leq s'(2)$ である．次に集合 $D(m-1), E(m-1)$ を $m-1$ 分割すると $s(1) \leq s'(2)$ であるので定理 5 より $s(2) \leq s'(3)$ である．以下同様に，$s(3) \leq s'(4)$, $s(4) \leq s'(5), \cdots, s(m-2) \leq s'(m-1)$, $s(m-1) \leq s'(m)$ である．ゆえに $s'(1) \leq s(1) \leq s'(2) \leq s(2) \leq \cdots \leq s'(m-1) \leq s(m-1) \leq s'(m) \leq s(m)=s'(m+1)$ である．　(証明終)

すると定理6により，集合Aを目的関数uが最小となるようにm分割したときの最適解から $m+1$ 分割したときの最適解の範囲が限定できるので漸化式の評価回数を減少することができる.

5. アルゴリズムと数値例

層別化により最適解の範囲を限定した動的計画法によるアルゴリズムを次に示す.

```
10  begin
20    Aの要素を s(a(i)) の小さい順に並べかえ
30    それを a(1), a(2), …, a(n) とする.
40    for j=1 until n do u(j, 1)=s(a(j)) [q(a(1)
50        )+q(a(2))+…+q(a(j))]
60    for k=2 until m do
70      begin if k=m then k1=n else k1=k;
80        for j=k1 until n do
90          begin for l=k until j do
100         begin if a(1), a(2), …, a(l−1) の要素の
110           k−1 分割の最適解に部分集合
120           {(a(l), a(l+1), …, a(j)} を追加した解
130           と, a(1), …, a(j) の k−1 分割の
140           最適解の間に定理6が成立 then
150             begin d(l, j)=s(a(j))[q(a(l)+q(a(l
160               +1)+…+q(a(j))];
170               v(l−k)=u(l−1, k−1)+d(l, j)
180             end
190         end
200         u(j, k)=min[v(0), v(1), …, v(j−k)]
210       u(j, k) に対応する最適解を記憶する.
220     end
230   end
240 end
```

20〜30行は元の問題を変換問題にかえる，60〜230行は順方向の最適性の原理による動的計画法の本体である．とくに100〜140行は層別化による目的関数の評価回数削減のためにある.

表1に示した数値例で目的関数uを最小にするような3分割を上記アルゴリズムに従ってもとめる.

$u(1,1)=1,\ u(2,1)=6,$

$u(3,1)=18,\ u(4,1)=40,$

$u(5,1)=75,\ u(6,1)=114,$

$u(7,1)=154,\ u(8,1)=192,$

$u(2,2)=5:\ \{a(1)\},\ \{a(2)\}$

$u(3,2)=\min(16,15):\ \{a(1),a(2)\},\ \{a(3)\}$

表1 数値例
Table 1 An example.

	$a(1)$	$a(2)$	$a(3)$	$a(4)$	$a(5)$	$a(6)$	$a(7)$	$a(8)$
$s(a(i))$	1	2	3	4	5	6	7	8
$q(a(i))$	1	2	3	4	5	4	3	2

$u(4,2)=\min(37,34,34):\ \{a(1),a(2)\},\ \{a(3),a(4)\}$
または $\{a(1),a(2),a(3)\},\ \{a(4)\}$

$u(5,2)=\min(71,66,63,65):\ \{a(1),a(2),a(3)\},\ \{a(4),a(5)\}$

$u(6,2)=\min(109,102,96,94,99):\ \{a(1),a(2),a(3),a(4)\},\ \{(a(5),a(6)\}$

$u(7,2)=\min(148,139,130,124,124,135):\ \{a(1),a(2),a(3),a(4)\},\ (a(5),a(6),a(7)\}$ または $\{a(1),a(2),a(3),a(4),a(5)\},\ \{a(6),a(7)\}$

$u(8,2)=\min(185,174,162,152,147,154,170):\ \{a(1),a(2),a(3),a(4),a(5)\},\ \{a(6),a(7),a(8)\}$

$u(8,3)=\min(\underline{173,159,146,}\ 135,134,140):\ \{a(1),a(2),a(3),a(4)\},\ \{a(5),a(6)\},\ \{a(7),a(8)\}$

以上の計算によって，3分割のときの最適解は$\{a(1),a(2),a(3),a(4)\}$，$\{a(5),a(6)\}$，$\{a(7),a(8)\}$ で目的関数値は134である．なお，$u(8,3)$ を求める式の下線部分は層別化によりこのアルゴリズムでは目的関数の評価から省略すべき部分であるが，あったほうが理解しやすいので計算に加えた.

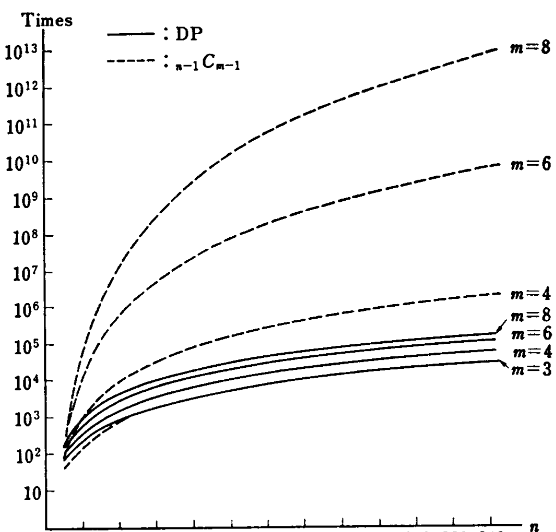

図2 DPと組合せ法の計算回数の比較
Fig. 2 Comparison of computational times between DP and combinational method.

この例では，目的関数 $u(j,k)$ の右辺の評価回数は，層別化したときは39回，しないときは42回である．一方，仕切を入れる組合せ法における目的関数 u の評価回数は $C(7,2)=21$ 回である．しかし，n, m と評価回数の関係を**図2**で示したように，$n \gg m > 3$ のときには動的計画法が少ない評価回数ですむことがわかる．

6. むすび

目的関数 u が最小になるように集合 A を m 分割する問題において，最適解の性質を調べて定理としてまとめ，この定理に基づく高速アルゴリズムを提案した．これらの定理より元の問題を変換問題として扱うことができ，各要素を $s(a(i))$ の小さい順に並べかえることによって目的関数の評価回数がスターリング数 $s(n,m)$ から組合せ $c(n-1,m-1)$ に削減できた．また定理より，変換問題は，ネットワークの最短路問題に順方向の最適性の原理を適用した動的計画法と同一手法で最適解を求めることができ，このときの評価回数は T となった．さらに，最適解の範囲を限定することにより，T 回以下の評価回数で最適解が求まることが判明した．この問題に対して計算量の下界を求めることが今後の課題である．

謝辞 最後に本研究を遂行するにあたり，ご助言を賜った京都大学萩原 宏教授に深く感謝いたします．

参考文献

1) Aho, A.V., Hopcroft, J.E. and Ullman, J.D.: *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Addison-Wesley, Reading (1974).
2) Reingold, E.M., Nievergelt, J. and Deo, N.: *Combinatorial Algorithms*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1977).
3) Weide, B.: A Survey of Analysis Techniques for Discrete Algorithms, *Comput. Surv.*, Vol. 9, No. 4, pp. 291-313 (1977).
4) Garey, M.R. and Johnson, D.S.: *Computers and Intractability*, W.H. Freeman and Company, San Francisco (1979).
5) Bellman, R.E. and Dreyfus, S.E.: *Applied Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton (1962).
6) C. ベルジュ (野崎昭弘訳)：組合わせ論の基礎，サイエンス社，東京 (1973).
7) 岩根，佐藤，溝口：マイクロ命令実行時間分布に基ずく最適マシンサイクル時間決定法，信学論 (D) J 63-d, No. 12, pp. 1050-1057 (1980).
8) 岩根，佐藤：ある分割問題におけるアルゴリズム，情報処理学会27回全国大会，pp. 3-4 (1983).

(昭和58年11月15日受付)
(昭和59年9月20日採録)