

距離遺伝 2 部グラフの変型ガロア束のサイズについて

大月 英明^{1,a)} 平田 富夫^{2,b)}

概要: 我々は一般の 2 部グラフに対して変型ガロア束を定義し, ドミノフリーグラフを真に含むグラフクラスに対し, 2 部クリーク被覆問題が多項式時間で解けることを示した. ここでは頂点数 n の距離遺伝 2 部グラフ B に対する変型ガロア束 $G_m(B)$ のサイズを評価する. 具体的には $G_m(B)$ の頂点数と辺数は, それぞれ $3n/2 + 1$ 以下と $5n/2 - 2$ 以下であることを示す.

キーワード: 距離遺伝 2 部グラフ, 変型ガロア束, 辺分割問題

The Size of the Modified Galois Lattice of Bipartite Distance Hereditary Graphs

HIDEAKI OTSUKI^{1,a)} TOMIO HIRATA^{2,b)}

Abstract: We defined a modified Galois lattice of general bipartite graphs, and showed that the biclique edge cover problem can be solved in polynomial time for the graph class that properly include the domino-free graph class. In this paper, we estimate the size of the modified Galois lattice $G_m(B)$ of a distance hereditary bipartite graph B with n vertices. Specifically, the size of vertices and edges of $G_m(B)$ are at most $3n/2 + 1$ and $5n/2 - 1$ respectively.

Keywords: bipartite distance-hereditary graph, modified Galois lattice, edge-partition problem

1. はじめに

一般の 2 部グラフに関して, その 2 部クリーク辺被覆問題は NP 困難問題であることが知られている [5] [7]. しかし, C_4 フリーグラフ, 距離遺伝 2 部グラフ [6] やドミノフリーグラフ [1], さらに路重複数 $R(B) \leq 1$ [8] の 2 部グラフの場合は, 最小 2 部クリーク辺被覆問題が多項式時間で解けることが示されている. ドミノフリーグラフ, 及び路重複数 $R(B) \leq 1$ の 2 部グラフに対する多項式時間アルゴリズムは, B の極大 2 部クリーク集合の束を用いているため, この束のサイズが計算時間に影響する.

ここでは, B が頂点数 n の連結な距離遺伝 2 部グラフのとき, 論文 [8] で導入された, 変型ガロア束 $G_m(B)$ のサイズについて評価する. 具体的には $G_m(B)$ の頂点数は

$3n/2 + 1$ 以下であり, 辺数は $5n/2 - 2$ 以下であることを示す. なお, 最近, 距離遺伝 2 部グラフ B の極大 2 部クリークの数, 高々 $n - 1$ 個であることが示された [2].

2. 定義

ここで取り扱うグラフはすべて 2 部グラフである. $B = (X_B, Y_B, E_B)$ を, 頂点集合 $X_B \cup Y_B$ と辺集合 $E_B \subseteq X_B \times Y_B$ からなる 2 部グラフとする. $X_B = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_x}\}$, $Y_B = \{y_1, y_2, \dots, y_{n_y}\}$ とし, $n = n_x + n_y$, $m = |E_B|$ とする. 頂点 $v \in X_B \cup Y_B$ の B における隣接頂点の集合を $N_B(v)$ と表記する. B の部分グラフ $K = (X_K, Y_K, X_K \times Y_K)$ を (B の) 2 部クリークと呼ぶ. $E_B = \bigcup_{i=1}^s E_{K_i}$ なる B の 2 部クリークの集合 $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_s\}$ を B の 2 部クリーク辺被覆と呼ぶ. 最小 2 部クリーク辺被覆問題は, 最小サイズの 2 部クリーク辺被覆を求める問題である.

K が B の極大 2 部クリークであるとは, B の 2 部ク

¹ 南山大学理工学部
² 名古屋大学情報科学研究科
^{a)} otsuki@nanzan-u.ac.jp
^{b)} hirata@is.nagoya-u.ac.jp

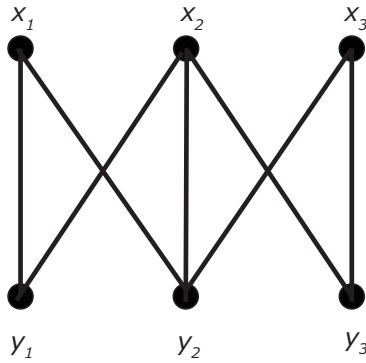


図 1 ドミノ (X_d, Y_d, E_d)

リーク $K' (\neq K)$ で, $E_K \subseteq E_{K'}$ を満たすものが存在しないときをいう. $|X_K| = 1$ または $|Y_K| = 1$ のとき, K は星グラフである. $|X_K| = 1$ のとき, $x \in X_K$ を星グラフ K の中心と呼ぶ. $|Y_K| = 1$ のときも同様である. $x_i \in X_B$ に対して, x_i を中心とする極大星グラフを X_i と表す. 同様に $y_j \in Y_B$ に対して y_j を中心とする極大星グラフを Y_j と表す.

距離遺伝 2 部グラフとは, そのすべての連結な誘導部分グラフにおいて, 頂点間の距離が, 元のグラフの距離と等しいような 2 部グラフである [3]. すなわち, 距離遺伝 2 部グラフでは, 任意の頂点とその接続辺を削除しても, 残ったそれぞれの連結グラフ内において, 頂点間の距離は元のグラフの距離と等しい.

以下の頂点集合 X_d, Y_d と辺集合 E_d からなる 2 部グラフ $B_d = (X_d, Y_d, E_d)$ をドミノと呼ぶ (図 1).

$$\begin{aligned} X_d &= \{x_1, x_2, x_3\}, Y_d = \{y_1, y_2, y_3\}, \\ E_d &= \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \\ &\quad (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_3), (x_3, y_2)\}. \end{aligned}$$

ドミノフリーグラフとは, その誘導部分グラフとしてドミノを含まないグラフである. 距離遺伝 2 部グラフは, ドミノフリーグラフのサブクラスである [4]. よって距離遺伝 2 部グラフはドミノを誘導部分グラフとして持たない.

3. 変型ガロア束 $G_m(B)$

$\mathcal{K}_M(B) = \{K_1, K_2, \dots, K_s\}$ を 2 部グラフ B のすべての極大 2 部クリークからなる集合とする. $\mathcal{K}_M(B)$ 上に, 半順序 $<$ を以下のように定義する. $K_p, K_q \in \mathcal{K}_M(B)$ に対し, $Y_{K_p} \subset Y_{K_q}$ のとき, またそのときに限り $K_p < K_q$ であるとする. さらに, $\mathcal{K}_M(B)$ のすべての要素 K に対して, $K < \top$ であるような要素 $\top$ と, $\perp < K$ であるような要素 $\perp$ を加え, $\mathcal{K}_M(B) \cup \{\top, \perp\}$ のハッセ図を $G(B)$ とする. つまり, $G(B)$ は $\mathcal{K}_M(B) \cup \{\top, \perp\}$ の要素を頂点とし, $K_p < K_q$ かつ, $K_p < K_m < K_q$ なる K_m が存在しないときに, K_q から K_p に向う有向辺を置いたグラフである. $G(B)$ を B のガロア束と呼ぶ [1]. Amilhastre

et al. [1] は, ドミノフリーグラフの 2 部クリーク辺被覆問題, および 2 部クリーク分割問題に対し, ガロア束を用いた多項式時間アルゴリズムを与えた.

Otsuki and Hirata[8] は, ガロア束を拡張した変型ガロア束を定義し, ドミノフリーグラフを真に含むグラフクラスに対し, 2 部クリーク被覆問題の多項式時間アルゴリズムを与えた. 変型ガロア束 $G_m(B)$ は 2 部グラフ B から以下のように定義される. $\mathcal{X}_s(B) = \{X_1, X_2, \dots, X_{n_x}\}$, $\mathcal{Y}_s(B) = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_y}\}$ とする. B の部分グラフの集合 $\mathcal{K}_M^s(B) \equiv \mathcal{K}_M(B) \cup \mathcal{X}_s(B) \cup \mathcal{Y}_s(B)$ 上に, 半順序 $<$ を以下のように定義する. $K_p, K_q \in \mathcal{K}_M^s(B)$ に対し, $Y_{K_p} \subseteq Y_{K_q}$ かつ $X_{K_q} \subseteq X_{K_p}$ のとき, かつその時に限り $K_p < K_q$ とする. $\mathcal{K}_M^s(B)$ のすべての要素 K に対して, $K < \top$ であるような要素 $\top$ と, $\perp < K$ であるような要素 $\perp$ を加えた集合 $\mathcal{K}_M^s(B) \cup \{\top, \perp\}$ のハッセ図を $G_m(B)$ とする. $G_m(B)$ を B の変型ガロア束と呼ぶ.

4. 変型ガロア束 $G_m(B)$ のサイズ

4.1 変型ガロア束 $G_m(B)$ の性質

ここでは 2 部グラフ B の変型ガロア束 $G_m(B)$ の性質を述べる.

性質 1. B を 2 部グラフとする. 相異なる 2 つの $K_1, K_2 \in \mathcal{M}(B)$ に対して, $X_{K_1} \subset X_{K_2} \iff Y_{K_2} \subset Y_{K_1}$ が成り立つ.

証明. $X_{K_1} \subset X_{K_2}$ のとき $Y_{K_2} \not\subset Y_{K_1}$ であると仮定する. このとき $y \in Y_{K_2}$ かつ $y \notin Y_{K_1}$ なる y が存在する. すべての $x \in X_{K_2}$ に対し $y \in Y_{K_2}$ は $(x, y) \in E_{K_2} \subseteq E_B$ を満たす. $X_{K_1} \subset X_{K_2}$ より $K_3 = (X_{K_1}, Y_{K_1} \cup \{y\}, X_{K_1} \times (Y_{K_1} \cup \{y\}))$ なる, B の極大 2 部クリーク K_3 が存在する. これは K_1 が極大 2 部クリークであることに反する. $\square$

B の極大 2 部クリークで星グラフでないものの集合を $\mathcal{M}(B)$ とする. つまり $\mathcal{M}(B) = \mathcal{K}_M(B) \setminus (\mathcal{X}_s(B) \cup \mathcal{Y}_s(B))$ である. $\mathcal{M}(B)$ の要素 K で, $K < K'$ なる $K' \in \mathcal{M}(B)$ が存在しないようなものの集合を $\mathcal{M}_a(B)$ とする. つまり, $\mathcal{M}_a(B)$ は $\mathcal{M}(B)$ において極大な要素の集合である. $K' < K$ なる $K' \in \mathcal{M}(B)$ が存在しないような K の集合を $\mathcal{M}_i(B)$ とする. つまり, $\mathcal{M}_i(B)$ は $\mathcal{M}(B)$ において極小な要素の集合である.

性質 2. B を 2 部グラフとする. 相異なる 2 つの $K_1, K_2 \in \mathcal{M}(B)$ に対して, $K_1, K_2 \in \mathcal{M}_a(B)$ (または $K_1, K_2 \in \mathcal{M}_i(B)$) ならば, $X_{K_1} \not\subset X_{K_2}$, $X_{K_2} \not\subset X_{K_1}$, $Y_{K_1} \not\subset Y_{K_2}$ かつ $Y_{K_2} \not\subset Y_{K_1}$ が成り立つ.

証明. $K_1, K_2 \in \mathcal{M}_a(B)$ とする. $K_1 \in \mathcal{M}_a(B)$ なので, $K_1 < K$ なる $K \in \mathcal{M}(B)$ は存在しない. よって, $X_{K_2} \not\subset X_{K_1}$ である. 性質 1 より, $Y_{K_1} \not\subset Y_{K_2}$ である. K_2

についても同様に $X_{K_1} \not\subset X_{K_2}$ と $Y_{K_2} \not\subset Y_{K_1}$ がいえる。 $K_1, K_2 \in \mathcal{M}_i(B)$ の場合も同様である。 $\square$

性質 3. B を 2 部グラフとする。相異なる 2 つの $K_1, K_2 \in \mathcal{M}(B)$ に対して、 $K_1, K_2 \in \mathcal{M}_a(B)$ ならば $|X_{K_1} \cap X_{K_2}| \leq 1$ が成り立つ。また $K_1, K_2 \in \mathcal{M}_i(B)$ ならば $|Y_{K_1} \cap Y_{K_2}| \leq 1$ が成り立つ。

証明. $K_1, K_2 \in \mathcal{M}_a(B)$ とする。 $\{x_i, x_j\} \subseteq X_{K_1} \cap X_{K_2}$ と仮定する。このとき $Y_{K_1}, Y_{K_2} \subset N_B(x_i)$ かつ $Y_{K_1}, Y_{K_2} \subset N_B(x_j)$ が成り立つ。したがって、 $\{x_i, x_j\} \subseteq X_K$ かつ $Y_{K_1} \cup Y_{K_2} \subseteq Y_K$ なる $K \in \mathcal{M}$ が存在する。半順序 $<$ の定義より $K_1, K_2 < K$ であり、 $K_1, K_2 \in \mathcal{M}_a(B)$ に反する。 $K_1, K_2 \in \mathcal{M}_i(B)$ の場合も同様である。 $\square$

4.2 距離遺伝グラフ B に対する $G_m(B)$ のサイズ

ここでは、ドミノフリーグラフのサブクラスである距離遺伝グラフ B について、その変型ガロア束 $G_m(B)$ のサイズを評価する。具体的には B の頂点数を n としたとき、 $|V(G_m(B))| \leq 3n/2 + 1$ であることを証明する。 $|V(G_m(B))| = |\mathcal{M}(B)| + n + 2$ なので、以下では $|\mathcal{M}(B)| \leq n/2 - 1$ を示す。

B を連結な距離遺伝 2 部グラフとする。 B の頂点 v に対し、頂点集合 $V(B) \setminus \{v\}$ が誘導する B の部分グラフを B^v と表記する。つまり B^v は、 B から頂点 v とそこに接続する辺を除去したグラフである。 B の頂点 v, u に対し、頂点集合 $V(B) \setminus \{v, u\}$ が誘導する B の部分グラフを $B^{v,u}$ と表記する。グラフ $G_m(B)$ から $\top$ と $\perp$ の頂点を削除したグラフでの頂点 X_i の次数を $d'(X_i)$ と表記する(辺の向きは無視している)。まず、次の補題を証明する。

補題 4. 連結な距離遺伝 2 部グラフ $B = (X_B, Y_B, E_B)$ の頂点 $x_i \in X_B$ に対し、 B^{x_i} が連結グラフであるとする。 $\mathcal{M}(B)$ の極大 2 部クリークで x_i を含むものが存在するならば、 $d'(X_i) = 1$ である。

証明. 最初に、 $\mathcal{M}_a(B)$ の極大 2 部クリークで、頂点 x_i を含むものは高々一つであることを示す。

相異なる 2 つの極大 2 部クリーク $K_1, K_2 \in \mathcal{M}_a(B)$ が、ともに x_i を含むと仮定する。性質 3 より、 K_1 と K_2 が共有する X_B の頂点は x_i のみである。性質 2 より、 $x_k \in X_{K_1}$ かつ $x_k \notin X_{K_2}$ なる x_k が存在する。また $(x_k, y_l) \notin E_B$ なる $y_l \in Y_{K_2}$ が存在する。なぜなら、もしすべての $y \in Y_{K_2}$ に対して $(x_k, y) \in E_B$ であれば、 $\{x_k\} \cup X_{K_2} \subseteq X_{K'}$ かつ $Y_{K_2} \subseteq Y_{K'}$ なる $K' \in \mathcal{M}(B)$ が存在することになり、 K_2 が極大であることに反するからである。ここで、 Y_{K_1} の任意の頂点を y_j とする。仮定より B^{x_i} は連結であり、しかも B は距離遺伝グラフなので、 B^{x_i} 上での y_j と y_l との距離は 2 である。よって、 $(x_{i'}, y_j), (x_{i'}, y_l) \in E_B$ なる頂点 $x_{i'} \in V(B)$ が存在する。

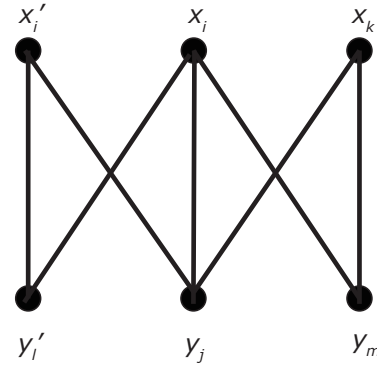


図 2 $(x_i, y_m, x_k, y_j, x_{i'}, y_{l'})$ が誘導する B の部分グラフ。

ここで、 $x_{i'} \in X_{K_1}$ と仮定する。このとき、 $\{x_i, x_{i'}\} \subseteq X_{K'}$ かつ $\{y_l\} \cup Y_{K_1} \subseteq Y_{K'}$ なる $K' \in \mathcal{M}(B)$ が存在する。 $K_1 < K'$ なので $K_1 \in \mathcal{M}_a(B)$ に反する。したがって $x_{i'} \notin X_{K_1}$ である。同様に $x_{i'} \notin X_{K_2}$ である。よって、 $x_{i'} \notin X_{K_1} \cup X_{K_2}$ である。この $x_{i'}$ に対して $(x_{i'}, y_m) \notin E_B$ なる $y_m \in Y_{K_1}$ が存在する。なぜなら、もしすべての $y \in Y_{K_1}$ に対して $(x_{i'}, y) \in E_B$ ならば $K_1 \in \mathcal{M}_a(B)$ に反するからである。

以上より、路 $(x_i, y_m, x_k, y_j, x_{i'}, y_l)$ はサイズ 6 のサイクルをなす。 $(x_k, y_l), (x_{i'}, y_m) \notin E_B$ より、頂点集合 $\{x_i, y_m, x_k, y_j, x_{i'}, y_l\}$ が誘導する B の部分グラフはドミノである(図 2)。距離遺伝 2 部グラフはドミノフリーグラフのサブクラスなので、これは B が距離遺伝 2 部グラフであることに反する。したがって、 $\mathcal{M}_a(B)$ の 2 部クリークで頂点 x_i を含むものは高々一つである。

x_i を含む $\mathcal{M}_a(B)$ の極大 2 部クリークを K とする。上述の議論より、そのような K は高々一つである。 y を $y \in Y_K$ なる B の頂点とする。 $(x_i, y') \in E_B$ なる頂点 $y' \notin Y_K$ が存在すると仮定すると、 B における y と y' との距離は 2 である。仮定より B^{x_i} は連結であり、しかも B は距離遺伝グラフなので B^{x_i} 上での y と y' との距離も 2 である。すなわち $(x', y), (x', y') \in E(B)$ なる $x' \in X_B$ が存在する。このとき $\{x_i, x', y, y'\}$ が誘導する B の部分グラフは $K_{2,2}$ であり、星グラフではない。すなわち、この 2 部クリークの辺をすべて含む極大 2 部クリークは $\mathcal{M}(B)$ の要素である。そのような極大 2 部クリークのうち、 $\mathcal{M}_a(B)$ の要素であるものを K' とする。ここで $y' \in Y_{K'}$ なので、 $K' \neq K$ である。すなわち、相異なる $\mathcal{M}_a(B)$ の要素 K, K' に対して、 $x_i \in X_K, X_{K'}$ となる。これは、 x_i を含む $\mathcal{M}_a(B)$ の極大 2 部クリークが高々一つであることに反する。したがって $(x_i, y') \in E_B$ なる頂点 $y' \notin Y_K$ は存在しない。すなわち $N_B(x_i) = Y_K$ であり、 $d'(X_i) = 1$ が成り立つ。 $\square$

次に以下の定理を証明する。

定理 5. 頂点数 $n (\geq 2)$ の連結な距離遺伝 2 部グラフ B に対して $|\mathcal{M}(B)| \leq n/2 - 1$ が成り立つ。ただし B^v が非連

結となる頂点 $v \in V(B)$ が存在する場合、つまり B に関節点が存在する場合は $|M(B)| < n/2 - 1$ が成り立つ。

証明. B の頂点数 n に関する帰納法により証明する。 $n = 2$ のとき、 B は一本の辺のみからなる 2 部グラフである。よって $M(B) = \emptyset$ であり、 $|M(B)| = 0$ なので $|M(B)| \leq n/2 - 1$ が成り立つ。ここで、 $n = k (\geq 2)$ のときに定理が成り立つと仮定する。 B を $n = |V(B)| = k + 1$ なる 2 部グラフとする。

まず v が B の関節点であるとする。 B^v の連結成分を $B_1^v, \dots, B_c^v$ とする。頂点集合 $V(B_i^v) \cup \{v\}$ が誘導する B の部分グラフを B_i とし、 $n_i \equiv |V(B_i)|$ とする。距離遺伝 2 部グラフの定義から、各 B_i ($1 \leq i \leq c$) は距離遺伝 2 部グラフである。 $K \in M(B)$ が v を含まない場合、 B^v においても K は、(いずれかの B_i の) 極大 2 部クリークである。 $K \in M(B)$ が v を含む場合も、各 B_i は頂点 v を含んでいるので、 K は (いずれかの B_i の) 極大 2 部クリークである。したがって $|M(B)| = \sum_{i=1}^c |M(B_i)|$ である。 $|V(B_i)| \leq k$ なので、帰納法の仮定より $|M(B)| = \sum_{i=1}^c |M(B_i)| \leq \sum_{i=1}^c (n_i/2 - 1)$ である。 $\sum_{i=1}^c n_i = k + c$ より、 $|M(B)| \leq (k + c)/2 - c = (k + 1)/2 - (1 + c)/2$ となる。したがって $c \geq 2$ より、 $|M(B)| \leq (k + 1)/2 - 3/2$ すなわち $|M(B)| < (k + 1)/2 - 1$ となり、定理が成り立つ。

以下では B には関節点が存在しない、すなわち B は 2 重連結であるとする。まず、どの $K \in M(B)$ にも含まれないような頂点 $v \in V_B$ が存在する場合、 B から v を削除しても $M(B)$ に変化はない。よって、 $|M(B)| = |M(B^v)|$ である。すなわち帰納法の仮定より $|M(B)| = |M(B^v)| \leq k/2 - 1 < (k + 1)/2 - 1$ となり、定理が成り立つ。よって以下では、すべての $v \in V_B$ が、 $M(B)$ のいずれかの極大 2 部クリークに含まれるとする。 x_i を X_B の任意の頂点とする。 x_i を含む $M_a(B)$ の要素を K とする。 $|X_K| \geq 3$ の場合、 K は $p \geq 3, q \geq 2$ であるような 2 部クリーク $K_{p,q}$ である。 B から x_i を削除すると K は B^{x_i} の極大 2 部クリーク $K_{p-1,q}$ になる。 x_i を含む他の極大 2 部クリークについても同様である。よって、 $|M(B)| = |M(B^{x_i})|$ である。帰納法の仮定より $|M(B)| = |M(B^{x_i})| \leq k/2 - 1 < (k + 1)/2 - 1$ なので、定理が成り立つ。

次に $|X_K| = 2$ である場合を考える。 $X_K = \{x_i, x_j\}$ とする。 x_i と x_j の両方を含む $M(B)$ の極大 2 部クリークが K のみの場合を考える。補題 4 より、 $d'(X_i) = d'(X_j) = 1$ である。したがって、 K 以外の極大 2 部クリークは B^{x_i, x_j} においても極大 2 部クリークである。 B から x_i と x_j を削除すると K は消滅する。よって $|M(B)| = |M(B^{x_i, x_j})| + 1$ となる。したがって、 $|M(B)| = |M(B^{x_i, x_j})| + 1 \leq (k - 1)/2 = (k + 1)/2 - 1$ となり、定理が成り立つ。次に、 x_i と x_j の両方を含むよ

うな、 K とは異なる極大 2 部クリーク $K' \in M(B)$ が存在する場合を考える。 B には関節点がないので、 B^{x_i} は連結である。以下では B^{x_i} に補題 4 を適用することにより、 B^{x_i, x_j} が非連結であることを示す。 $|X_K \cap X_{K'}| \geq 2$ なので、性質 3 より $K' \notin M_a(B)$ である。性質 1 と半順序の定義より、 $K' < K \in M_a(B)$ である。ここで、 K' を、 $G_m(B)$ 上で K と隣接するようなものとする。半順序の定義より $X_K \subsetneq X_{K'}$ となる。よって $X_{K'}$ の頂点で、 x_i, x_j と異なる頂点 x_k が存在する。 K' は B^{x_i} では x_i が削除された極大 2 部クリーク K'' になる。つまり $K'' = (X_{K'} \setminus \{x_i\}, Y_{K'}, (X_{K'} \setminus \{x_i\}) \times Y_{K'})$ である。 $\{x_j, x_k\} \subseteq X_{K'} \setminus \{x_i\}$ なので、 K'' は $p, q \geq 2$ であるような $M(B^{x_i})$ の極大 2 部クリーク $K_{p,q}$ である。また性質 1 より $Y_{K'} \subsetneq Y_K$ なので、 $y \in Y_K \setminus Y_{K'}$ なる頂点 y が存在する。ここで $y \notin Y_{K'}$ なので $y \notin Y_{K''}$ である。また $(x_j, y) \in E(B^{x_i})$ である。すなわち $G_m(B^{x_i})$ において $d'(X_j) \geq 2$ となり、補題 4 から B^{x_i, x_j} は非連結である。 B^v が非連結になる場合と同様の議論から $\sum_{i=1}^c n_i = k - 1 + c$ であり、 $|M(B)| \leq (k - 1 + c)/2 - c = (k + 1)/2 - (1 + c)/2$ が成り立つ。すなわち $c \geq 2$ より $|M(B)| \leq (k + 1)/2 - 3/2 < (k + 1)/2 - 1$ であり、定理が成り立つ。□

定理 5 の議論より、以下の系が成り立つ。

系 6. 距離遺伝 2 部グラフ B が c 個の連結成分を持つ場合、 $|M(B)| \leq n/2 - c$ である

$|V(G_m(B))| = |M(B)| + n + 2$ より、以下の系が成り立つ。

系 7. 頂点数 $n (\geq 2)$ の連結な距離遺伝 2 部グラフ B に対して $|V(G_m(B))| \leq 3n/2 + 1$ が成り立つ。

$G_m(B)$ の辺の数に対しては、次の定理が成り立つ。

定理 8. 頂点数 $n (\geq 2)$ の連結な距離遺伝 2 部グラフ B に対して $|E(G_m(B))| \leq 5n/2 - 2$ が成り立つ。ただし B^v が非連結となる頂点 $v \in V(B)$ が存在する場合は $|E(G_m(B))| < 5n/2 - 2$ が成り立つ。

証明. B の頂点数 n に関する帰納法により証明する。 $G_m(B)$ から $\top$ と $\perp$ を取り除いたグラフを $G'_m(B)$ とする。 $G'_m(B)$ に対し、 $|E(G'_m(B))| \leq 3n/2 - 2$ を証明する。 $n = 2$ のとき、 $G'_m(B)$ は、一本の辺のみからなる 2 部グラフである。 $|E(G'_m(B))| \leq 1$ なので、定理が成り立つ。

次に $n = k (\geq 2)$ のときに定理が成り立つと仮定する。 B を $n = |V(B)| = k + 1$ なる 2 部クリークとする。まず B^v が非連結となる頂点 $v \in V(B)$ が存在するとする。 B^v の連結成分を $B_1^v, \dots, B_c^v$ とする。頂点集合 $V(B_i^v) \cup \{v\}$ が誘導する B の部分グラフを B_i とし、 $n_i \equiv |V(B_i)|$ とする。距離遺伝 2 部グラフの定義から、 B_i ($1 \leq i \leq c$) は距離遺伝 2 部グラフである。したがって $|E(G'_m(B))| = \sum_{i=1}^c |E(G'_m(B_i))|$ が成り立つ。 $|V(B_i)| \leq k$ なので、帰納法の仮定より $|E(G'_m(B))| = \sum_{i=1}^c |E(G'_m(B_i))| \leq \sum_{i=1}^c (3n_i/2 - 2)$

が成り立つ. $\sum_{i=1}^c n_i = k + c$ より, $|E(G'_m(B))| \leq 3(k+c)/2 - 2c = 3(k+1)/2 - (3+c)/2$ が成り立つ. したがって $c \geq 2$ より, $|E(G'_m(B))| \leq 3(k+1)/2 - 5/2$ すなわち $|E(G'_m(B))| < 3(k+1)/2 - 2$ であり, 定理が成り立つ.

以下では B は関節点を持たない, すなわち B は 2 重連結であるとする. まず, B には, $K \in \mathcal{M}(B)$ なる極大 2 部クリークが少なくとも一つ存在することを示す. $\mathcal{M}(B) = \emptyset$ と仮定する. このとき, B の極大 2 部クリークはすべて星グラフである. $n \geq 3$ なので, 次数が 2 以上の頂点が少なくとも一つ存在する. そのような頂点を x とし, $(x, y), (x, y') \in E(B)$ とする. B^x は距離遺伝 2 部グラフなので, B^x には $(x', y), (x', y') \in E(B)$ なる頂点 $x' (\neq x)$ が存在する. $\{x, x', y, y'\}$ は星グラフではない極大 2 部クリークを誘導するので $\mathcal{M}(B) = \emptyset$ に反する. したがって, B には $K \in \mathcal{M}(B)$ なる極大 2 部クリークが少なくとも一つ存在する.

ある $K \in \mathcal{M}_a(B)$ に対し, K に含まれる任意の頂点を $x_i \in X_K$ とする. 補題 4 より $d'(X_i) = 1$ である. $|X_K| \geq 3$ の場合, $d'(X_i) = 1$ より $|E(G'_m(B))| = |E(G'_m(B^{x_i}))| + 1$ が成り立つ. このとき $|E(G'_m(B))| = |E(G'_m(B^{x_i}))| + 1 \leq 3k/2 - 1 < 3(k+1)/2 - 2$ となり, 帰納法の仮定より定理が成り立つ. $|X_K| = 2$ の場合, $X_K = \{x_i, x_j\}$ とする. $d'(X_i) = d'(X_j) = 1$ より $|E(G'_m(B))| = |E(G'_m(B^{x_i}))| + 2$ が成り立つ. 一方, 定理 5 と同様の議論から B^{x_i, x_j} は非連結である. よって定理 5 と同様の議論により $|E(G'_m(B^{x_i}))| = \sum_{i=1}^c (3n_i/2 - 2) \leq 3k/2 - 5/2$ となる. ただし $\sum_{i=1}^c n_i = k - 1 + c$ である. したがって $|E(G'_m(B))| = |E(G'_m(B^{x_i}))| + 2 \leq 3k/2 - 1/2 = 3(k+1)/2 - 2$ となる. 以上より, 定理が成り立つ. $\square$

$|E(G_m(B))| = n + |E(G'_m(B))|$ より, 以下の系が成り立つ.

系 9. 頂点数 $n (> 2)$ の連結な距離遺伝 2 部グラフ B に対して $|E(G_m(B))| \leq 5n/2 - 2$ が成り立つ.

謝辞 本研究の一部は基盤研究 (B) 課題番号: 15H02969 の支援を受けた.

参考文献

- [1] Graph Classes: A Survey, Graph Classes: A Survey. Complexity of minimum biclique cover and minimum biclique decomposition for bipartite domino-free graphs. Discrete Appl. Math., pp. 125–144, 1998.
- [2] year. On computing the galois lattice of bipartite distance hereditary graphs. arXiv preprint arXiv:1510.06883, 2015.
- [3] year. Distance-hereditary graphs. Journal of Combinatorial Theory, Series B, pp. 182 – 208, 1986.
- [4] year, year. Graph Classes: A Survey. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 1999.

- [5] year, year, year. Covering graphs with few complete bipartite subgraphs. Theoretical Computer Science, pp. 2045 – 2053, 2009.
- [6] year. On edge perfectness and classes of bipartite graphs. Discrete Mathematics, pp. 159 – 187, 1996.
- [7] year. Contentment in graph theory: covering graphs with clique. Indagationes Mathematicae (Proceedings), pp. 406 – 424, 1977.
- [8] year. The biclique cover problem and the modified Galois lattice. IEICE TRANSACTIONS on Information and Systems, pp. 497–502, 2015.