

Hough 変換の幾何学的性質と直線群検出への応用†

松 山 隆 司** 長 尾 真††

本論文では、Hough 変換の幾何学的性質を表す 2, 3 の定理を示し、それらの性質を利用した直線群検出アルゴリズムを提案する。従来 Hough 変換を用いた直線検出では、パラメータ空間における軌跡の累積度数を唯一の評価基準としていた。ここでは、まず画像空間における直線上の点の連続性が、パラメータ空間にどのように写像されるのかを解析的に調べる。次にその結果に基づきパラメータ空間における軌跡群の分布形状を評価し、直線検出の性能および精度の向上をはかる。特に画像内に長短さまざまな直線群が含まれている場合、単なる軌跡の累積度数の大きさのみではそれらをうまく検出することはむずかしい。ここで提案するアルゴリズムでは、累積度数の大きさとともに直線上の点の連続性を表す評価基準を用いることにより、そうした画像からもうまく直線群を検出することができる。実験では、金属結晶の電子顕微鏡写真に対してこのアルゴリズムを適用し、良好な結果を得ることができた。

1. はじめに

Hough 変換は、直線、円、楕円などのパラメータ表現された図形を検出する方法として、様々な画像に対して使われてきた^{1)~3)}。最近では任意形状図形の検出を行う一般化 Hough 変換も提案され⁴⁾、3次元物体の位置・姿勢の決定にも応用されている⁵⁾。

しかし実用的な観点からは次のような問題がある。

- (1) 画像中の各（特徴）点に対してパラメータ空間での軌跡をそれぞれ描くため、計算時間がかかる。
 - (2) 形状を表すパラメータの数が増すと、パラメータ空間の大きさが指数的に増加する。
 - (3) 画像に含まれる対象図形が1個に限られる場合は、その検出は比較的容易であるが、多数の図形が同時に存在するときは、それら全部をうまく検出するのがむずかしい。
- (1), (2) の問題解決のためには、以下のような方法が提案されている。
- (a) すべてのパラメータを同時に求めるのではなく、逐次的に決定する^{3), 5)}。
 - (b) パラメータ空間に描かれる軌跡群はパラメータ空間に一様に分布するわけではないので、Quad Tree, kd Tree を用いてパラメータ空間を動的に分割・管理する^{6), 7)}。

本論文では、

$$\rho = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (1)$$

† Geometric Properties of the Hough Transform and Their Application to Line Group Detection by TAKASHI MATSUYAMA and MAKOTO NAGAO (Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Kyoto University).

†† 京都大学工学部電気工学第二学科

* 現在 東北大学工学部情報工学科

とパラメータ化された直線の検出において、(3)の問題、すなわち画像中に多くの直線が含まれる場合、それらすべてを検出する問題、に対する解決法を提案する。以下で行う Hough 変換ではすべて画像の中央を xy 座標の原点として考える。これは雑音による特徴点の位置のゆらぎの影響を低減させるためである^{10)~12)}。また、以下では (x, y) , (ρ, θ) など添字なしの記号は変数を表し、 (x_1, y_1) , (ρ_0, θ_0) などの添字付きのものは定数を表す。

2. 直線群検出における問題点

図1の画像を例として考える。この画像は、大きさが 128×128 で、もとの濃淡画像を微分、2値化して得られたエッジ点（値1）を表す。Hough 変換では、各エッジ点の座標値 (x_i, y_i) を(1)式に代入し、 $\rho\theta$ のパラメータ空間における軌跡を描き、軌跡が集中している点 (ρ_j, θ_j) を直線の方程式とする（図5参照）。

図2(a)~(d)は、 $\rho\theta$ 空間において、

- (1) 軌跡の累積度数が t 以上 ($t=50, 40, 35, 30$), かつ

- (2) $\rho\theta$ 空間において 5×5 の近傍内で累積度数が極大

の条件で抽出した直線群を表す。ここで、 $\rho\theta$ 空間は直交座標系で表され、 ρ 方向は1画素長、 θ 方向は 1° きざみでデジタル化されている。

これらの結果から明らかなように、長い直線（分）はうまく検出できるが、短いものを検出しようとして t を小さくすると、不必要な“偽”の直線が多数検出されてしまう。図3は閾値 t に対する $\rho\theta$ 空間でのピーク（検出される直線）の数を示したもので、 t の減少に伴いピークの数が増加する。

また、図4に示すように、 $\rho\theta$ 空間での軌跡の累積度数の極大値は雑音の影響で鋭いものとはならず、上の(2)の条件で選ばれるものが必ずしも最適な直線に対応するわけではない。

従来この問題に対しては、エッジの強さを利用したり⁸⁾、信号処理の立場からピークの尖鋭化を行う方式⁹⁾が提案されている。また、画像中の雑音によるエッジ点の位置のゆらぎがピーク検出に与える影響についての解析も行われている^{10)~12)}。しかし、いずれの方法にしても $\rho\theta$ 空間における軌跡の累積度を唯一の評価基準と考えていることには変わりなく、直線群検出のためには別の評価基準が必要となる。

本稿では、まず画像空間における直線上の点の連続性が、パラメータ空間にどのように写像されるのかを解析的に調べる。次にその結果に基づき、パラメータ

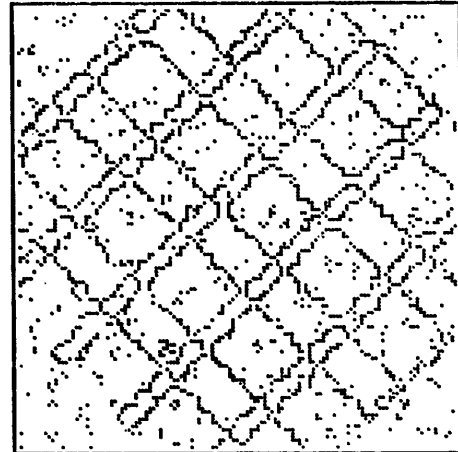


図1 テスト画像
Fig. 1 Test pattern.

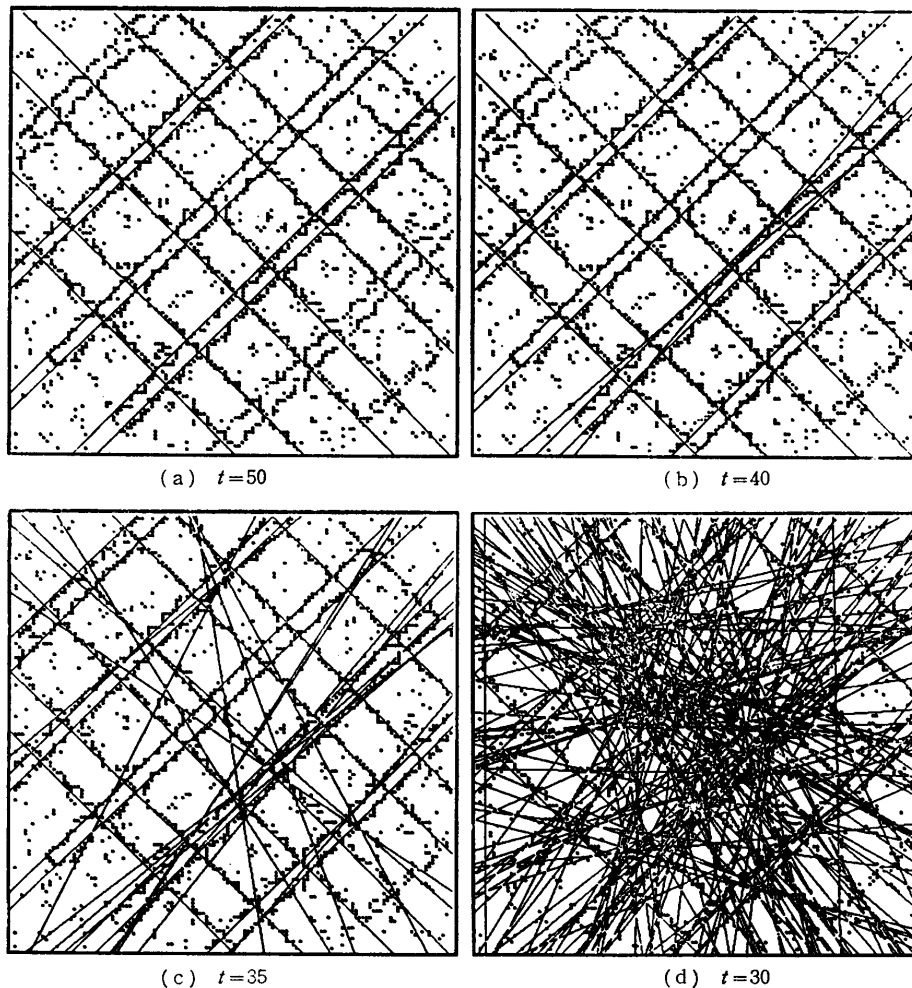


図2 パラメータ空間の極大値に対応する直線群
Fig. 2 Straight lines detected as local maxima in the parameter space.

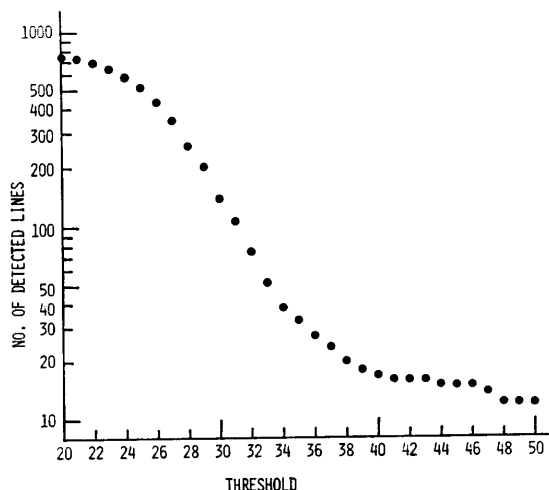


図3 パラメータ空間の極大値の数の変化
Fig. 3 Number of detected lines and threshold values for local maximum detection in the parameter space.

空間における軌跡の累積度数の分布形状を評価し、直線検出の性能および精度の向上をはかる。

3. Hough 変換の幾何学的性質

3.1 直線の連続性

$I(x, y)$, $P(\rho, \theta)$ をそれぞれ画像 (値1の点が含まれる), パラメータ空間とする。従来直線検出の評価基準として用いられてきた軌跡の累積度数 $P(\rho, \theta)$ は、画像 $I(x, y)$ において直線

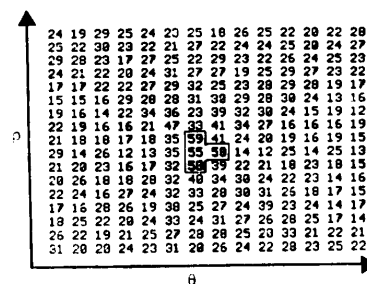


図4 不尖鋭な極大値
Fig. 4 Blurred local maximum in the parameter space.

$$\rho_0 = x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0 \quad (2)$$

がいくつかの点を通過しているのかを表している。ここで、 $P(\rho, \theta)$ はパラメータ空間中のある点 (ρ, θ) における軌跡の累積度数を表す。

図5に示すように(2)の直線上に並んだ3点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ を考え、それらによって $P(\rho, \theta)$ に描かれる軌跡をそれぞれ T_1, T_2, T_3 とする。

$$T_i: \rho = x_i \cos \theta + y_i \sin \theta \quad (i=1, 2, 3) \quad (3)$$

このとき次の定理が成り立つ。

【定理1】 $P(\rho, \theta)$ 中の点 (ρ_0, θ_0) における軌跡 T_1, T_2, T_3 の接線方向を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とすると、 $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ または $\alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_1$ が成立する。

【証明】 今、点Bを線分ACの m 対 n の内分点とする。

$$x_2 = (nx_1 + mx_3)/(m+n),$$

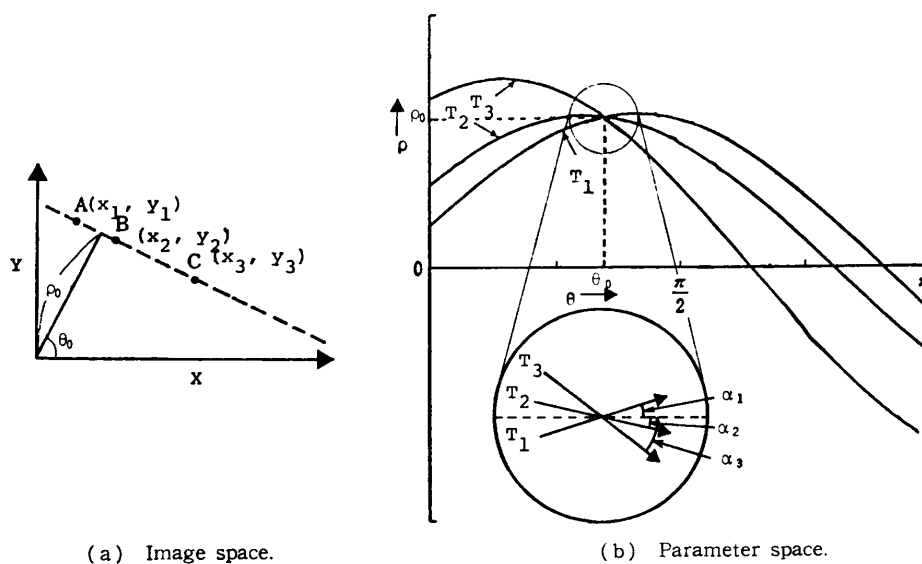


図5 画像空間・パラメータ空間における直線の連続性
Fig. 5 Continuity in the image and parameter spaces.

$$y_2 = (ny_1 + my_3)/(m+n) \quad (4)$$

(3)式をそれぞれ θ で微分すると,

$$d\rho/d\theta = -x_i \sin \theta + y_i \cos \theta \quad (i=1, 2, 3). \quad (5)$$

点 (ρ_0, θ_0) における接線の方法 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は,

$$\tan \alpha_i = -x_i \sin \theta_0 + y_i \cos \theta_0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (6)$$

となる。(4)式と(6)式より,

$$\begin{aligned} \tan \alpha_2 &= -\{(nx_1 + mx_3)/(m+n)\} \sin \theta_0 \\ &\quad + \{(ny_1 + my_3)/(m+n)\} \cos \theta_0 \\ &= (n \tan \alpha_1 + m \tan \alpha_3)/(m+n). \end{aligned}$$

$\tan \alpha$ は α に関して単調関数なので

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \quad \text{または} \quad \alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_1$$

となる。

(証明終)

この定理より次のことが直ちに言える。

【定理2】 図5に示すように、画像 $I(x, y)$ 中の2点 $A(x_1, y_1)$, $C(x_3, y_3)$ を通る直線 $\rho_0 = x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0$ を考える。線分 AC 上を A から C へ連続的に点が移動するとき、その点が $P(\rho, \theta)$ に描く軌跡の点 (ρ_0, θ_0) における接線の方法は、 α_1 から α_3 へ連続かつ単調に変化する。ここで、 α_1, α_3 は定理1と同様、点 A, C が $P(\rho, \theta)$ に描く軌跡の点 (ρ_0, θ_0) における接線の方法を表す。

定理2より、 $I(x, y)$ 中の連続直線と破線とは $P(\rho, \theta)$ において図6に示すような軌跡群に変換される。ここで、図6(b)は画像中の直線に対応する $P(\rho, \theta)$ 中の点の近傍における軌跡群の分布形状を表す。したがって、理論的には、 $P(\rho, \theta)$ における極大点の近傍での軌跡群の分布形状を調べることで、連続直線と破線とを識別することが可能であることがわかる。

3.2 直線上の距離

ここでは、 $I(x, y)$ における直線上の距離(線分の長さ)が Hough 変換によって $P(\rho, \theta)$ へどのように写像されるのかを調べる。

今、点 (x, y) が(2)式の直線上を速度1で移動していると考えると、

$$x = X(t), \quad y = Y(t) \quad (7)$$

と表すことができ、仮定より

$$(dX/dt)^2 + (dY/dt)^2 = 1 \quad (8)$$

となる。ここで t は時間を表す。

3.1 節と同様に点 $(X(t), Y(t))$ が $P(\rho, \theta)$ において描く軌跡の点 (ρ_0, θ_0) における接線の方法を $\alpha(t)$ とすると、

$$\tan \alpha(t) = -X(t) \sin \theta_0 + Y(t) \cos \theta_0. \quad (9)$$

(2), (9)を t で微分すると、

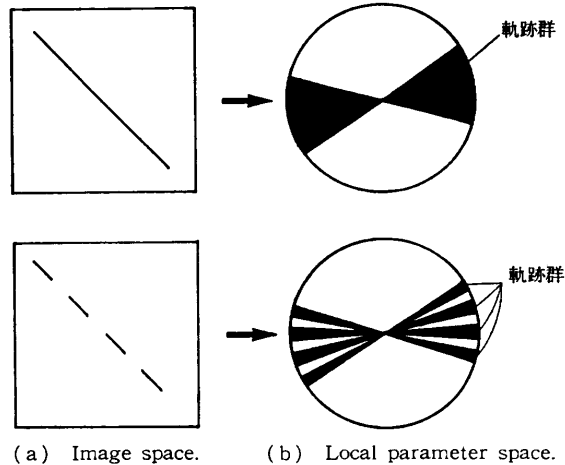


図6 画像空間・パラメータ空間における連続直線と破線

Fig. 6 Continuous line and broken line in the image and parameter spaces.

$$dX(t)/dt = -\tan \theta_0 \cdot dY(t)/dt \quad (10)$$

$$\begin{aligned} d\alpha(t)/dt &= \cos^2 \alpha(t) (-\sin \theta_0 \cdot dX(t)/dt \\ &\quad + \cos \theta_0 \cdot dY(t)/dt) \end{aligned} \quad (11)$$

(10), (8)式より、

$$\begin{aligned} dX(t)/dt &= \pm \sin \theta_0 \\ dY(t)/dt &= \mp \cos \theta_0 \quad (\text{複号同順}) \end{aligned} \quad (12)$$

(12), (11)式より、

$$d\alpha(t)/dt = \mp \cos^2 \alpha(t). \quad (13)$$

ここで符号は点 (x, y) の移動方向に対応する。

(13)式の意味は次のように考えられる。(8)式の仮定から時間 t の変化は、直線上での位置の変化(線分の長さ)に等しい。したがって、直線上で点が微小距離 Δ だけ移動した場合、 $P(\rho, \theta)$ 中の軌跡の (ρ_0, θ_0) における接線の方法の変化量は $\Delta \cos^2 \alpha(t)$ となり、その大きさは t の値(直線上での点の位置)に依存する。すなわち、直線上で同一長の線分でも、それらに対応する $P(\rho, \theta)$ での軌跡の接線の方法変化は、直線上の線分の位置によって変化する。(図7: 図7(b)は $P(\rho, \theta)$ 中の点 (ρ_0, θ_0) を中心とした円形近傍における軌跡群の分布形状を表す。画像中で同じ長さ l の線分 1-2, 3-4, 5-6 に対応する $P(\rho, \theta)$ での軌跡群の点 (ρ_0, θ_0) における接線の方法はそれぞれ $<102^\circ$, $<304^\circ$, $<506^\circ$ の内に集中し、一般に $<102^\circ \approx <304^\circ \approx <506^\circ$, $<102^\circ \approx <506^\circ$ となる。ここで、 $<$ は図7(b)の黒く

* 図6(b)の破線の場合も正確に言うと図7(b)と同様黒く塗られた扇形領域の広がり角はそれぞれ異なることになるが、図6の場合は連続直線との比較が主たる目的であったのであえて同じ広がり角の扇形領域として描いた。

塗られた扇形領域を表す。また、 κ は扇形の広がり角が等しくないことを表す。)

4. 直線群の検出

4.1 デジタル画像における幾何学的性質の確認

無限直線 $\rho_0 = x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0$ を考え、それを Hough 変換し、 $P(\rho, \theta)$ 中の点 (ρ_0, θ_0) を中心とした小さな円形近傍内の軌跡群の分布形状を次のようにして調べる (図 8)。まず、 (ρ_0, θ_0) を中心に半径 r の円形領域を考え、 α 方向の半径に沿った軌跡の累積度数の和を求める。すなわち、

$$A(\alpha) = \int_{+0}^r P(\rho, \theta) d\ell_\alpha. \quad (14)$$

ここで積分は、 (ρ_0, θ_0) から始め (点 (ρ_0, θ_0) 自身は除く)、 α 方向の半径に沿って距離 r だけ行う ((14) 式中で $+0$ は点 (ρ_0, θ_0) 自身は除くこと、 $\int d\ell_\alpha$ は点 (ρ_0, θ_0)

から α 方向の直線に沿った積分を表す)。 r が十分小さいとき、 $A(\alpha)$ は図 8 (b) のようになり、(13) 式より定数倍を除き $1/\cos^2 \alpha$ となるはずである。

図 9 (a) の画像を Hough 変換し、その直線に対応する (ρ_0, θ_0) 付近の累積度数の分布を求めると図 9 (b) となる。ここで画像は 256×256 の大きさで、 $P(\rho, \theta)$ は先の例と同じく、 ρ 方向は 1 画素長、 θ 方向 1° でデジタル化されている。(13) 式で示されたように、 α が 90° (270°) に近づくにつれ、 $P(\rho, \theta)$ での軌跡の累積度数の分布が密になる (値が大きくなる) のがよくわかる。ピークの左右で累積度数の分布が少しずれているのは、デジタル的に軌跡を描く際の近似誤差による。

図 9 (c) は、円形近傍の半径 10、方向角 α のきざみを 1° としたときの $A(\alpha)$ のグラフである。理論的には、図 9 (c) に $\cos^2 \alpha$ を掛けるとグラフが平坦になるはずである。しかし、実際には図 9 (d) に示すよう

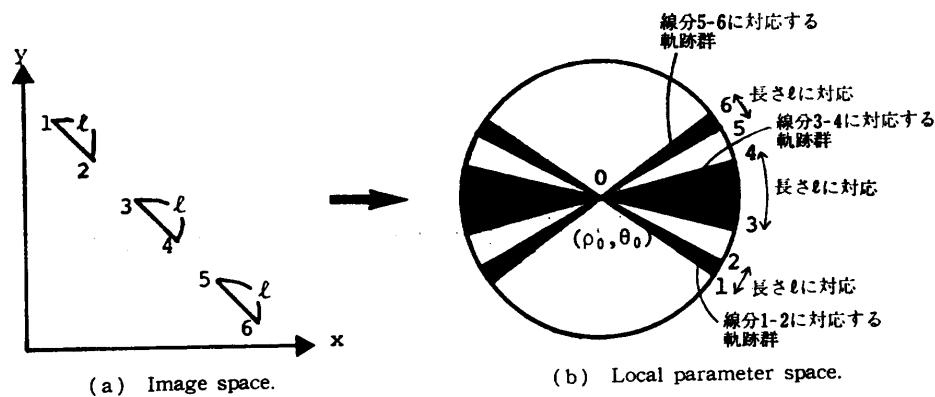


図 7 画像空間・パラメータ空間における線分の長さ
Fig. 7 Length of line segments in the image and parameter spaces.

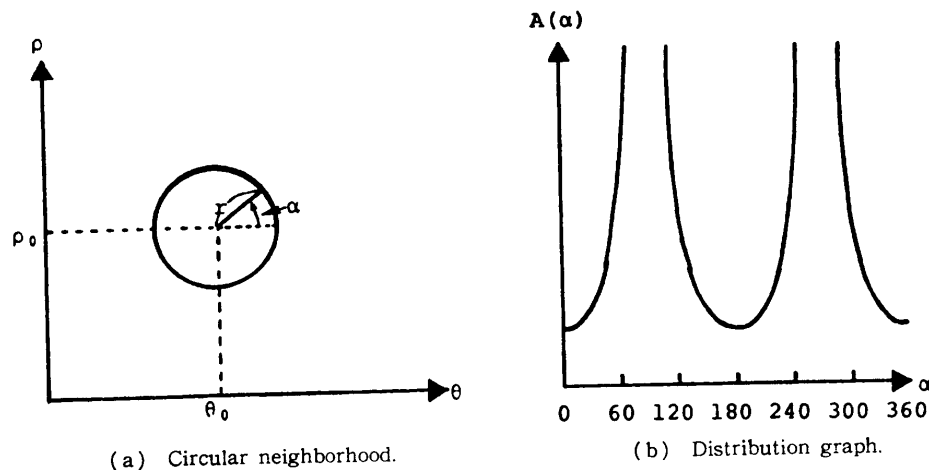


図 8 円形近傍内における累積度数の分布形状
Fig. 8 Measuring shape of distribution in the circular neighborhood.

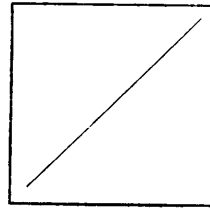
に、上に凸なグラフとなってしまう (図9(c)と(d)では縦軸のスケールが異なる)。この理由は、 $P(\rho, \theta)$ におけるピーク (ρ_0, θ_0) のすぐ近傍では方向角 α に対する分解能が非常に悪く (8近傍では 45° きざみしかない)、さらにそうした近傍に軌跡が集中するため、累積度数の値が大きくなるためである (図9(b))。すなわち、連続空間においては、 $\alpha=0^\circ$ 方向の軌跡の分布密度は小さいにもかかわらず、デジタル空間では点 (ρ_0, θ_0) の $\alpha=0^\circ$ 方向の隣接点には、 $-22.5^\circ \leq \alpha < 22.5^\circ$ の間のすべての軌跡が通ることになり、その累積度数が $A(0^\circ)$ に加えられてしまうからである。

また、図9(c)において 90° , 270° 付近で図8(b)のように値が無限大にならないのは、図9(a)の直線が有限の線分であるからである。理論上は、線分の両端に対応する方向角 α_1, α_2 で $A(\alpha)$ は急に0となり、 $|\alpha_1|, |\alpha_2| < 90^\circ$, $\alpha_1 < \alpha_2$ とすると、

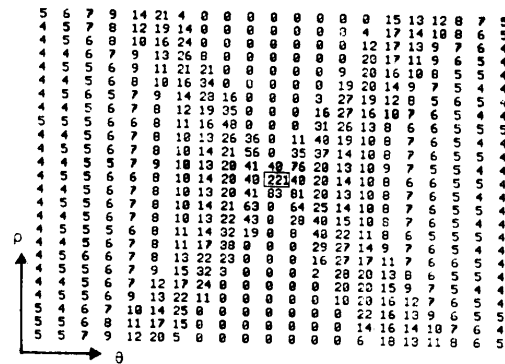
$\alpha_2 < \alpha < \alpha_1 + 180^\circ$, $\alpha_2 + 180^\circ < \alpha < \alpha_1 + 360^\circ$ の範囲 (ちょうど 90° , 270° をはさむ範囲) で常に0となるはずである。したがって、 $A(\alpha)$ のグラフにおけるそうしたピークの端に対応する方向角を求めると、逆に画像中の線分の端点の位置を決定することが可能である。

しかし、実際には図9(c)が示すように、(i)実際の $A(\alpha)$ は急に0とはならないし、(ii) 90° , 270° 付近でも完全に0とはならない。(i)の理由は、実際には小さな円形近傍内でも軌跡は曲っているにもかかわらず、 $A(\alpha)$ の計算は α 方向の直線に沿って行ったことによる。(ii)の原因は、 $P(\rho, \theta)$ のデジタル化の影響である。このような理由から、 $A(\alpha)$ の形から画像中の線分の端点の位置を正確に求めるのはむずかしい。また同様の理由によって、 $A(\alpha)$ の形から画像中の直線が連続直線か破線かを厳密に識別することもかなり困難であると言える。

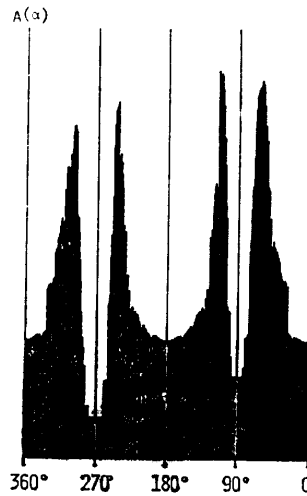
以上まとめると、実際のデジタル処理において



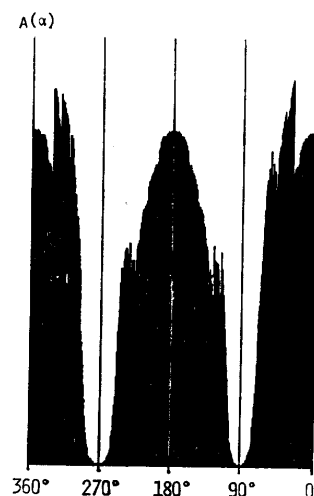
(a) Image of line segment.



(b) Distribution in the parameter space.



(c)



(d)

図9 線分のデジタル Hough 変換

Fig. 9 The digital Hough transform of a line segment.

は、3章で示した性質を厳密に適用するのは現実的ではないと言える。しかし、定理2で述べた基本的性質 (Hough 変換における直線の連続性) は $A(\alpha)$ の形状にかなり忠実に反映されており、それを利用することにより、2章で述べた直線群検出のための新たな評価基準を作成できると考えられる。

4.2 直線群検出アルゴリズム

ここでは、2章で述べた直線群検出における二つの課題、すなわち、(i)余分な直線を検出することなく短い直線をも探し出す、(ii)直線のパラメータのより正確な推定を行う、に対処するためのアルゴリズムについて述べる。

【ステップ1】 画像を Hough 変換したのち、 ρ, θ 空間において次の条件を満たす (ρ, θ) を直線の1次候補とする。

$$P(\rho, \theta) \geq t \quad (t \text{ は与えられた閾値}) \quad (15)$$

$$P(\rho, \theta) \geq 0.9 \max_{k,l} P(\rho + kd_\rho, \theta + ld_\theta)$$

$$(k, l=0, \pm 1) \quad (16)$$

ここで $P(\rho, \theta)$ は (ρ, θ) における累積度数, d_ρ, d_θ , $(\rho + kd_\rho, \theta + ld_\theta)$ はそれぞれ $\rho\theta$ 空間のサンプル間隔, および点 (ρ, θ) の隣接点を表す. (16)式の右辺に 0.9 を掛けているのは, 2章でも述べたように累積度数の極大点が必ずしも最適な直線パラメータを表すわけではなく, その近傍で極大値と近い値のものは候補として残すためである (0.9 の値自身は実験的に定めた).

【ステップ2】 ステップ1で得られた候補点の各々について, それを中心とした半径 r (実験では7) の円形近傍内の軌跡群の分布形状を, 4.1節で述べたように $A(\alpha)$, ($\alpha=0^\circ \sim 359^\circ$) として求める (実験では α のきざみを 1° としたが, 実際には半径7の円内では 10° 程度の解像度しかない). 次にこの $A(\alpha)$ を利用して, その候補点の良さを次のようにして求める.

(2-1) 今注目している候補点を (ρ_i, θ_i) とし, 分布関数を $A_i(\alpha)$ とする. まず, 直線 $\rho_i = x \cos \theta_i + y \sin \theta_i$ と画像の枠との交点 $S_i(x_{si}, y_{si}), E_i(x_{ei}, y_{ei})$ を計算し, それらに対応する軌跡の (ρ_i, θ_i) における接線方向角

$$\alpha_{si} = \tan^{-1}(-x_{si} \cos \theta_i + y_{si} \sin \theta_i) \quad (17)$$

$$\alpha_{ei} = \tan^{-1}(-x_{ei} \cos \theta_i + y_{ei} \sin \theta_i) \quad (18)$$

を求める. ここで一般性を失うことなく, $\alpha_{ei} > \alpha_{si}$, $|\alpha_{si}|, |\alpha_{ei}| < 90^\circ$ と仮定する.

(2-2) 2章の定理1より, 画像上で2点 S_i, E_i を結ぶ線分上の任意の点によって $\rho\theta$ 空間に描かれる軌跡の点 (ρ_i, θ_i) における接線方向角は α_{si} と α_{ei} の間に存在する. したがって, 分布関数 $A_i(\alpha)$ において, $\alpha_{si} \leq \alpha \leq \alpha_{ei}$, $\alpha_{si} + 180^\circ \leq \alpha \leq \alpha_{ei} + 180^\circ$ 以外の区間に存在する値は, $\rho\theta$ 空間における“雑音成分” (今注目している直線上にない点の影響) であると言える. そこでその平均値

$$n_i = E[A_i(\alpha) | \alpha_{si} < \alpha < \alpha_{ei} + 180^\circ, \alpha_{si} + 180^\circ < \alpha < \alpha_{ei} + 360^\circ]$$

を計算する. ここで, $E[\cdot]$ は平均値を表し, 角度は360を法として考える.

(2-3) 雑音の平均値 n_i を $A_i(\alpha)$ から除く.

$$A'_i(\alpha) = \begin{cases} A_i(\alpha) - n_i & \alpha_{si} \leq \alpha \leq \alpha_{ei}, \alpha_{si} + 180^\circ \leq \alpha \leq \alpha_{ei} + 180^\circ \\ 0 & \alpha_{si} < \alpha < \alpha_{ei} + 180^\circ, \alpha_{si} + 180^\circ < \alpha < \alpha_{ei} + 360^\circ \end{cases} \quad (19)$$

また, $A_i(\alpha) - n_i < 0$ のときは, $A'_i(\alpha) = 0$ とする.

(2-4) $A'_i(\alpha)$ の分布の対称性を次式で計算する.

$$S_i = 1 - \left(\frac{\sum_{\alpha} |A'_i(\alpha) - A'_i(\alpha + 180^\circ)|}{\sum_{\alpha} \max(A'_i(\alpha), A'_i(\alpha + 180^\circ))} \right) \quad (20)$$

ここで $\sum$ は $\alpha_{si} \leq \alpha < \alpha_{ei}, \alpha_{si} + 180^\circ \leq \alpha \leq \alpha_{ei} + 180^\circ$ に対して行う. 2章の議論から, (ρ_i, θ_i) が真の直線に対応するならば, $S_i \approx 1.0$ となるはずである.

(2-5) 直線のパラメータ決定の精度向上

(2-1)~(2-4) の処理を $(\rho_i \pm 0.5d_\rho, \theta_i \pm 0.5d_\theta)$ の4点に対してそれぞれ行い, S_i の値が最大となるものを選び, そのときの (ρ, θ) を $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i)$, $A'_i(\alpha)$ を $\bar{A}_i(\alpha)$, S_i を $S_i(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i)$ とする. この計算において, $(\rho_i + 0.5d_\rho, \theta_i + 0.5d_\theta)$ のように $P(\rho, \theta)$ 空間のサンプル点ではない点における軌跡の累積度数 $P(\rho_i + 0.5d_\rho, \theta_i + 0.5d_\theta)$ は, その周囲の四つのサンプル点における値から内挿によって求める.

$$S_i(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i) \geq t_s \quad (t_s \text{ は与えられた閾値}) \quad (21)$$

$$2rP(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i) < \sum_{\alpha} \bar{A}_i(\alpha) \quad (22)$$

の条件を満たすものを直線の2次候補とする. ここで, (22)式の条件は, もし $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i)$ が雑音成分のみによる偽のピークならば(19)式によってすべての α に対して $A'_i(\alpha) \approx 0$ となり, $S_i(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i)$ 自身が意味を持たなくなるのを防ぐためのものである.

図10(a)に $t=30$, $t_s=0.5$ として求めた直線の2次候補を示す. 図2(d)に比べ大幅に偽の直線が減少し, かつ直線のパラメータがより正確になっているのがわかる.

【ステップ3】 上の処理によって $\rho\theta$ 空間中の各候補点に対して求められた対称性の測度 $S_i(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i)$ を用いて非極大点の抑制を行う. すなわち, 次の条件を満たすものを直線の3次候補とする.

$$S_i(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i) \geq \max_j S_j(\bar{\rho}_j, \bar{\theta}_j) \quad (23)$$

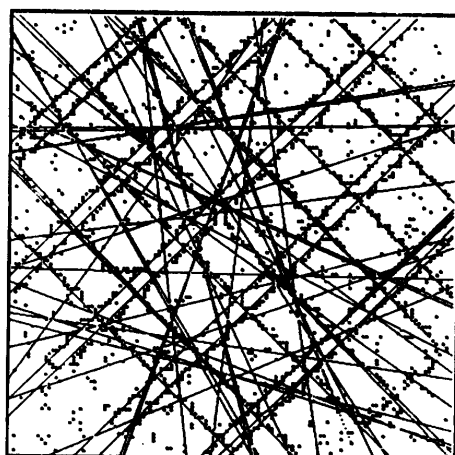
ここで $(\bar{\rho}_j, \bar{\theta}_j)$ は $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i)$ を中心とした 5×5 の近傍に含まれる直線の2次候補を表す. また, (ρ_i, θ_i) と (ρ_j, θ_j) が隣接しており, $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i) = (\bar{\rho}_j, \bar{\theta}_j)$ のときは, $S_i(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i) = S_j(\bar{\rho}_j, \bar{\theta}_j)$ となるため, いずれか一方のみを残し, 他方を除去する. 図10(b)にこの処理によって選ばれた直線の3次候補を示す.

【ステップ4】 これまでに選ばれた直線の3次候補のうち, 次の条件を満たすものを最終結果とする.

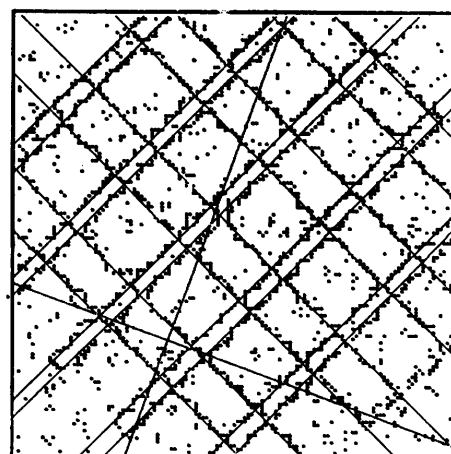
$$\{ \text{VAR } 1[\bar{A}_i(\alpha) | \bar{\alpha}_{si} \leq \alpha \leq \bar{\alpha}_{ei}] + \text{VAR } 2[\bar{A}_i(\alpha) | \bar{\alpha}_{si} + 180^\circ \leq \alpha \leq \bar{\alpha}_{ei} + 180^\circ] / 2 \}^{1/2} / P(\rho_i, \theta_i) \leq t_v$$

$$(t_v \text{ は与えられた閾値}) \quad (24)$$

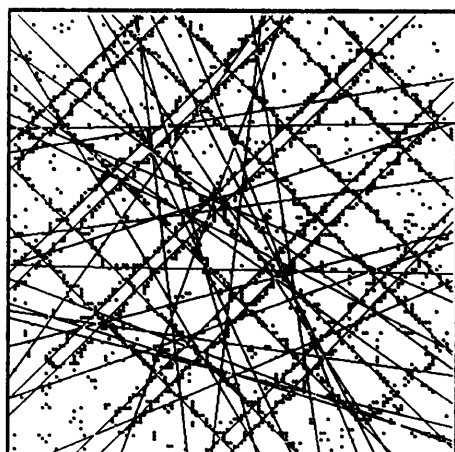
ここで $\bar{A}_i(\alpha), \bar{\alpha}_{si}, \bar{\alpha}_{ei}$ は, それぞれ $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i)$ を中心と



(a) Second candidates.



(a)



(b) Third candidates.

図 10 中間結果

Fig. 10 Intermediate results.

θ	ρ	$\bar{\rho}$	$\bar{\theta}$	$P(\rho, \theta)$	$\bar{S}$	$\bar{V}$
45	-45	45.0	-44.5	61	0.789	0.335
45	-32	45.0	-31.5	47	0.795	0.519
45	-13	45.0	-12.5	78	0.830	0.355
45	1	45.0	0.5	58	0.762	0.474
45	20	45.0	19.5	59	0.723	0.457
45	33	45.0	32.5	70	0.843	0.340
45	52	45.0	51.5	46	0.800	0.375
45	64	44.5	64.0	30	0.864	0.455
70	-35	70.0	-35.5	30	0.791	0.459
135	-40	135.0	-39.5	47	0.689	0.456
135	-18	135.5	-18.0	82	0.738	0.310
135	-13	135.0	-13.5	94	0.544	0.260
135	7	135.0	7.5	60	0.586	0.472
135	12	135.0	11.5	61	0.682	0.435
135	33	135.0	33.0	87	0.731	0.273
135	37	135.0	37.0	60	0.720	0.381
135	64	135.0	63.5	36	0.590	0.337
136	-44	135.0	-43.5	43	0.565	0.440
136	58	136.0	58.5	38	0.749	0.383
160	8	160.0	8.0	30	0.622	0.597

(b)

図 11 最終結果

Fig. 11 Final result.

した軌跡群の分布形状関数（雑音除去後），直線 $\rho_i = x \cos \bar{\theta}_i + y \sin \bar{\theta}_i$ と画像の枠との交点が描く軌跡の点 $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i)$ における接線方向を表す。また， $\text{VAR } 1[\cdot]$ ， $\text{VAR } 2[\cdot]$ は α のそれぞれの区間における $\bar{A}_i(\alpha)$ の分散を表す。つまり，(24)式の左辺は直線上での点のばらつきを表すもので，この値が小さいと， $P(\rho_i, \theta_i)$ 個の点が直線上で連続的に分布していると言える。

5. 考 察

4.2節で述べたアルゴリズムによる最終結果を図11(a)に示す ($t=30$, $t_s=0.5$, $t_e=0.6$, これらの閾値はすべて実験的に求めた)。図11(b)にこれらの直線に対する各種のパラメータの値を示す (ρ, θ : デジタル $\rho\theta$ 空間での極大値の位置, $\bar{\rho}, \bar{\theta}$: 極大値の近傍で

求めた直線のパラメータの推定値, $P(\rho, \theta)$: (ρ, θ) における累積度数, $\bar{S}$: ($\bar{\rho}, \bar{\theta}$) の近傍の累積度数分布の対称性, $\bar{V}$: 累積度数分布の分散度)。余分な直線が2本残っているが，画面右上端の短い直線もうまく検出されている。

図11(b)を見ると，135°方向（右上がり）の直線群の対称性 $\bar{S}$ が，45°方向（左上がり）のものに比べるとかなり悪くなっている。これは135°方向の場合，画像上で5～6画素離れた位置に他の直線があり，その結果， $\rho\theta$ 空間での二つの軌跡の累積度数の分布が互いに重なり合っているためである（図12）。もちろん， $\rho\theta$ 空間のサンプル間隔を細くすれば重なり合いの影

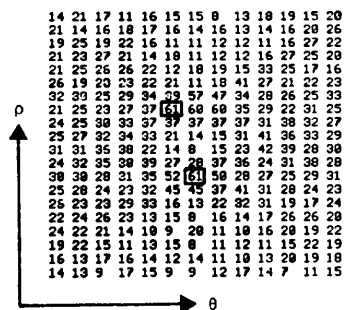


図 12 軌跡群の分布形状

Fig. 12 Interaction between a pair of local distributions in the parameter space.

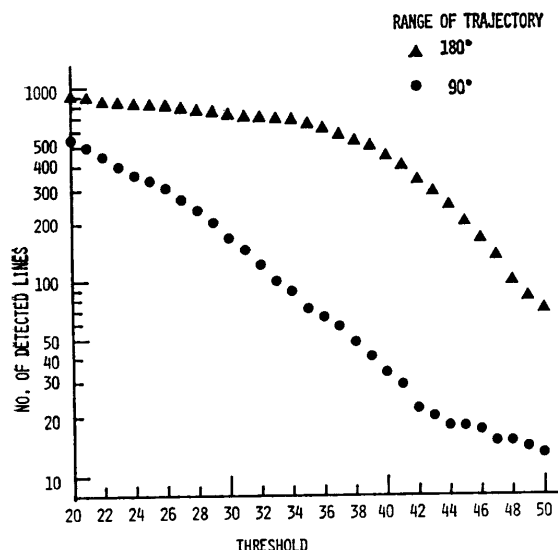
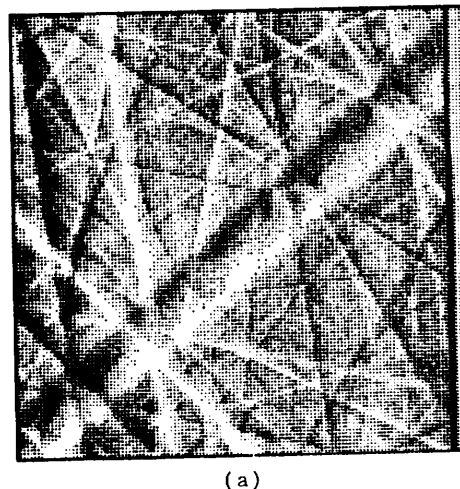


図 13 パラメータ空間の極大値の数の変化

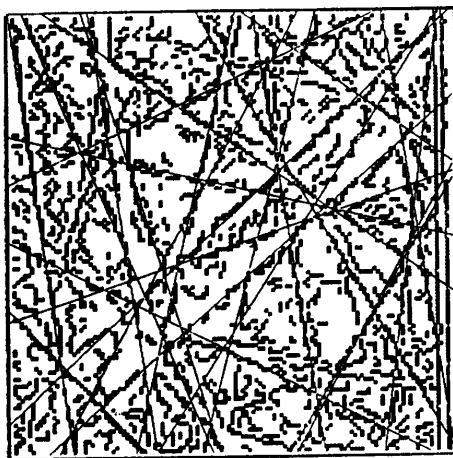
Fig. 13 Number of detected lines and threshold values.

響を減らすことができる。しかし、そうすると画像中での点の位置のゆらぎが $\rho\theta$ 空間で増幅されることになり、累積度数のピークがぼやけてしまう。図 11(a) の右下の短い直線が検出されていないのはこのためである。また、前節のアルゴリズムの (2-5) において $S_i(\rho_i, \theta_i)$ の閾値 t_i を 0.5 と低く設定したのは、ある程度分布の重なりがあっても直線が検出できるようにするためである。

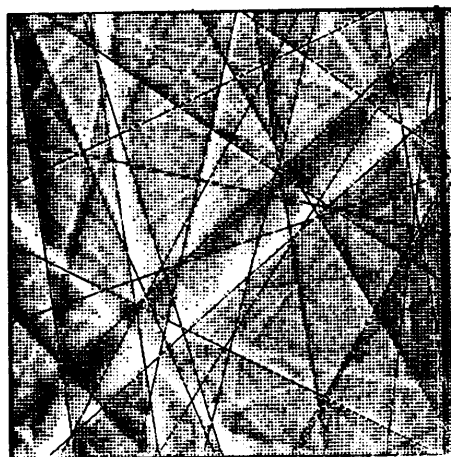
4.2 節のアルゴリズムでは、 $P(\rho, \theta)$, $\bar{S}$, $\bar{V}$ をそれぞれ独立した評価基準として用いたが、これらを組み合わせた評価基準を考えることもできる。また、今回用いた Hough 変換では、入力画像が単なる点の集合からなるものとして、 $0^\circ \leq \theta < 180^\circ$ のすべての範囲において軌跡を描いた。しかし、一般には各点において線 (エッジ) の方向がわかっている場合が多く、そうし



(a)



(b)



(c)

図 14 実験結果

Fig. 14 Experimental result.

た方向の前後の区間に対応する軌跡の部分のみを描くことにすれば、 $\rho\theta$ 空間での不必要な軌跡の重なり合いを避けることができ、直線検出がより容易となる。

6. 実験結果

前章の考察に基づき、図 14 (a) に示す画像に対し直線群検出の実験を行った。この画像は、金属結晶の電子顕微鏡写真で、その大きさは 128×128 である。実験では、まず Sobel オペレータにより画像を微分し、各点におけるエッジ強度とその方向を求め、閾値処理によりエッジ強度の大きい点を抽出した。この際閾値は多少低くし、できるだけエッジ点が連続するようにした (図 14 (b))。

Hough 変換では、抽出された各エッジ点でのエッジの方向 α_i の前後 45° の区間のみの軌跡を描いた。図 13 は、Hough 変換において軌跡を描く区間を $0^\circ \sim 180^\circ$ とした場合と $\alpha_i - 45^\circ \sim \alpha_i + 45^\circ$ とした場合における軌跡の累積度数の極大値の数を表したもので、後者の場合冗長なピークの数が大幅に減少しているのがわかる。ここで極大点の選び方は、2 章の条件 (1), (2) を用いた。

直線群検出においては、 $t=25$ とし、 $A(\alpha)$ の対称性の測度に対する閾値 t_i を $P(\rho, \theta)$ の大きさに応じて次のように変化させた (t_0 は以前と同じ 0.6 に設定した)。

$$t_i = \begin{cases} = 0.6 & P(\rho, \theta) \leq 30 \\ = 0.3 + 0.01(60 - P(\rho, \theta)) & 30 < P(\rho, \theta) < 60 \\ = 0.3 & P(\rho, \theta) \geq 60 \end{cases}$$

すなわち、 $P(\rho, \theta)$ と $\bar{S}$ とを組み合わせた評価基準を用いたわけである。

図 14 (b), (c) は、検出された直線をエッジ画像、原画像の上に重ねて表示したもので、おおむね良好な結果が得られている。検出したい直線がいくつか残されているが、この原因は、5 章で述べたものと同様、すぐ近くにそれと平行な直線があるために、軌跡の累積度数の分布が重なり合っていることにある。特に図 14 (a) は細い線状の対象から構成されているため、画像を微分することによりその両側に互いに平行なエッジ点の並びが生成され、直線検出を困難にしている。

7. 結 論

本稿では、Hough 変換において直線の連続性がパラメータ空間へどのように写像されるのかを解析的に

求め、その性質を利用した直線群検出アルゴリズムを提案した。また実験によってそのアルゴリズムが有効であることを示した。今後の課題としては、実験例から明らかなように、近接した平行直線がある場合、それらをいかにして安定に検出するかという問題がある。そのためには、複数解像度の画像・パラメータ空間を組み合わせた階層的な解析が有効であると考えられる。

参 考 文 献

- 1) Duda, R.O. and Hart, P.E.: *Pattern Recognition and Scene Analysis*, Wiley, New York (1973).
- 2) Kimme, C., Ballard, D.H. and Sklansky, J.: Finding Circles by an Array of Accumulators, *CACM*, Vol. 18, No. 2, pp. 120-122 (1975).
- 3) Tsuji, S. and Matsumoto, F.: Detection of Ellipses by a Modified Hough Transformation, *IEEE Trans.*, Vol. C-27, No. 8, pp. 777-781 (1978).
- 4) Ballard, D.H.: Generalizing the Hough Transform to Detect Arbitrary Shapes, *Pattern Recogn.*, Vol. 13, No. 2, pp. 111-122 (1981).
- 5) Ballard, D.H. and Sabbah, D.: On Shapes, *Proc. of 7th International Conference on Artificial Intelligence*, pp. 607-612 (1981).
- 6) Sloan, K.R. Jr.: Dynamically Quantized Pyramids, *ibid*, pp. 734-736 (1981).
- 7) O'Rourke, J.: Dynamically Quantized Spaces for Focusing the Hough Transform, *ibid*, pp. 737-739 (1981).
- 8) O'Gorman, F. and Clowes, M.B.: Finding Picture Edges through Collinearity of Feature Points, *IEEE Trans.*, Vol. C-25, pp. 449-455 (1976).
- 9) Brown, C.M.: Inherent Bias and Noise in the Hough Transform, *IEEE Trans.*, Vol. PAMI-5, No. 5, pp. 493-505 (1983).
- 10) Sklansky, J.: On the Hough Technique for Curve Detection, *IEEE Trans.*, Vol. C-27, No. 10, pp. 923-926 (1978).
- 11) Shapiro, S.D.: Feature Space Transforms for Curve Detection, *Pattern Recogn.*, Vol. 10, pp. 129-143 (1978).
- 12) Shapiro, S.D. and Iannino, A.: Geometric Constructions for Predicting Hough Transform Performance, *IEEE Trans.*, Vol. PAMI-1, No. 3, pp. 310-317 (1979).

(昭和 59 年 11 月 16 日受付)

(昭和 60 年 5 月 9 日採録)

Hough 変換の幾何学的性質と直線群検出への応用†

松 山 隆 司** 長 尾 真††

本論文では、Hough 変換の幾何学的性質を表す 2, 3 の定理を示し、それらの性質を利用した直線群検出アルゴリズムを提案する。従来 Hough 変換を用いた直線検出では、パラメータ空間における軌跡の累積度数を唯一の評価基準としていた。ここでは、まず画像空間における直線上の点の連続性が、パラメータ空間にどのように写像されるのかを解析的に調べる。次にその結果に基づきパラメータ空間における軌跡群の分布形状を評価し、直線検出の性能および精度の向上をはかる。特に画像内に長短さまざまな直線群が含まれている場合、単なる軌跡の累積度数の大きさのみではそれらをうまく検出することはむずかしい。ここで提案するアルゴリズムでは、累積度数の大きさとともに直線上の点の連続性を表す評価基準を用いることにより、そうした画像からもうまく直線群を検出することができる。実験では、金属結晶の電子顕微鏡写真に対してこのアルゴリズムを適用し、良好な結果を得ることができた。

1. はじめに

Hough 変換は、直線、円、楕円などのパラメータ表現された図形を検出する方法として、様々な画像に対して使われてきた^{1)~3)}。最近では任意形状図形の検出を行う一般化 Hough 変換も提案され⁴⁾、3次元物体の位置・姿勢の決定にも応用されている⁵⁾。

しかし実用的な観点からは次のような問題がある。

- (1) 画像中の各（特徴）点に対してパラメータ空間での軌跡をそれぞれ描くため、計算時間がかかる。
 - (2) 形状を表すパラメータの数が増すと、パラメータ空間の大きさが指数的に増加する。
 - (3) 画像に含まれる対象図形が1個に限られる場合は、その検出は比較的容易であるが、多数の図形が同時に存在するときは、それら全部をうまく検出するのがむずかしい。
- (1), (2) の問題解決のためには、以下のような方法が提案されている。
- (a) すべてのパラメータを同時に求めるのではなく、逐次的に決定する^{3), 5)}。
 - (b) パラメータ空間に描かれる軌跡群はパラメータ空間に一様に分布するわけではないので、Quad Tree, kd Tree を用いてパラメータ空間を動的に分割・管理する^{6), 7)}。

本論文では、

$$\rho = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (1)$$

† Geometric Properties of the Hough Transform and Their Application to Line Group Detection by TAKASHI MATSUYAMA and MAKOTO NAGAO (Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Kyoto University).

†† 京都大学工学部電気工学第二学科

* 現在 東北大学工学部情報工学科

とパラメータ化された直線の検出において、(3)の問題、すなわち画像中に多くの直線が含まれる場合、それらすべてを検出する問題、に対する解決法を提案する。以下で行う Hough 変換ではすべて画像の中央を xy 座標の原点として考える。これは雑音による特徴点の位置のゆらぎの影響を低減させるためである^{10)~12)}。また、以下では (x, y) , (ρ, θ) など添字なしの記号は変数を表し、 (x_1, y_1) , (ρ_0, θ_0) などの添字付きのものは定数を表す。

2. 直線群検出における問題点

図1の画像を例として考える。この画像は、大きさが 128×128 で、もとの濃淡画像を微分、2値化して得られたエッジ点（値1）を表す。Hough 変換では、各エッジ点の座標値 (x_i, y_i) を(1)式に代入し、 $\rho\theta$ のパラメータ空間における軌跡を描き、軌跡が集中している点 (ρ_j, θ_j) を直線の方程式とする（図5参照）。

図2(a)~(d)は、 $\rho\theta$ 空間において、

- (1) 軌跡の累積度数が t 以上 ($t=50, 40, 35, 30$), かつ

- (2) $\rho\theta$ 空間において 5×5 の近傍内で累積度数が極大

の条件で抽出した直線群を表す。ここで、 $\rho\theta$ 空間は直交座標系で表され、 ρ 方向は1画素長、 θ 方向は 1° きざみでデジタル化されている。

これらの結果から明らかなように、長い直線（分）はうまく検出できるが、短いものを検出しようとして t を小さくすると、不必要な“偽”の直線が多数検出されてしまう。図3は閾値 t に対する $\rho\theta$ 空間でのピーク（検出される直線）の数を示したもので、 t の減少に伴いピークの数が増加する。

また、図4に示すように、 $\rho\theta$ 空間での軌跡の累積度数の極大値は雑音の影響で鋭いものとはならず、上の(2)の条件で選ばれるものが必ずしも最適な直線に対応するわけではない。

従来この問題に対しては、エッジの強さを利用したり⁸⁾、信号処理の立場からピークの尖鋭化を行う方式⁹⁾が提案されている。また、画像中の雑音によるエッジ点の位置のゆらぎがピーク検出に与える影響についての解析も行われている^{10)~12)}。しかし、いずれの方法にしても $\rho\theta$ 空間における軌跡の累積度を唯一の評価基準と考えていることには変わりなく、直線群検出のためには別の評価基準が必要となる。

本稿では、まず画像空間における直線上の点の連続性が、パラメータ空間にどのように写像されるのかを解析的に調べる。次にその結果に基づき、パラメータ

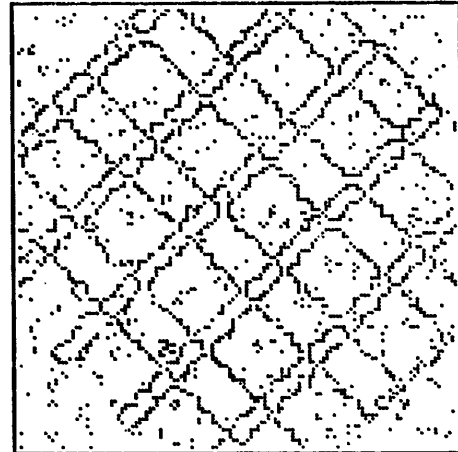


図1 テスト画像
Fig. 1 Test pattern.

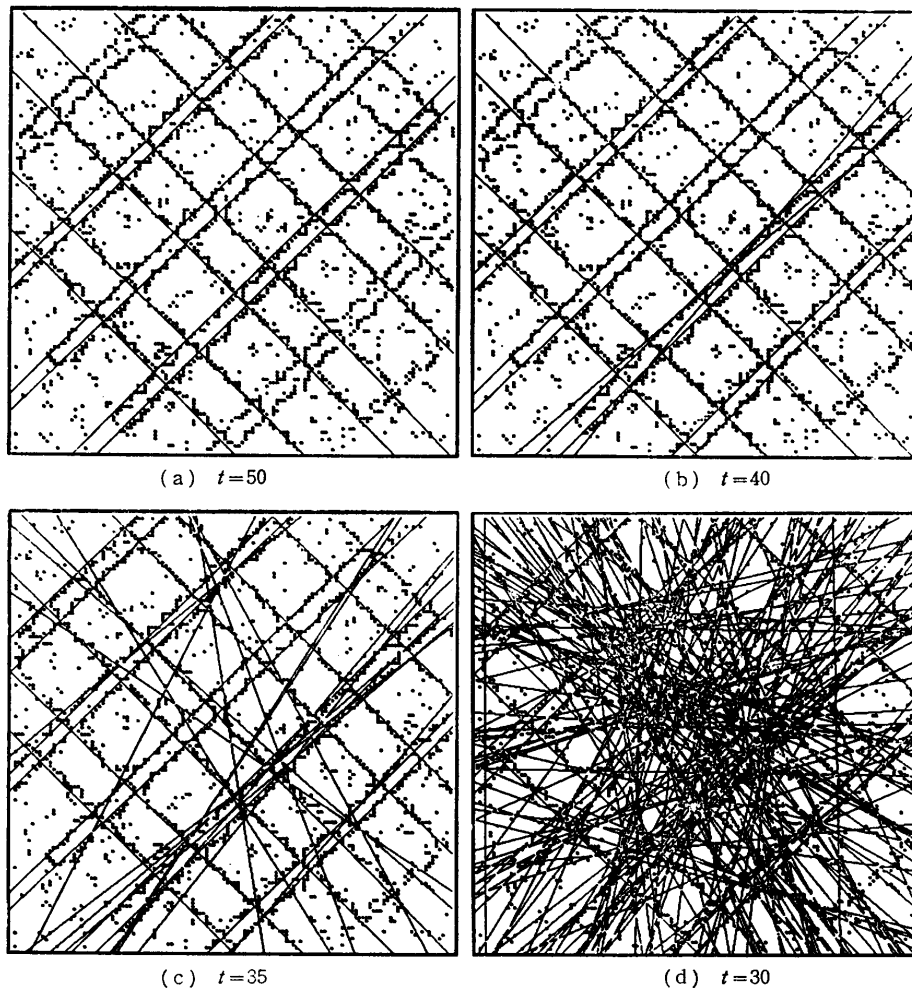


図2 パラメータ空間の極大値に対応する直線群
Fig. 2 Straight lines detected as local maxima in the parameter space.

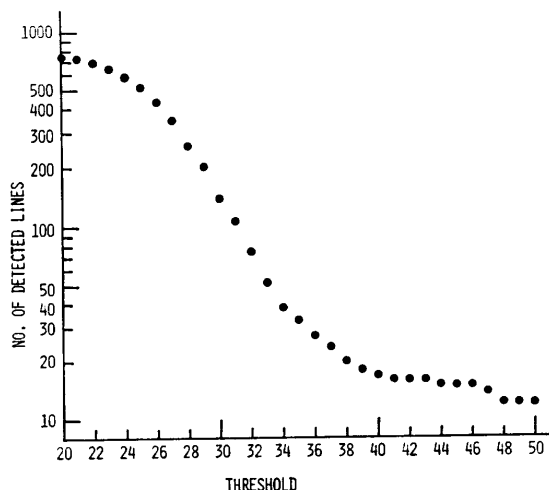


図3 パラメータ空間の極大値の数の変化
Fig. 3 Number of detected lines and threshold values for local maximum detection in the parameter space.

空間における軌跡の累積度数の分布形状を評価し、直線検出の性能および精度の向上をはかる。

3. Hough 変換の幾何学的性質

3.1 直線の連続性

$I(x, y)$, $P(\rho, \theta)$ をそれぞれ画像 (値1の点が含まれる), パラメータ空間とする。従来直線検出の評価基準として用いられてきた軌跡の累積度数 $P(\rho, \theta)$ は、画像 $I(x, y)$ において直線

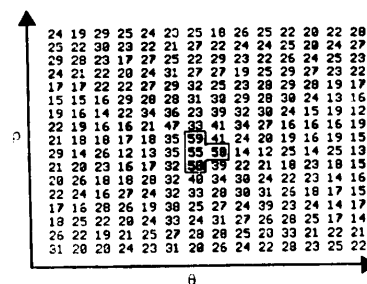


図4 不尖鋭な極大値
Fig. 4 Blurred local maximum in the parameter space.

$$\rho_0 = x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0 \quad (2)$$

がいくつかの点を通過しているのかを表している。ここで、 $P(\rho, \theta)$ はパラメータ空間中のある点 (ρ, θ) における軌跡の累積度数を表す。

図5に示すように(2)の直線上に並んだ3点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ を考え、それらによって $P(\rho, \theta)$ に描かれる軌跡をそれぞれ T_1, T_2, T_3 とする。

$$T_i: \rho = x_i \cos \theta + y_i \sin \theta \quad (i=1, 2, 3) \quad (3)$$

このとき次の定理が成り立つ。

【定理1】 $P(\rho, \theta)$ 中の点 (ρ_0, θ_0) における軌跡 T_1, T_2, T_3 の接線方向を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とすると、 $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ または $\alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_1$ が成立する。

【証明】 今、点Bを線分ACの m 対 n の内分点とする。

$$x_2 = (nx_1 + mx_3)/(m+n),$$

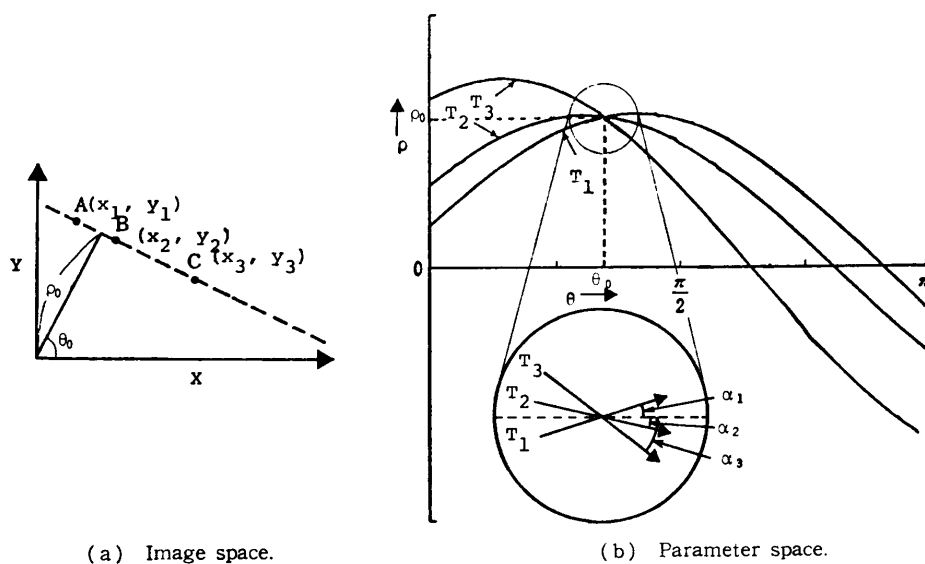


図5 画像空間・パラメータ空間における直線の連続性
Fig. 5 Continuity in the image and parameter spaces.

$$y_2 = (ny_1 + my_3)/(m+n) \quad (4)$$

(3) 式をそれぞれ θ で微分すると,

$$d\rho/d\theta = -x_i \sin \theta + y_i \cos \theta \quad (i=1, 2, 3). \quad (5)$$

点 (ρ_0, θ_0) における接線の方法 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は,

$$\tan \alpha_i = -x_i \sin \theta_0 + y_i \cos \theta_0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (6)$$

となる。(4) 式と (6) 式より,

$$\begin{aligned} \tan \alpha_2 &= -\{(nx_1 + mx_3)/(m+n)\} \sin \theta_0 \\ &\quad + \{(ny_1 + my_3)/(m+n)\} \cos \theta_0 \\ &= (n \tan \alpha_1 + m \tan \alpha_3)/(m+n). \end{aligned}$$

$\tan \alpha$ は α に関して単調関数なので

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \quad \text{または} \quad \alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_1$$

となる。

(証明終)

この定理より次のことが直ちに言える。

【定理 2】 図 5 に示すように、画像 $I(x, y)$ 中の 2 点 $A(x_1, y_1)$, $C(x_3, y_3)$ を通る直線 $\rho_0 = x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0$ を考える。線分 AC 上を A から C へ連続的に点が移動するとき、その点が $P(\rho, \theta)$ に描く軌跡の点 (ρ_0, θ_0) における接線の方法は、 α_1 から α_3 へ連続かつ単調に変化する。ここで、 α_1, α_3 は定理 1 と同様、点 A, C が $P(\rho, \theta)$ に描く軌跡の点 (ρ_0, θ_0) における接線の方法を表す。

定理 2 より、 $I(x, y)$ 中の連続直線と破線とは $P(\rho, \theta)$ において図 6 に示すような軌跡群に変換される。ここで、図 6 (b) は画像中の直線に対応する $P(\rho, \theta)$ 中の点の近傍における軌跡群の分布形状を表す。したがって、理論的には、 $P(\rho, \theta)$ における極大点の近傍での軌跡群の分布形状を調べることで、連続直線と破線とを識別することが可能であることがわかる。

3.2 直線上の距離

ここでは、 $I(x, y)$ における直線上の距離 (線分の長さ) が Hough 変換によって $P(\rho, \theta)$ へどのように写像されるのかを調べる。

今、点 (x, y) が (2) 式の直線上を速度 1 で移動していると考えると、

$$x = X(t), \quad y = Y(t) \quad (7)$$

と表すことができ、仮定より

$$(dX/dt)^2 + (dY/dt)^2 = 1 \quad (8)$$

となる。ここで t は時間を表す。

3.1 節と同様に点 $(X(t), Y(t))$ が $P(\rho, \theta)$ において描く軌跡の点 (ρ_0, θ_0) における接線の方法を $\alpha(t)$ とすると、

$$\tan \alpha(t) = -X(t) \sin \theta_0 + Y(t) \cos \theta_0. \quad (9)$$

(2), (9) を t で微分すると、

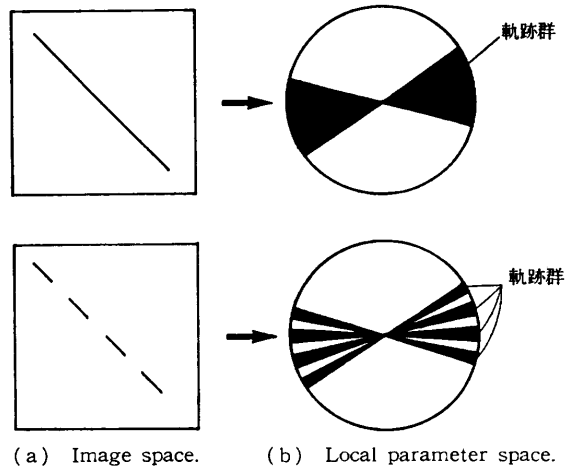


図 6 画像空間・パラメータ空間における連続直線と破線

Fig. 6 Continuous line and broken line in the image and parameter spaces.

$$dX(t)/dt = -\tan \theta_0 \cdot dY(t)/dt \quad (10)$$

$$\begin{aligned} d\alpha(t)/dt &= \cos^2 \alpha(t) (-\sin \theta_0 \cdot dX(t)/dt \\ &\quad + \cos \theta_0 \cdot dY(t)/dt) \end{aligned} \quad (11)$$

(10), (8) 式より、

$$\begin{aligned} dX(t)/dt &= \pm \sin \theta_0 \\ dY(t)/dt &= \mp \cos \theta_0 \quad (\text{複号同順}) \end{aligned} \quad (12)$$

(12), (11) 式より、

$$d\alpha(t)/dt = \mp \cos^2 \alpha(t). \quad (13)$$

ここで符号は点 (x, y) の移動方向に対応する。

(13) 式の意味は次のように考えられる。(8) 式の仮定から時間 t の変化は、直線上での位置の変化 (線分の長さ) に等しい。したがって、直線上で点が微小距離 Δ だけ移動した場合、 $P(\rho, \theta)$ 中の軌跡の (ρ_0, θ_0) における接線の方法の変化量は $\Delta \cos^2 \alpha(t)$ となり、その大きさは t の値 (直線上での点の位置) に依存する。すなわち、直線上で同一長の線分でも、それらに対応する $P(\rho, \theta)$ での軌跡の接線の方法変化は、直線上の線分の位置によって変化する。(図 7: 図 7 (b) は $P(\rho, \theta)$ 中の点 (ρ_0, θ_0) を中心とした円形近傍における軌跡群の分布形状を表す。画像中で同じ長さ l の線分 1-2, 3-4, 5-6 に対応する $P(\rho, \theta)$ での軌跡群の点 (ρ_0, θ_0) における接線の方法はそれぞれ $<102^\circ$, $<304^\circ$, $<506^\circ$ の内に集中し、一般に $<102^\circ \approx <304^\circ \approx <506^\circ$, $<102^\circ \approx <506^\circ$ となる。ここで、 $<$ は図 7 (b) の黒く

* 図 6 (b) の破線の場合も正確に言うと図 7 (b) と同様黒く塗られた扇形領域の広がり角はそれぞれ異なることになるが、図 6 の場合は連続直線との比較が主たる目的であったのであえて同じ広がり角の扇形領域として描いた。

塗られた扇形領域を表す。また、 κ は扇形の広がり角が等しくないことを表す。)

4. 直線群の検出

4.1 デジタル画像における幾何学的性質の確認

無限直線 $\rho_0 = x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0$ を考え、それを Hough 変換し、 $P(\rho, \theta)$ 中の点 (ρ_0, θ_0) を中心とした小さな円形近傍内の軌跡群の分布形状を次のようにして調べる (図 8)。まず、 (ρ_0, θ_0) を中心に半径 r の円形領域を考え、 α 方向の半径に沿った軌跡の累積度数の和を求める。すなわち、

$$A(\alpha) = \int_{+0}^r P(\rho, \theta) d\ell_\alpha. \quad (14)$$

ここで積分は、 (ρ_0, θ_0) から始め (点 (ρ_0, θ_0) 自身は除く)、 α 方向の半径に沿って距離 r だけ行う ((14) 式中で $+0$ は点 (ρ_0, θ_0) 自身は除くこと、 $\int d\ell_\alpha$ は点 (ρ_0, θ_0)

から α 方向の直線に沿った積分を表す)。 r が十分小さいとき、 $A(\alpha)$ は図 8 (b) のようになり、(13) 式より定数倍を除き $1/\cos^2 \alpha$ となるはずである。

図 9 (a) の画像を Hough 変換し、その直線に対応する (ρ_0, θ_0) 付近の累積度数の分布を求めると図 9 (b) となる。ここで画像は 256×256 の大きさで、 $P(\rho, \theta)$ は先の例と同じく、 ρ 方向は 1 画素長、 θ 方向 1° でデジタル化されている。(13) 式で示されたように、 α が 90° (270°) に近づくにつれ、 $P(\rho, \theta)$ での軌跡の累積度数の分布が密になる (値が大きくなる) のがよくわかる。ピークの左右で累積度数の分布が少しずれているのは、デジタル的に軌跡を描く際の近似誤差による。

図 9 (c) は、円形近傍の半径 10、方向角 α のきざみを 1° としたときの $A(\alpha)$ のグラフである。理論的には、図 9 (c) に $\cos^2 \alpha$ を掛けるとグラフが平坦になるはずである。しかし、実際には図 9 (d) に示すよう

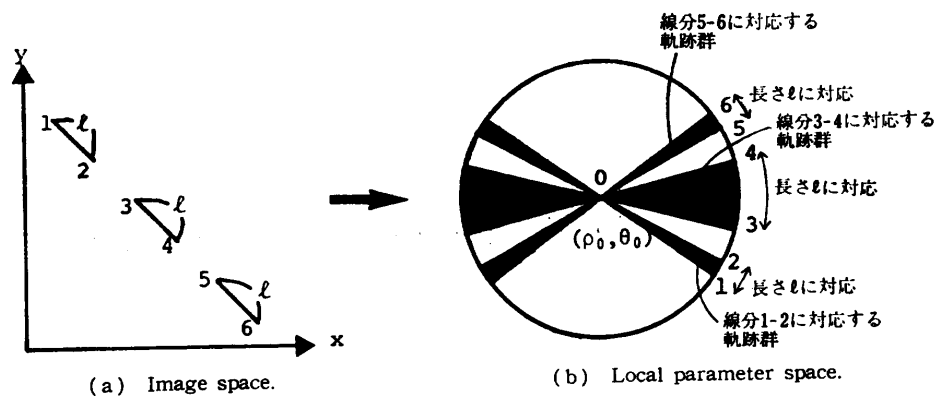


図 7 画像空間・パラメータ空間における線分の長さ
Fig. 7 Length of line segments in the image and parameter spaces.

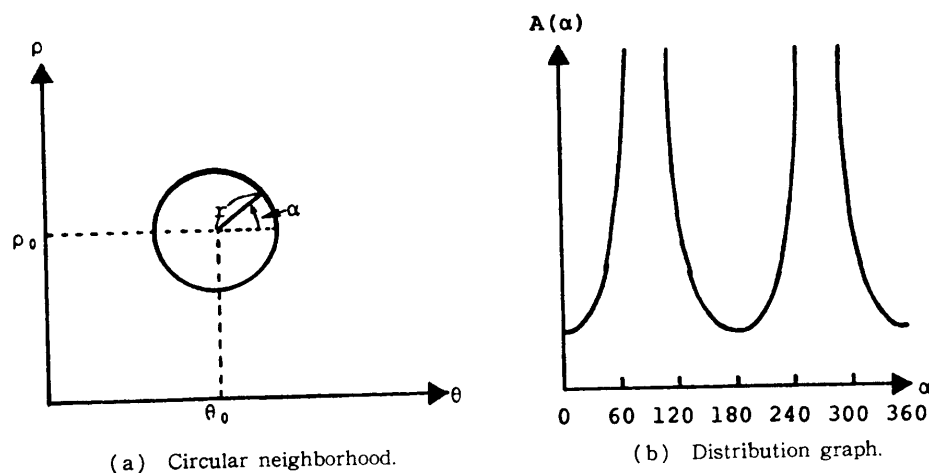


図 8 円形近傍内における累積度数の分布形状
Fig. 8 Measuring shape of distribution in the circular neighborhood.

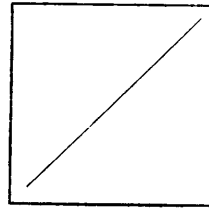
に、上に凸なグラフとなってしまう (図 9 (c) と (d) では縦軸のスケールが異なる). この理由は, $P(\rho, \theta)$ におけるピーク (ρ_0, θ_0) のすぐ近傍では方向角 α に対する分解能が非常に悪く (8 近傍では 45° きざみしかない), さらにそうした近傍に軌跡が集中するため, 累積度数の値が大きくなるためである (図 9 (b)). すなわち, 連続空間においては, $\alpha=0^\circ$ 方向の軌跡の分布密度は小さいにもかかわらず, デジタル空間では点 (ρ_0, θ_0) の $\alpha=0^\circ$ 方向の隣接点には, $-22.5^\circ \leq \alpha < 22.5^\circ$ の間のすべての軌跡が通ることになり, その累積度数が $A(0^\circ)$ に加えられてしまうからである.

また, 図 9 (c) において 90° , 270° 付近で図 8 (b) のように値が無限大にならないのは, 図 9 (a) の直線が有限の線分であるからである. 理論上は, 線分の両端に対応する方向角 α_1, α_2 で $A(\alpha)$ は急に 0 となり, $|\alpha_1|, |\alpha_2| < 90^\circ$, $\alpha_1 < \alpha_2$ とすると,

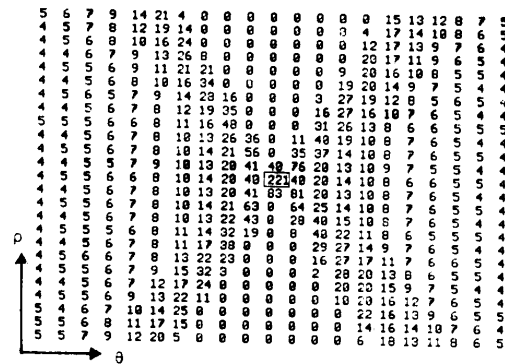
$\alpha_2 < \alpha < \alpha_1 + 180^\circ$, $\alpha_2 + 180^\circ < \alpha < \alpha_1 + 360^\circ$ の範囲 (ちょうど 90° , 270° をはさむ範囲) で常に 0 となるはずである. したがって, $A(\alpha)$ のグラフにおけるそうしたピークの端に対応する方向角を求めると, 逆に画像中の線分の端点の位置を決定することが可能である.

しかし, 実際には図 9 (c) が示すように, (i) 実際の $A(\alpha)$ は急に 0 とはならないし, (ii) 90° , 270° 付近でも完全に 0 とはならない. (i) の理由は, 実際には小さな円形近傍内でも軌跡は曲っているにもかかわらず, $A(\alpha)$ の計算は α 方向の直線に沿って行ったことによる. (ii) の原因は, $P(\rho, \theta)$ のデジタル化の影響である. このような理由から, $A(\alpha)$ の形から画像中の線分の端点の位置を正確に求めるのはむずかしい. また同様の理由によって, $A(\alpha)$ の形から画像中の直線が連続直線か破線かを厳密に識別することもかなり困難であると言える.

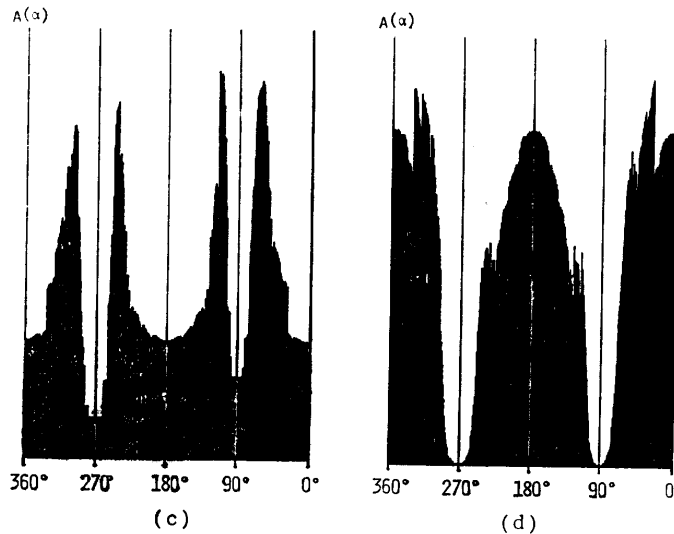
以上まとめると, 実際のデジタル処理において



(a) Image of line segment.



(b) Distribution in the parameter space.



(c)

(d)

図 9 線分のデジタル Hough 変換

Fig. 9 The digital Hough transform of a line segment.

は, 3章で示した性質を厳密に適用するのは現実的ではないと言える. しかし, 定理 2 で述べた基本的性質 (Hough 変換における直線の連続性) は $A(\alpha)$ の形状にかなり忠実に反映されており, それを利用することにより, 2章で述べた直線群検出のための新たな評価基準を作成できると考えられる.

4.2 直線群検出アルゴリズム

ここでは, 2章で述べた直線群検出における二つの課題, すなわち, (i) 余分な直線を検出することなく短い直線をも探し出す, (ii) 直線のパラメータのより正確な推定を行う, に対処するためのアルゴリズムについて述べる.

[ステップ 1] 画像を Hough 変換したのち, ρ, θ 空間において次の条件を満たす (ρ, θ) を直線の 1 次候補とする.

$$P(\rho, \theta) \geq t \quad (t \text{ は与えられた閾値}) \quad (15)$$

$$P(\rho, \theta) \geq 0.9 \max_{k,l} P(\rho + kd_\rho, \theta + ld_\theta)$$

$$(k, l=0, \pm 1) \quad (16)$$

ここで $P(\rho, \theta)$ は (ρ, θ) における累積度数, d_ρ, d_θ , $(\rho + kd_\rho, \theta + ld_\theta)$ はそれぞれ $\rho\theta$ 空間のサンプル間隔, および点 (ρ, θ) の隣接点を表す. (16)式の右辺に 0.9 を掛けているのは, 2章でも述べたように累積度数の極大点が必ずしも最適な直線パラメータを表すわけではなく, その近傍で極大値と近い値のものは候補として残すためである (0.9 の値自身は実験的に定めた).

【ステップ2】 ステップ1で得られた候補点の各々について, それを中心とした半径 r (実験では7) の円形近傍内の軌跡群の分布形状を, 4.1節で述べたように $A(\alpha)$, ($\alpha=0^\circ \sim 359^\circ$) として求める (実験では α のきざみを 1° としたが, 実際には半径7の円内では 10° 程度の解像度しかない). 次にこの $A(\alpha)$ を利用して, その候補点の良さを次のようにして求める.

(2-1) 今注目している候補点を (ρ_i, θ_i) とし, 分布関数を $A_i(\alpha)$ とする. まず, 直線 $\rho_i = x \cos \theta_i + y \sin \theta_i$ と画像の枠との交点 $S_i(x_{si}, y_{si}), E_i(x_{ei}, y_{ei})$ を計算し, それらに対応する軌跡の (ρ_i, θ_i) における接線方向角

$$\alpha_{si} = \tan^{-1}(-x_{si} \cos \theta_i + y_{si} \sin \theta_i) \quad (17)$$

$$\alpha_{ei} = \tan^{-1}(-x_{ei} \cos \theta_i + y_{ei} \sin \theta_i) \quad (18)$$

を求める. ここで一般性を失うことなく, $\alpha_{ei} > \alpha_{si}$, $|\alpha_{si}|, |\alpha_{ei}| < 90^\circ$ と仮定する.

(2-2) 2章の定理1より, 画像上で2点 S_i, E_i を結ぶ線分上の任意の点によって $\rho\theta$ 空間に描かれる軌跡の点 (ρ_i, θ_i) における接線方向角は α_{si} と α_{ei} の間に存在する. したがって, 分布関数 $A_i(\alpha)$ において, $\alpha_{si} \leq \alpha \leq \alpha_{ei}$, $\alpha_{si} + 180^\circ \leq \alpha \leq \alpha_{ei} + 180^\circ$ 以外の区間に存在する値は, $\rho\theta$ 空間における“雑音成分” (今注目している直線上にない点の影響) であると言える. そこでその平均値

$$n_i = E[A_i(\alpha) | \alpha_{si} < \alpha < \alpha_{ei} + 180^\circ, \alpha_{si} + 180^\circ < \alpha < \alpha_{ei} + 360^\circ]$$

を計算する. ここで, $E[\cdot]$ は平均値を表し, 角度は360を法として考える.

(2-3) 雑音の平均値 n_i を $A_i(\alpha)$ から除く.

$$A'_i(\alpha) = \begin{cases} A_i(\alpha) - n_i & \alpha_{si} \leq \alpha \leq \alpha_{ei}, \alpha_{si} + 180^\circ \leq \alpha \leq \alpha_{ei} + 180^\circ \\ 0 & \alpha_{si} < \alpha < \alpha_{ei} + 180^\circ, \alpha_{si} + 180^\circ < \alpha < \alpha_{ei} + 360^\circ \end{cases} \quad (19)$$

また, $A_i(\alpha) - n_i < 0$ のときは, $A'_i(\alpha) = 0$ とする.

(2-4) $A'_i(\alpha)$ の分布の対称性を次式で計算する.

$$S_i = 1 - \left(\frac{\sum_{\alpha} |A'_i(\alpha) - A'_i(\alpha + 180^\circ)|}{\sum_{\alpha} \max(A'_i(\alpha), A'_i(\alpha + 180^\circ))} \right) \quad (20)$$

ここで $\sum$ は $\alpha_{si} \leq \alpha < \alpha_{ei}, \alpha_{si} + 180^\circ \leq \alpha \leq \alpha_{ei} + 180^\circ$ に対して行う. 2章の議論から, (ρ_i, θ_i) が真の直線に対応するならば, $S_i \approx 1.0$ となるはずである.

(2-5) 直線のパラメータ決定の精度向上

(2-1)~(2-4) の処理を $(\rho_i \pm 0.5d_\rho, \theta_i \pm 0.5d_\theta)$ の4点に対してそれぞれ行い, S_i の値が最大となるものを選び, そのときの (ρ, θ) を $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i)$, $A'_i(\alpha)$ を $\bar{A}_i(\alpha)$, S_i を $S_i(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i)$ とする. この計算において, $(\rho_i + 0.5d_\rho, \theta_i + 0.5d_\theta)$ のように $P(\rho, \theta)$ 空間のサンプル点ではない点における軌跡の累積度数 $P(\rho_i + 0.5d_\rho, \theta_i + 0.5d_\theta)$ は, その周囲の四つのサンプル点における値から内挿によって求める.

$$S_i(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i) \geq t_s \quad (t_s \text{ は与えられた閾値}) \quad (21)$$

$$2rP(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i) < \sum_{\alpha} \bar{A}_i(\alpha) \quad (22)$$

の条件を満たすものを直線の2次候補とする. ここで, (22)式の条件は, もし $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i)$ が雑音成分のみによる偽のピークならば(19)式によってすべての α に対して $A'_i(\alpha) \approx 0$ となり, $S_i(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i)$ 自身が意味を持たなくなるのを防ぐためのものである.

図10(a)に $t=30$, $t_s=0.5$ として求めた直線の2次候補を示す. 図2(d)に比べ大幅に偽の直線が減少し, かつ直線のパラメータがより正確になっているのがわかる.

【ステップ3】 上の処理によって $\rho\theta$ 空間中の各候補点に対して求められた対称性の測度 $S_i(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i)$ を用いて非極大点の抑制を行う. すなわち, 次の条件を満たすものを直線の3次候補とする.

$$S_i(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i) \geq \max_j S_j(\bar{\rho}_j, \bar{\theta}_j) \quad (23)$$

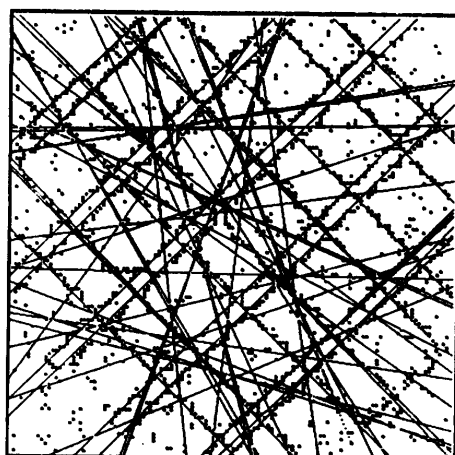
ここで $(\bar{\rho}_j, \bar{\theta}_j)$ は $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i)$ を中心とした 5×5 の近傍に含まれる直線の2次候補を表す. また, (ρ_i, θ_i) と (ρ_j, θ_j) が隣接しており, $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i) = (\bar{\rho}_j, \bar{\theta}_j)$ のときは, $S_i(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i) = S_j(\bar{\rho}_j, \bar{\theta}_j)$ となるため, いずれか一方のみを残し, 他方を除去する. 図10(b)にこの処理によって選ばれた直線の3次候補を示す.

【ステップ4】 これまでに選ばれた直線の3次候補のうち, 次の条件を満たすものを最終結果とする.

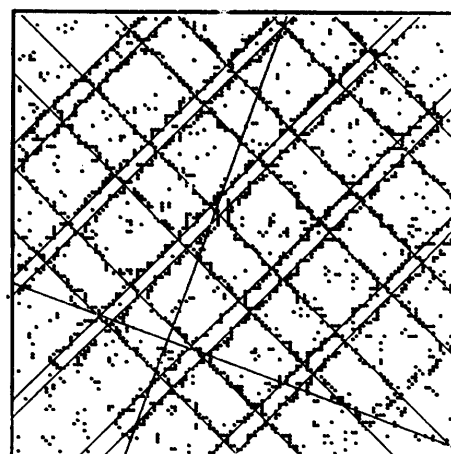
$$\{ \text{VAR } 1[\bar{A}_i(\alpha) | \bar{\alpha}_{si} \leq \alpha \leq \bar{\alpha}_{ei}] + \text{VAR } 2[\bar{A}_i(\alpha) | \bar{\alpha}_{si} + 180^\circ \leq \alpha \leq \bar{\alpha}_{ei} + 180^\circ] / 2 \}^{1/2} / P(\rho_i, \theta_i) \leq t_v$$

$$(t_v \text{ は与えられた閾値}) \quad (24)$$

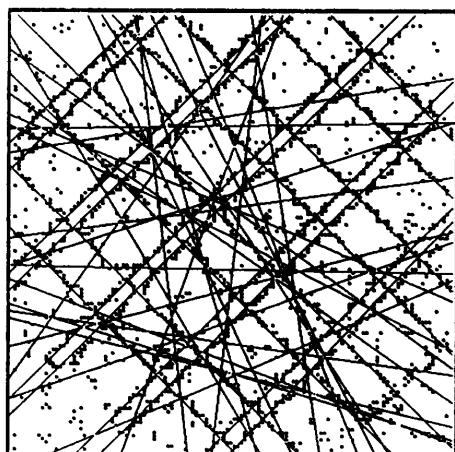
ここで $\bar{A}_i(\alpha), \bar{\alpha}_{si}, \bar{\alpha}_{ei}$ は, それぞれ $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i)$ を中心と



(a) Second candidates.



(a)



(b) Third candidates.

図 10 中間結果

Fig. 10 Intermediate results.

θ	ρ	$\bar{\rho}$	$\bar{\theta}$	$P(\rho, \theta)$	$\bar{S}$	$\bar{V}$
45	-45	45.0	-44.5	61	0.789	0.335
45	-32	45.0	-31.5	47	0.795	0.519
45	-13	45.0	-12.5	78	0.830	0.355
45	1	45.0	0.5	58	0.762	0.474
45	20	45.0	19.5	59	0.723	0.457
45	33	45.0	32.5	70	0.843	0.340
45	52	45.0	51.5	46	0.800	0.375
45	64	44.5	64.0	30	0.864	0.455
70	-35	70.0	-35.5	30	0.791	0.459
135	-40	135.0	-39.5	47	0.689	0.456
135	-18	135.5	-18.0	82	0.738	0.310
135	-13	135.0	-13.5	94	0.544	0.260
135	7	135.0	7.5	60	0.586	0.472
135	12	135.0	11.5	61	0.682	0.435
135	33	135.0	33.0	87	0.731	0.273
135	37	135.0	37.0	60	0.720	0.381
135	64	135.0	63.5	36	0.590	0.337
136	-44	135.0	-43.5	43	0.565	0.440
136	58	136.0	58.5	38	0.749	0.383
160	8	160.0	8.0	30	0.622	0.597

(b)

図 11 最終結果

Fig. 11 Final result.

した軌跡群の分布形状関数 (雑音除去後), 直線 $\rho_i = x \cos \bar{\theta}_i + y \sin \bar{\theta}_i$ と画像の枠との交点が描く軌跡の点 $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i)$ における接線方向を表す。また, $\text{VAR } 1[\cdot], \text{VAR } 2[\cdot]$ は α のそれぞれの区間における $\bar{A}_i(\alpha)$ の分散を表す。つまり, (24) 式の左辺は直線上での点のばらつきを表すもので, この値が小さいと, $P(\rho_i, \theta_i)$ 個の点が直線上で連続的に分布していると言える。

5. 考 察

4.2 節で述べたアルゴリズムによる最終結果を図 11 (a) に示す ($t=30, t_s=0.5, t_e=0.6$, これらの閾値はすべて実験的に求めた)。図 11 (b) にこれらの直線に対する各種のパラメータの値を示す (ρ, θ : デジタル $\rho\theta$ 空間での極大値の位置, $\bar{\rho}, \bar{\theta}$: 極大値の近傍で

求めた直線のパラメータの推定値, $P(\rho, \theta)$: (ρ, θ) における累積度数, $\bar{S}$: ($\bar{\rho}, \bar{\theta}$) の近傍の累積度数分布の対称性, $\bar{V}$: 累積度数分布の分散度)。余分な直線が 2 本残っているが, 画面右上端の短い直線もうまく検出されている。

図 11 (b) を見ると, 135° 方向 (右上がり) の直線群の対称性 $\bar{S}$ が, 45° 方向 (左上がり) のものに比べるとかなり悪くなっている。これは 135° 方向の場合, 画像上で 5~6 画素離れた位置に他の直線があり, その結果, $\rho\theta$ 空間での二つの軌跡の累積度数の分布が互いに重なり合っているためである (図 12)。もちろん, $\rho\theta$ 空間のサンプル間隔を細くすれば重なり合いの影

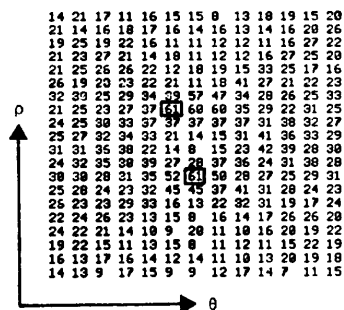


図 12 軌跡群の分布形状

Fig. 12 Interaction between a pair of local distributions in the parameter space.

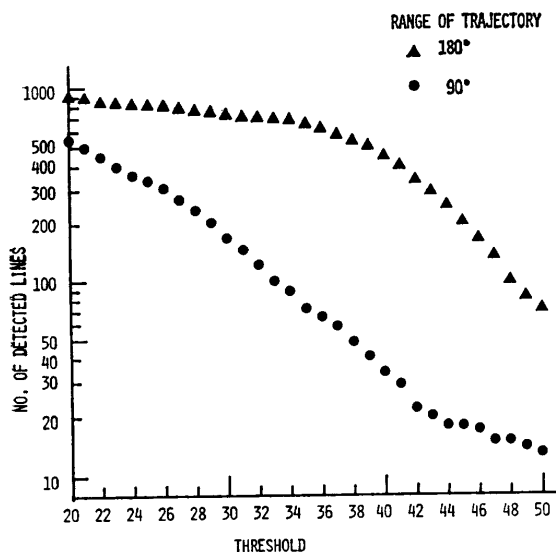
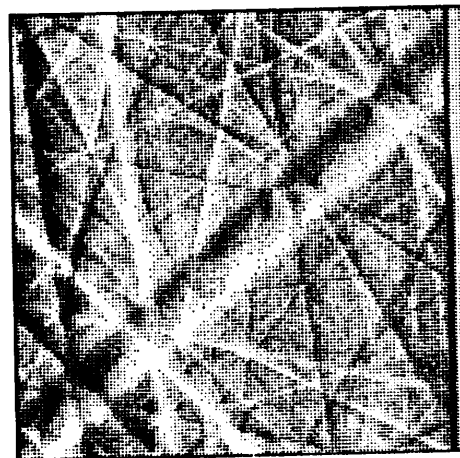


図 13 パラメータ空間の極大値の数の変化

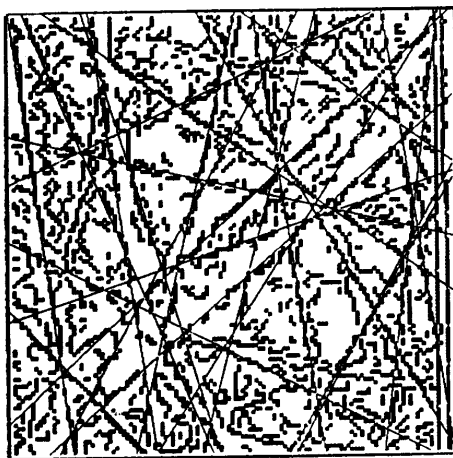
Fig. 13 Number of detected lines and threshold values.

響を減らすことができる。しかし、そうすると画像中での点の位置のゆらぎが $\rho\theta$ 空間で増幅されることになり、累積度数のピークがぼやけてしまう。図 11(a) の右下の短い直線が検出されていないのはこのためである。また、前節のアルゴリズムの (2-5) において $S_i(\rho_i, \theta_i)$ の閾値 t_i を 0.5 と低く設定したのは、ある程度分布の重なりがあっても直線が検出できるようにするためである。

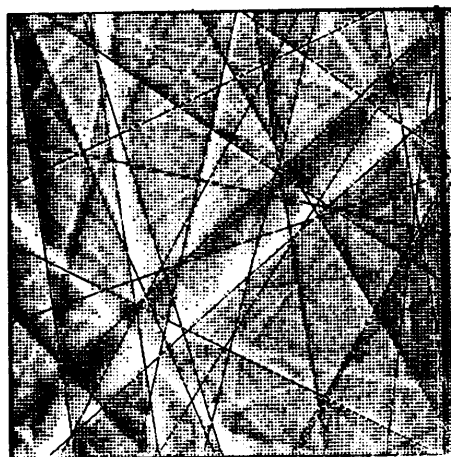
4.2 節のアルゴリズムでは、 $P(\rho, \theta)$, $\bar{S}$, $\bar{V}$ をそれぞれ独立した評価基準として用いたが、これらを組み合わせた評価基準を考えることもできる。また、今回用いた Hough 変換では、入力画像が単なる点の集合からなるものとして、 $0^\circ \leq \theta < 180^\circ$ のすべての範囲において軌跡を描いた。しかし、一般には各点において線 (エッジ) の方向がわかっている場合が多く、そうし



(a)



(b)



(c)

図 14 実験結果

Fig. 14 Experimental result.

た方向の前後の区間に対応する軌跡の部分のみを描くことにすれば、 $\rho\theta$ 空間での不必要な軌跡の重なり合いを避けることができ、直線検出がより容易となる。

6. 実験結果

前章の考察に基づき、図 14 (a) に示す画像に対し直線群検出の実験を行った。この画像は、金属結晶の電子顕微鏡写真で、その大きさは 128×128 である。実験では、まず Sobel オペレータにより画像を微分し、各点におけるエッジ強度とその方向を求め、閾値処理によりエッジ強度の大きい点を抽出した。この際閾値は多少低くし、できるだけエッジ点が連続するようにした (図 14 (b))。

Hough 変換では、抽出された各エッジ点でのエッジの方向 α_i の前後 45° の区間のみの軌跡を描いた。図 13 は、Hough 変換において軌跡を描く区間を $0^\circ \sim 180^\circ$ とした場合と $\alpha_i - 45^\circ \sim \alpha_i + 45^\circ$ とした場合における軌跡の累積度数の極大値の数を表したもので、後者の場合冗長なピークの数が大幅に減少しているのがわかる。ここで極大点の選び方は、2 章の条件 (1), (2) を用いた。

直線群検出においては、 $t=25$ とし、 $A(\alpha)$ の対称性の測度に対する閾値 t_i を $P(\rho, \theta)$ の大きさに応じて次のように変化させた (t_0 は以前と同じ 0.6 に設定した)。

$$t_i = \begin{cases} = 0.6 & P(\rho, \theta) \leq 30 \\ = 0.3 + 0.01(60 - P(\rho, \theta)) & 30 < P(\rho, \theta) < 60 \\ = 0.3 & P(\rho, \theta) \geq 60 \end{cases}$$

すなわち、 $P(\rho, \theta)$ と $\bar{S}$ とを組み合わせた評価基準を用いたわけである。

図 14 (b), (c) は、検出された直線をエッジ画像、原画像の上に重ねて表示したもので、おおむね良好な結果が得られている。検出したい直線がいくつか残されているが、この原因は、5 章で述べたものと同様、すぐ近くにそれと平行な直線があるために、軌跡の累積度数の分布が重なり合っていることにある。特に図 14 (a) は細い線状の対象から構成されているため、画像を微分することによりその両側に互いに平行なエッジ点の並びが生成され、直線検出を困難にしている。

7. 結 論

本稿では、Hough 変換において直線の連続性がパラメータ空間へどのように写像されるのかを解析的に

求め、その性質を利用した直線群検出アルゴリズムを提案した。また実験によってそのアルゴリズムが有効であることを示した。今後の課題としては、実験例から明らかなように、近接した平行直線がある場合、それらをいかにして安定に検出するかという問題がある。そのためには、複数解像度の画像・パラメータ空間を組み合わせた階層的な解析が有効であると考えられる。

参 考 文 献

- 1) Duda, R.O. and Hart, P.E.: *Pattern Recognition and Scene Analysis*, Wiley, New York (1973).
- 2) Kimme, C., Ballard, D.H. and Sklansky, J.: Finding Circles by an Array of Accumulators, *CACM*, Vol. 18, No. 2, pp. 120-122 (1975).
- 3) Tsuji, S. and Matsumoto, F.: Detection of Ellipses by a Modified Hough Transformation, *IEEE Trans.*, Vol. C-27, No. 8, pp. 777-781 (1978).
- 4) Ballard, D.H.: Generalizing the Hough Transform to Detect Arbitrary Shapes, *Pattern Recogn.*, Vol. 13, No. 2, pp. 111-122 (1981).
- 5) Ballard, D.H. and Sabbah, D.: On Shapes, *Proc. of 7th International Conference on Artificial Intelligence*, pp. 607-612 (1981).
- 6) Sloan, K.R. Jr.: Dynamically Quantized Pyramids, *ibid*, pp. 734-736 (1981).
- 7) O'Rourke, J.: Dynamically Quantized Spaces for Focusing the Hough Transform, *ibid*, pp. 737-739 (1981).
- 8) O'Gorman, F. and Clowes, M.B.: Finding Picture Edges through Collinearity of Feature Points, *IEEE Trans.*, Vol. C-25, pp. 449-455 (1976).
- 9) Brown, C.M.: Inherent Bias and Noise in the Hough Transform, *IEEE Trans.*, Vol. PAMI-5, No. 5, pp. 493-505 (1983).
- 10) Sklansky, J.: On the Hough Technique for Curve Detection, *IEEE Trans.*, Vol. C-27, No. 10, pp. 923-926 (1978).
- 11) Shapiro, S.D.: Feature Space Transforms for Curve Detection, *Pattern Recogn.*, Vol. 10, pp. 129-143 (1978).
- 12) Shapiro, S.D. and Iannino, A.: Geometric Constructions for Predicting Hough Transform Performance, *IEEE Trans.*, Vol. PAMI-1, No. 3, pp. 310-317 (1979).

(昭和 59 年 11 月 16 日受付)

(昭和 60 年 5 月 9 日採録)