

チェビシェフ級数展開と加速法による半無限振動積分†

長谷川 武光†† 鳥居 達生†††

緩減少かつ定符号の関数 $f(x)$ に対する無限振動積分 $J(a, \infty) = \int_a^\infty f(x) \cos \omega x \, dx, \left(\int_a^\infty f(x) \sin \omega x \, dx \right)$ に対する自動積分法を示す。この積分は符号が交代する無限級数の形で表されるが、その収束が非常に遅いので困難な問題とされている。収束を速めるため、Sidi の一般化リチャードソン補外法を加速法として適用する。加速の入力数列は関数 $f(x)$ のチェビシェフ展開を利用して不定積分 $J(a, x)$ を求めておくことにより能率的に計算される。このとき3項漸化式の最小解を安定に求める算法が効果的に利用される。数値例によって本自動積分法が能率の高い方法であることが示される。

1. はじめに

半無限区間の振動積分

$$I^c = \int_a^\infty f(x) \cos \omega x \, dx, \quad \left(I^s = \int_a^\infty f(x) \sin \omega x \, dx \right), \quad a \geq 0, \quad (1)$$

の近似値を求めることは、 $f(x)$ が定符号（ここでは正と仮定する）かつ緩減少関数である場合非常に困難である。実際、振動の半周期 π/ω ごとに積分区間を分けると(1)は次のように符号が交代する無限級数で表される。

$$I^c = \int_a^{x_0} f(x) \cos \omega x \, dx + \sum_{j=0}^{\infty} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) \cos \omega x \, dx, \quad (2)$$

ここで、 x_0 は a に最も近い $\cos \omega x = 0$ の根で $x_0 > a$,
 $x_j = x_0 + \pi j / \omega$. (3)

関数 $f(x)$ が緩減少であると級数(2)の収束は大変遅い。

数列の加速法を級数(2)に適用して収束を速める工夫が多くの人々によりなされている¹⁾⁻⁵⁾。

Longman^{6), 7)} は Euler 変換を用いて初めて加速法の適用を試みた。Shank 変換 (ϵ アルゴリズム) の適用は Chisholm ら⁸⁾ および Alaylioglu ら⁹⁾ によって行われた。Levin 変換の適用も試みられている^{10), 11)}。緩減少関数の振動積分に対する加速法としては、現段

階では Sidi の方法^{12), 13)} が最も優れているようである。

われわれは Sidi の加速法を用いるが、これが有効に作用する関数の族を示しておく。半無限区間 $[a, \infty)$ で定義されたある関数 $f(x)$ が次の条件 (i), (ii), (iii) を満足するとき、 $f(x)$ は関数族 $A^{(\gamma)}$ に属するという。

- (i) $f(x)$ が $[x, \infty)$ で無限回微分可能で、
- (ii) $x \rightarrow \infty$ で $f(x)$ が漸近展開

$$f(x) \sim x^{-\gamma} \sum_{i=0}^{\infty} f_i / x^i, \quad (4)$$

をもち

- (iii) $f(x)$ のすべての階数の微分も(4)の右辺を項別微分してえられる漸近展開をもつ。

ここで、漸近展開(4)は次のように定義される¹⁴⁾。すべての正の整数 n に対して

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\gamma} f(x) = f_0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^n \left\{ x^{-\gamma} f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} f_i / x^i \right\} = f_n \quad (n=1, 2, \dots).$$

$\gamma < 0$ ならば積分(1)が存在する。しかも加速が有効に働くことが示される。

振動積分(1)を有限区間 $[a, x]$ と残り $[x, \infty)$ の二つの区間の積分

$$I^c = \int_a^x f(x) \cos \omega x \, dx + \int_x^\infty f(x) \cos \omega x \, dx, \quad (5)$$

に分ける。上の右辺の第2項 $[x, \infty)$ 区間の積分の漸近的な表示は関数 $f(x)$ とその微分 $f'(x)$ を用いて次のように表すことができる。いま被積分関数を

$$g(x) = f(x) \cos \omega x,$$

によって定義すると、求める振動積分(1)は適当な $\beta_0(x) (\in A^{(0)})$, $\beta_1(x) (\in A^{(0)})$ を用いて

† The Numerical Evaluation of Oscillatory Infinite Integrals by Acceleration Method and the Chebyshev Series Expansion of Function by TAKEMITSU HASEGAWA (Department of Information Science, Faculty of Engineering, Fukui University), TATSUO TORII (Department of Information Science, Faculty of Engineering, Nagoya University).

†† 福井大学工学部情報工学科

††† 名古屋大学工学部情報工学科

$$\int_x^\infty g(x) dx = x^{-1}g(x)\beta_0(x) + g'(x)\beta_1(x), \quad (6)$$

と表される。(3)で定義される点 x_j が $\cos \omega x$ の一つの零点であることに注意すれば、 $x=x_j$ のとき上式の右辺は $g'(x_j)\beta_1(x_j)$ となるので(5)より振動積分 I^e の漸近展開として

$$I^e \sim \int_a^{x_j} f(x) \cos \omega x dx - \omega f(x_j) \sin(\omega x_j) \times (b_0 + b_1/x_j + b_2/x_j^2 + \dots), \quad (7)$$

をうる。Sidi^{15), 16)}はこの漸近表示(7)に対して $j=0, 1, 2, \dots$ と増しながら一般化リチャードソン補外(W変換, Wアルゴリズム)を適用して加速すると収束が速いことを示した。

本論文では、この Sidi の加速法を利用して、要求精度 ε に対して

$$|I^e - I_N| < \varepsilon,$$

を満足する近似値 I_N を与える能率的な自動積分法について述べる。すなわち、加速法の入力の数列である(7)の右辺第1項

$$J(a, x_j) = \int_a^{x_j} f(x) \cos \omega x dx, \quad j=0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

をできるだけ少ない標本数で評価することが問題となる。そのために次の不定積分

$$G(t) = e^{-iLt} \int_0^t e^{iL\tau} F(\tau) d\tau, \quad (9)$$

を考えれば十分である。ただし、 $F \in A^{(\gamma)}$ ($\gamma < 0$)。これを敢えて1階微分方程式

$$G'(t) + iLG(t) = F(t), \quad G(0) = 0, \quad (10)$$

の積分に書きかえる。この微分方程式(10)を区間 $[0, 1]$ 上でチェビシェフ級数展開法を用いて解く。区間 $[0, 1]$ は1次変換によって任意の区間に拡張できる。

そこで、与えられた関数 $F(t)$ をずらしチェビシェフ級数で展開し

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} 'a_k T_k^*(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (11)$$

とする。ここで和 $\sum'$ は初項のみ $1/2$ 倍して総和することを意味する。未知関数 $G(t)$ の展開を

$$G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} 'C_k T_k^*(t), \quad (12)$$

とおく。ただし $T_k^*(t)$ は k 次ずらしチェビシェフ多項式で $T_k^*(t) = T_k(2t-1)$, $T_k(x) = \cos k\theta$ ($x = \cos \theta$) で定義される。微分方程式(10)の積分形

$$G(t) + iL \int_0^t G(\tau) d\tau = \int_0^t F(\tau) d\tau,$$

にこれらの関数(11), (12)を代入し係数比較により次の漸化式をうる。

$$C_{k-1} + \frac{4k}{iL} C_k - C_{k+1} = \frac{1}{iL} (a_{k-1} - a_{k+1}), \quad k \geq 1. \quad (13)$$

$G(t)$ の初期条件 $G(0)=0$ より、上式の規格化条件は

$$\sum_{k=0}^{\infty} '(-1)^k C_k = 0, \quad (14)$$

となる。漸化式の最小解が求める関数 $G(t)$ のチェビシェフ展開係数である。これで振動積分の不定積分(9)が確定したことになる。

ここで非同次3項漸化式(13)の最小解の収束のオーダーについて簡単に調べよう。最小解 C_k は特解 d_k と(13)の右辺を0とした同次3項漸化式の二つの基本解の一つ変形ベッセル関数 $I_k(-iL/2)$ との和

$$C_k = d_k + \lambda I_k(-iL/2), \quad (15)$$

で表される。定数 λ は規格化条件(14)を満足するように決定される。1階微分方程式(10)の右辺 $F(x)$ (x は複素数)が有理関数ならば、そのチェビシェフ展開係数は $|a_k| = O(r^{-k})$ (r は定数で、 $r > 1$) の速さで0に収束するので、特解 d_k も r^{-k} のオーダーとなる。一方、 $k > [L/2]$ となる k に対して $|I_k(-iL/2)|$ は急速に減少し漸近的に

$$|I_k(-iL/2)| \sim (L/4)^k / k!, \quad (16)$$

で評価される。実際上は、 k が $[L/2]$ に近い場合も上の評価は良い近似である。結局 k が十分大ならば $C_k = O(r^{-k})$ となる。

加速法の入力の数列は積分(8)で与えられるが、数値積分(8)の標本数は区間の分割に著しく影響される。われわれは経験的ではあるが次のような分割の方法を提案する。要求精度 ε に依存して番号 $l = \lceil 0.7 \log_{10} \varepsilon^{-1} + 3 \rceil$ の整数部分を定め、これらに応じて区間を $K_0 = [a, x_2]$, $K_1 = (x_2, x_{2+l}]$, $\dots$, $K_{j+1} = (x_{2+j+1}, x_{2+(j+1)+1}]$, $\dots$ と分ける。各 K_{j+1} 区間を変数変換 $x = Lt/\omega + x_{2+j+1}$ により $[0, 1]$ 区間に移し、(9)において

$$F(t) = f(Lt/\omega + x_{2+j+1}), \quad L = \pi l,$$

とおけば

$$\int_{x_{j+1}}^x f(x) e^{i\omega x} dx = \frac{L}{\omega} e^{i\omega x_{j+1}} e^{iL\tau} G(\tau), \quad x \in K_{j+1}, \quad (17)$$

と表される。最初の区間 K_0 だけは特別に扱って

$$\int_a^x f(x) e^{i\omega x} dx = \left(\frac{L}{\omega} + x_0 - a \right) e^{i\omega(x_0-a)} e^{iL\tau} G(\tau), \quad x \in K_0, \quad (18)$$

$$F(t) = f\left(\left(\frac{L}{\omega} + x_0 - a\right)t + a\right), \quad L=2\pi,$$

である。\$G(t)\$ は区間 \$K_{j+1}\$ に依存していることに注意しておく。既知関数 \$F(t)\$ のチェビシェフ級数展開には、標本数漸増型の関数入力の FFT¹⁷⁾ を用いる。3 項漸化式の最小解を安定に求める算法¹⁸⁾ が 1 階微分方程式の解法に有効に使われていることに注意しておく。

2. 振動積分の不定積分

与えられた関数 \$F(t)\$ を倍々より緩やかに項数を増しながらしチェビシェフ展開の列で近似する方法¹⁷⁾ と、そのときの不定積分 (9) の誤差推定について述べる。

3 項漸化式 (13) の右辺に現れる \$a_k\$ は \$F(t)\$ の (連続型) チェビシェフ展開係数である。このチェビシェフ級数展開を次数 \$N\$ の (離散型) チェビシェフ級数

$$P_N(t) = \sum_{k=0}^N a_k^N T_k^*(t), \quad (19)$$

で近似する。ここで \$\Sigma^n\$ は初項と末項のみ \$1/2\$ 倍して総和することを意味する。この展開の次数 \$N\$ を \$2^n\$, \$3 \times 2^{n-1}\$ (\$n=1, 2, \dots\$) と倍々より緩やかに増して近似多項式の列 \$\{P_N\}\$ の作り方を示そう。\$N=2^n\$ と仮定する。式 (19) の係数 \$a_k^N\$ は \$N+1\$ 次多項式

$$\omega_{N+1}(t) = T_{N+1}^*(t) - T_{N-1}^*(t), \quad (20)$$

の零点 \$t_m = \cos^2(\pi m/(2N))\$ (\$0 \le m \le N\$) 上で (19) が \$F(t)\$ の補間式となる条件

$$F(t_m) = \sum_{k=0}^N a_k^N T_k^*(t_m), \quad 0 \le m \le N, \quad (21)$$

より決定される。すなわち

$$a_k^N = \frac{2}{N} \sum_{m=0}^N F(t_m) T_k^*(t_m), \quad (22)$$

つぎに (22) の右辺が与えられたとして、\$T_{N/2}^*(t) - \cos(\pi/4) = 0\$ の \$N/2\$ 個の根 \$u_m\$

$$u_m = \cos^2(\theta_m/2), \quad \theta_m = 4\pi(m+1/8)/N, \quad (23)$$

を追加して \$N+N/2\$ 次チェビシェフ級数展開 \$P_{N+N/2}(t)\$ を作る。

$$P_{N+N/2}(t) = \sum_{k=0}^N a_k^N T_k^*(t) + \sum_{k=1}^{N/2} B_k \{T_{N-k}^*(t) - T_{N+k}^*(t)\}, \quad (24)$$

補間係数 \$B_k\$ の計算法については文献 17) 参照。さらに \$T_{N/2}^*(t) + \cos(\pi/4) = 0\$ の \$N/2\$ 個の根を標本点に追加すると

$$\omega_{2N+1}(t) = 4\omega_{N+1}(t) \left\{ T_{N/2}^*(t) - \cos \frac{\pi}{4} \right\} \left\{ T_{N/2}^*(t) + \cos \frac{\pi}{4} \right\}$$

であるから倍の次数 \$2N\$ のチェビシェフ展開 (19) がえられる。以上の手順を繰り返して倍々より緩やかに次数を増すチェビシェフ展開の列が作られる。

このようにしてえられた近似多項式 \$P_N(t)\$ または \$P_{N+N/2}(t)\$ で \$F(t)\$ を近似したときの不定積分 (9) の誤差推定は以下のようにする。簡単のため \$F(t)\$ に次の仮定をおく。複数平面 \$z\$ において 2 点 0 と 1 を焦点とする楕円

$$C_p: |2z-1+2\sqrt{z^2-z}| = \rho > 1$$

の外側に \$F(z)\$ は \$J\$ 個の単極 \$z_j\$ (\$j=1, 2, \dots, J\$) をもつ有理関数とする。すると文献 19) で述べた方法と類似の方法によって上述の誤差は

$$e = \left| e^{-iLr} \int_0^t e^{iLr} \{F(t) - P_N(t)\} dt \right| \leq |a_N^N| 4r/(r-1)^2, \quad (25)$$

によって推定できる。ここで \$r = \min_j |2z_j - 1 + 2\sqrt{z_j^2 - z_j}| > 1\$。\$F(t)\$ のチェビシェフ展開係数は \$|a_k^N| = O(r^{-k})\$ のオーダーで収束することから、実際には \$r\$ は \$|a_k^N|\$ の漸近的振舞いから推定される。\$N+N/2\$ 次チェビシェフ展開 (24) に対しても

$$e = \left| e^{-iLr} \int_0^t e^{iLr} \{F(t) - P_{N+N/2}(t)\} dt \right| \leq (2+\sqrt{2}) |B_{N/2}| 4r/(r-1)^2, \quad (26)$$

によって推定される。

3. 加速法

振動積分 \$I^\epsilon\$ の漸近展開が (7) の形で表されることを Sidi に従って示す。まず被積分関数 \$g(x) = f(x) \cos \omega x\$ が次の関係

$$g(x) = p_1(x)g'(x) + p_2(x)g''(x), \quad (27)$$

$$p_1(x) = 2f(x)f'(x)/\{\omega^2 f^2(x) + 2f'^2(x) - f(x)f''(x)\},$$

$$-f(x)f''(x)\},$$

$$p_2(x) = -f^2(x)/\{\omega^2 f^2(x) + 2f'^2(x) - f(x)f''(x)\},$$

を満足する。なぜなら \$g(x)/f(x) = \cos \omega x\$ であるから \$(g/f)'' + \omega^2(g/f) = 0\$。よって (27) が成り立つ。\$f \in A^{(\gamma)}\$ (\$\gamma < 0\$) であることから、\$p_1 \in A^{(-1)}\$, \$p_2 \in A^{(0)}\$ となる。さらに (27) を (6) の左辺に代入し部分積分を繰り返して、かつ \$p_1, p_2\$ の上記の漸近的性質を利用すると容易に (6) の右辺が導かれる。式 (5) と (6) で \$x=x_j\$ とおくと \$g(x_j)=0\$ より漸近展開 (7) がえられる。

変数変換 $y=1/x$ とおき

$$\varphi(y_j) = -\omega f(x_j) \sin \omega x_j, \quad \psi(y_j) = \int_a^{x_j} g(x) dx,$$

とおくと(7)は

$$I^c \sim \psi(y_j) + \varphi(y_j) \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k y_j^k, \quad (28)$$

と表される。さて I^c の近似値として

$$W_{m,n} = \psi(y_j) + \varphi(y_j) \sum_{k=0}^m \bar{\beta}_k y_j^k, \quad n \leq j \leq n+m+1, \quad (29)$$

を仮定する。 I^c が j に無関係であることからこのようにおく。ここで $\bar{\beta}_k$ は適当なパラメータであり、 I^c と $W_{m,n}$ は定数である。さらに任意の関数 $h(y)$ の $m+1$ 階差分商を $D_{m,n}\{h(y)\}$ で表す。すなわち

$$D_{m,n}\{h(y)\} = h[y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+m+1}].$$

$h(y)$ が m 次以下の多項式なら $D_{m,n}\{h(y)\} = 0$ であることに注意して(29)の両辺を $\varphi(y_j)$ で除した式の差分商を求めると Sidi の W 変換^{15), 16)}

$$W_{m,n} = D_{m,n}\{\varphi(y)/\varphi(y)\} / D_{m,n}\{1/\varphi(y)\}, \quad (30)$$

がえられる。この W 変換の収束性について次の結果が知られている。

(1) n 固定, $m \rightarrow \infty$: $|I^c - W_{m,n}| = o(m^{-s})$, s 任意, $s > 0$

(2) m 固定, $n \rightarrow \infty$: $|I^c - W_{m,n}| = o(x_n^{-m-1})$

したがって(1)の方が(2)より速い。さらに性質 $\varphi(y_j)\varphi(y_{j+1}) < 0$ を用いると、この W 変換は数値的に安定であることも示される。すなわち $W_{m,n}$ を $m+2$ 個の $\psi(y_j)$ の線形和

$$W_{m,n} = \sum_{j=0}^{m+1} \gamma_j^{(m)} \psi(y_{n+j}), \quad (31)$$

と書いたとき、 $\gamma_j^{(m)} > 0$ ($0 \leq j \leq m+1$) となる¹⁶⁾。ただし $\sum_{j=0}^{m+1} \gamma_j^{(m)} = 1$ 。

次に W 変換を漸化的に計算するアルゴリズムを示す。

[W アルゴリズム] $n=0, 1, 2, \dots$ に対して初期値 $P_{-1,n} = \psi(y_n)/\varphi(y_n)$ とおいて

$$P_{m,n} = (P_{m-1,n+1} - P_{m-1,n}) / (y_{n+m+1} - y_n), \quad m=0, 1, \dots, n-1 \quad (32)$$

を求める。同様に初期値 $Q_{-1,n} = 1/\varphi(y_n)$ として上と同じ算法で $Q_{m,n}$ を求めると

$$W_{m,n} = P_{m,n}/Q_{m,n},$$

となる。

このアルゴリズムは差分商の漸化式

$$D_{m,n}\{h(y)\} = [D_{m-1,n+1}\{h(y)\}]$$

$$- D_{m-1,n}\{h(y)\}] / (y_{n+m+1} - y_n),$$

から自明である。 W アルゴリズムの収束判定は $|W_{m,0} - W_{m+1,0}|$ の値によって行う。

4. 大域的誤差評価

積分(8)は $x_j \in K_{\mu+1} = (x_{2+\mu l}, x_{2+(\mu+1)l})$ のとき、 $[a, x_j] = \left(\bigcup_{q=0}^{\mu} K_q \right) \cup (x_{2+\mu l}, x_j)$ であるので

$$J(a, x_j) = \sum_{q=0}^{\mu} J(K_q) + J(x_{2+\mu l}, x_j), \quad (33)$$

と表される。ここで $J(K_q)$ ($0 \leq q \leq \mu$) は区間 K_q 上での $g(x) = f(x) \cos \omega x$ の定積分であり、 $J(x_{2+\mu l}, x_j)$ は区間 $K_{\mu+1}$ の部分区間 $(x_{2+\mu l}, x_j)$ 上での $g(x)$ の定積分を意味する。これらの定積分はそれぞれ別々に2章で述べた不定積分の方法を用いて計算される。すなわち(9)の $G(t)$ を用いると(17) (または(18))より

$$J(K_q) = \{(L/\omega) \exp[i\omega x_{2+(q-1)l}] e^{-iL} G(1)\} \text{の実数部} \quad (34)$$

と表される。 $G(1)$ は区間 K_q 上の定積分にはかならないので q に依存することを明示して以後 $G_q(1)$ と書く。不定積分(9)において $F(t)$ をチェビシェフ展開(19) (または(24))で近似する。このとき $G_q(t)$ の近似値を

$$\tilde{G}_q(t) = e^{-iL} \int_0^t e^{iL\tau} P_N(\tau) d\tau,$$

そのときの誤差を $e_q(t)$ と書くと

$$G_q(t) = \tilde{G}_q(t) + e_q(t). \quad (35)$$

ここで $P_N(t)$ は $F(t)$ のチェビシェフ級数(19) (または(24))であり $\|e_q\|$ は(25) (または(26))の右辺で推定される。

各区間 K_q ごとの数値積分と誤差評価が可能となったので積分 $J(a, x_j)$ の近似値を $\tilde{J}(a, x_j)$ とその誤差を E_j とすれば(33), (34), (35)より

$$J(a, x_j) = \tilde{J}(a, x_j) + E_j. \quad (36)$$

ここで

$$\begin{aligned} \tilde{J}(a, x_j) = & \left\{ \sum_{q=1}^{\mu} (L/\omega) \exp[i\omega x_{2+(q-1)l}] e^{-iL} G_q(1) \right. \\ & + (2\pi/\omega + x_0 - a) \exp[i\omega(x_0 - a)] \\ & \times e^{-2\pi i} G_0(1) \\ & \left. + (L/\omega) \exp[i\omega x_{2+\mu l}] e^{-iL} G_{\mu}(t_j) \right\} \\ & \text{の実数部, } t_j = \{j - (2 + \mu)l\} / l \quad (37) \end{aligned}$$

$$E_j = \left\{ \sum_{q=1}^{\mu} (L/\omega) \exp[i\omega x_{2+(q-1)l}] e^{-iL} e_q(1) \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + (2\pi/\omega + x_0 - a) \exp[i\omega(x_0 - a)] e^{-2\pi i e_0(1)} \\
 & + (L/\omega) \exp[i\omega x_{2+\mu} t] e^{-iL e_q(t_j)} \} \\
 & \text{の実数部} \quad (38)
 \end{aligned}$$

である。簡単のため $L = \pi l$ とおいた。そこで振動積分 $J(a, x_j)$ を W 変換の $\psi(y_j)$ に採用すると

$$W_{m,0} = \tilde{W}_{m,0} + \sum_{j=0}^{m+1} \gamma_j^{(m)} E_j. \quad (39)$$

ここで $\tilde{W}_{m,0}$ は近似 $\tilde{J}(a, x_j)$ を用いたときの W 変換 (30) であり，したがって計算できる量である。W 変換の収束判定は積分の要求精度 ε に対して

$$|W_{m+1,0} - W_{m,0}| \leq \varepsilon, \quad (40)$$

で行う。ところで (39) と W 変換が数値的に安定である性質， $\gamma_j^{(m)} > 0$ ，および $\sum_j \gamma_j^{(m)} = 1$ から

$$\begin{aligned}
 & |W_{m+1,0} - W_{m,0}| \\
 & \leq |\tilde{W}_{m+1,0} - \tilde{W}_{m,0}| \\
 & + \sum_{j=0}^{m+1} \gamma_j^{(m)} |E_j| + \sum_{j=0}^{m+2} \gamma_j^{(m+1)} |E_j| \\
 & \leq |\tilde{W}_{m+1,0} - \tilde{W}_{m,0}| + 2 \max_{0 \leq j \leq m+2} |E_j|.
 \end{aligned}$$

したがって (40) を満足するためには二つの誤差限界

$$|\tilde{W}_{m+1,0} - \tilde{W}_{m,0}| \leq \varepsilon/2, \quad (41)$$

$$2 \max_{0 \leq j \leq m+2} |E_j| \leq \varepsilon/2, \quad (42)$$

を満たせばよい。前者は直ちに判定できるので後者について考えればよい。 $x_{m+2} \in K$ とすると (38) より

$$\begin{aligned}
 \max_{0 \leq j \leq m+2} |E_j| & \leq \sum_{q=1}^p \|e_q\| (L/\omega) \\
 & + \|e_0\| (2\pi/\omega + x_0 - a),
 \end{aligned}$$

したがって右辺が $\varepsilon/4$ 以下であればよい。このため各区間 K_q での積分の誤差 $\|e_q\|$ を

$$\begin{aligned}
 \|e_q\| (L/\omega) & \leq (\varepsilon/4)/2^{q+1}, \quad q \geq 1 \\
 \|e_0\| (2\pi/\omega + x_0 - a) & \leq (\varepsilon/4)/2,
 \end{aligned} \quad (43)$$

とすればよいであろう。(43) の右辺が計算機の丸め誤差 $\varepsilon_{\text{mach}}$ 以下になったら，この右辺を $\varepsilon_{\text{mach}}$ でおきかえる。

さて今まで被積分関数の非振動項 $f(t)$ が多項式ならばその振動積分は正確であるという仮定の下で大域的誤差評価を行ってきたが，それが妥当であることについて述べる。実際上 $G(t)$ を (12) の右辺のような無限項和では展開できない。この展開を次式を満足する M 次で展開したい。

$$\left| G(t) - \sum_{k=0}^M C_k T_k^*(t) \right| = o(e_q). \quad (44)$$

被積分関数の非振動項 $F(t)$ を N 次式 $P_N(t)$, (19) で

近似したとき $k > N$ に対して $a_k^N = 0$ であるので C_k の表示式 (15) において特解 $d_k = 0$ とできる。したがって最小解 $C_k \propto I_k(-iL/2)$ ， $k > [L/2]$ となる k に対して $|I_k(-iL/2)|$ は (16) のように急速に減少するので N が $[L/2]$ 以上とそうでない場合に分けて考える。

$N > [L/2]$ の場合， $M > N$ とする。 $k \geq M$ に対して $|C_k| \propto |I_k(-iL/2)|$ だから (16) より $|C_k| \sim |C_M| (L/4)^{k-M} / \{(M+1)(M+2) \cdots k\}$ 。この関係を用い $\eta = (L/4)/(M+1)$ とおくと

$$\begin{aligned}
 & \left| G(t) - \sum_{k=0}^M C_k T_k^*(t) \right| \\
 & \leq \sum_{k=M+1}^{\infty} |C_k| \leq |C_M| (\eta + \eta^2 + \cdots) \\
 & = |C_M| \eta / (1 - \eta).
 \end{aligned}$$

ここで N と M に関する仮定より $\eta < 1/2$ であるから $G(t)$ の M 次チェビシェフ級数の誤差は

$$\left| G(t) - \sum_{k=0}^M C_k T_k^*(t) \right| \leq |C_M|, \quad (45)$$

で評価される。ここで次数 M は $|C_M| = o(\|e_q\|)$ となるように定めればよい。 $|C_k|$ の収束が速いので，実際上 M は N に近い値である。

$N < [L/2]$ の場合 (9) 式を次式でおきかえる。

$$e^{-iL t} \int_0^t e^{iL \tau} F(\tau) d\tau = G(t) - e^{-iL t} G(0). \quad (46)$$

すると $F(t)$ が N 次多項式 $P_N(t)$ であれば $G(t)$ も厳密に N 次式となる。 $G(t)$ のチェビシェフ展開係数 C_k ($0 \leq k \leq N$) はやはり漸化式 (13) を満足する。規格化条件 (14) は存在しない。 $C_{N+2} = C_{N+1} = 0$ において (13) を逆向きに計算して安定に $C_N, C_{N-1}, \dots, C_0$ が求められる。

5. 計算法のまとめ

まず K_0 区間で $F(t)$ をチェビシェフ多項式 (19) (または (24)) で近似する。このとき (25) (または (26)) の右辺で与えられる推定誤差 $\|e_q\|$ が (43) を満足するまで近似多項式の次数 N を 2 章の方法で増してゆく。えられた展開係数 a_k^N ($0 \leq k \leq N$) を 3 項漸化式 (13) の右辺に用いる。 $N \leq [L/2]$ ， $(L = 2\pi)$ なら前章の (46) 式とそれ以下で述べたようにして $C_N, \dots, C_0$ を計算する。 $N > [L/2]$ の場合，既にわれわれが発表した安定に最小解を求める方法を漸化式 (13) に適用して C_k ($0 \leq k \leq M$) を計算する。以上によってえられた C_k を (12) に代入し (18) を用いると $\tilde{J}(a, x_j)$ ($0 \leq j \leq 2$) が一度にえられる。W アルゴリズムにより

$\tilde{W}_{m,0}$ ($0 \leq m \leq 2$) を計算し、収束判定 (41) が満足されれば停止する。さもなければ区間 $K_1, K_2, \dots$ に対して同様の手続きを繰り返してゆく。ただし $L = \pi l$ である。実際上は K_1 ないし K_2 で計算は終了する。

6. 数 値 例

オイラー変換, ε アルゴリズム, レビン変換 (u 変換, t 変換) および Sidi の方法の 5 種類の加速法の収束の速さを問題 $\int_0^\infty x/(x^2+1) \cos x \, dx$ に対してテストした結果を図 1 に示す。加速法の入力の数値 (8) の個数が横座標である。Sidi の方法の収束が最も速いことが図 1 からわかる。

次に以下に示す各種のテスト問題に対して本方法の性能を現在発表されているなかで能率的な自動積分法である Piessens らの方法²⁰⁾と比較する。計算は倍精度演算 (10 進約 16 桁) を用いて行った。比較は要求精度 ε を満足するために使用した標本点数によって行う。

$$(1) \int_0^\infty e^{-x} \cos x \, dx = 0.5$$

$$(2) \int_0^\infty x/(x^2+1) \cos x \, dx \\ = -[\bar{E}_i(1)/e + eE_i(-1)]$$

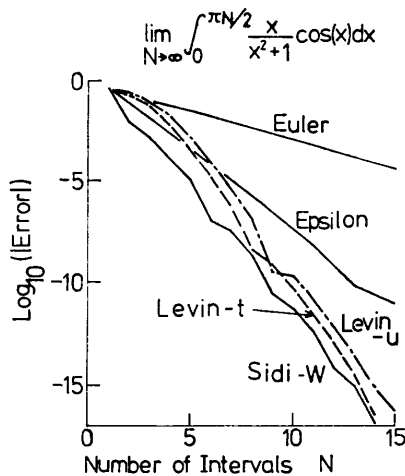


図 1 $\int_0^\infty f(x) \cos x \, dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{xN/2} f(x) \cos x \, dx$, $f(x) = x/(x^2+1)$, に対するいろいろな加速法の収束の速さの比較

Fig. 1 Comparison of the rates of convergence of various acceleration methods for $\int_0^\infty f(x) \cos x \, dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{xN/2} f(x) \cos x \, dx$, $f(x) = x/(x^2+1)$.

$$(2-S) \int_0^\infty x/(x^2+1) \sin x \, dx = \pi/(2e)$$

$$(3) \int_0^\infty 1/\sqrt{x^2+1} \cos x \, dx = K_0(1)$$

$$(3-S) \int_0^\infty 1/\sqrt{x^2+1} \sin x \, dx \\ = [I_0(1) - L_0(1)]\pi/2$$

$$(4) \int_0^\infty 1/(x^2+1) \cos x \, dx = \pi/(2e)$$

$$(5) \int_0^\infty \{\log(x+1)\}/x \cos x \, dx \\ = \left\{ \left(S_i(1) - \frac{\pi}{2} \right)^2 + C_i^2(1) \right\} / 2$$

$$(6) \int_1^\infty 1/x \cos x \, dx = -C_i(1)$$

$$(7) \int_1^\infty 1/\sqrt{x} \cos x \, dx \\ = -0.5557343384850400$$

$$(8) \int_1^\infty 1/\sqrt{x^2+1} \cos x \, dx \\ = -0.3333975265101900$$

$$(9) \int_1^\infty 1/x^2 \sin x \, dx = \sin(1) - C_i(1)$$

$$(10) \int_0^\infty \log \{(x^2+4)/(x^2+1)\} \cos \omega x \, dx \\ = (e^{-\omega} - e^{-2\omega})\pi/\omega$$

$$(11) \int_0^\infty f(x) \cos x \, dx = (\pi/\beta)e^{-\beta} \cos \gamma, \\ f(x) = \{\beta^2 + (\gamma-x)^2\}^{-1} \\ + \{\beta^2 + (\gamma+x)^2\}^{-1}$$

問題 (2) において $E_i(x)$ は積分指数関数であり $\bar{E}_i(x) = \{E_i(x+i0) + E_i(x-i0)\}/2$ である²¹⁾。(3), (3-S)における $K_0(x)$, $I_0(x)$ は 0 次変形 Bessel 関数で, $L_0(x)$ は 0 次変形 Struve 関数である。(5), (6), (9)における $S_i(x)$, $C_i(x)$ はそれぞれ正弦および余弦積分である。問題 (1)~(5)は $[0, \infty)$ 区間の積分, 問題 (6)~(9)は $[1, \infty)$ 区間の積分問題である。それぞれの問題の要求精度 $\varepsilon = 10^{-6}, 10^{-9}, 10^{-12}$ に対する標本点数とそのときの誤差を表 1 と表 2 に示す。各種の振動数 ω の値に対する問題 (10) の結果は表 3 である。以上の問題 (1)~(10)では被積分関数の非振動項 $f(x)$ のピークが積分区間の下限かその近傍にあり, その後 $x \rightarrow \infty$ に向かって単調に減少している。問題 (11)では $x = \gamma$ で $f(x)$ が最大となる。パラメータ γ の値を $0, \pi, 2\pi$ と変化させて $f(x)$ のピーク

表 1 $[0, \infty)$ 区間振動積分(1)~(5)に対する本方法と Piessens らの方法²⁰⁾との性能の比較
 Table 1 Comparison of the performances of the present method and one due to Piessens et al.²⁰⁾ for oscillatory infinite integrals (1)~(5) on the interval $[0, \infty)$.

問題	$\varepsilon=10^{-6}$				$\varepsilon=10^{-9}$				$\varepsilon=10^{-12}$			
	本 方 法		Piessens		本 方 法		Piessens		本 方 法		Piessens	
	標本数	誤 差	標本数	誤 差	標本数	誤 差	標本数	誤 差	標本数	誤 差	標本数	誤 差
(1)	33	3×10^{-9}	150	3×10^{-10}	45	1×10^{-12}	200	2×10^{-16}	61	5×10^{-16}	280	5×10^{-12}
(2)	45	3×10^{-7}	360	1×10^{-9}	84	4×10^{-11}	490	4×10^{-13}	94	2×10^{-14}	695	7×10^{-13}
(2-S)	45	1×10^{-6}	385	3×10^{-9}	83	3×10^{-11}	515	4×10^{-12}	94	4×10^{-15}	700	8×10^{-13}
(3)	49	5×10^{-8}	360	2×10^{-9}	68	8×10^{-11}	490	8×10^{-13}	94	6×10^{-15}	720	1×10^{-12}
(3-S)	49	2×10^{-8}	385	3×10^{-9}	67	4×10^{-11}	515	4×10^{-12}	94	1×10^{-15}	720	7×10^{-13}
(4)	57	1×10^{-8}	335	7×10^{-10}	83	2×10^{-10}	440	3×10^{-12}	93	1×10^{-13}	675	3×10^{-13}
(5)	37	2×10^{-7}	325	4×10^{-10}	67	1×10^{-10}	460	1×10^{-13}	79	1×10^{-13}	665	4×10^{-12}

表 2 $[1, \infty)$ 区間振動積分(6)~(9)に対する本方法と Piessens らの方法との性能の比較
 Table 2 Comparison of the performances of the present method and one due to Piessens et al. for oscillatory infinite integrals (6)~(9) on the interval $[1, \infty)$.

問題	$\varepsilon=10^{-6}$				$\varepsilon=10^{-9}$				$\varepsilon=10^{-12}$			
	本 方 法		Piessens		本 方 法		Piessens		本 方 法		Piessens	
	標本数	誤 差	標本数	誤 差	標本数	誤 差	標本数	誤 差	標本数	誤 差	標本数	誤 差
(6)	45	1×10^{-6}	380	4×10^{-10}	68	6×10^{-12}	485	8×10^{-13}	94	8×10^{-15}	695	3×10^{-13}
(7)	37	8×10^{-7}	350	9×10^{-10}	68	6×10^{-12}	510	2×10^{-12}	78	6×10^{-15}	690	7×10^{-13}
(8)	37	1×10^{-6}	325	2×10^{-9}	60	9×10^{-12}	485	1×10^{-12}	78	7×10^{-15}	635	5×10^{-13}
(9)	44	6×10^{-7}	330	8×10^{-10}	67	7×10^{-11}	460	6×10^{-13}	92	3×10^{-13}	670	7×10^{-13}

表 3 半無限振動積分 $\int_0^\infty \log \{(x^2+4)/(x^2+1)\} \cos \omega x \, dx$ に対する本方法と Piessens らの方法との性能の比較
 Table 3 Comparison of the performances of the present method and one due to Piessens et al. for the oscillatory infinite integral $\int_0^\infty \log \{(x^2+4)/(x^2+1)\} \cos \omega x \, dx$.

ω	$\varepsilon=10^{-6}$				$\varepsilon=10^{-9}$				$\varepsilon=10^{-12}$			
	本 方 法		Piessens		本 方 法		Piessens		本 方 法		Piessens	
	標本数	誤 差	標本数	誤 差	標本数	誤 差	標本数	誤 差	標本数	誤 差	標本数	誤 差
1	49	4×10^{-8}	335	2×10^{-9}	69	2×10^{-10}	465	3×10^{-12}	94	1×10^{-14}	670	7×10^{-13}
5	38	3×10^{-8}	300	1×10^{-9}	53	1×10^{-12}	450	1×10^{-12}	89	6×10^{-15}	680	8×10^{-13}
9	30	1×10^{-8}	275	3×10^{-9}	63	4×10^{-11}	425	2×10^{-12}	82	7×10^{-14}	765	3×10^{-13}
15	30	2×10^{-8}	275	1×10^{-9}	55	1×10^{-11}	425	8×10^{-13}	75	1×10^{-13}	725	8×10^{-16}

クの位置を ∞ の方に動かした場合に必要な標本点数と入力の数値(8)の項数を表 4 に示す。もう一つのパラメータ β の値が小さいほどピークが高くなり困難な問題となる。表 1~4 から関数 $f(x)$ が滑らかであるほど、また $f(x)$ のピークの位置が積分区間の下限に近いほど本方法の能率が高いことがわかる。

7. おわりに

本論文では、半無限振動積分(1)の自動積分法を示

した。この積分は収束の遅い交代級数の極限值として与えられる。収束を速めるため Sidi の加速法を適用した。加速のための入力数値を能率的に計算するため不定積分の方法を用いた。このとき入力関数 $f(x)$ のチェビシェフ級数展開を利用しているので cosine 積分 I^c と sine 積分 I^s 、(1) の両方を求める場合、一方のための関数計算の手間で他方の値も求められる利点がある。3 項漸化式の最小解を安定に求める算法も有効に利用されている。以上により、従来の Pies-

表 4 半無限振動積分 $\int_0^\infty f(x) \cos x \, dx$, $f(x) = \{\beta^2 + (r-x)^2\}^{-1} + \{\beta^2 + (r+x)^2\}^{-1}$, に対する本方法と Piessens

らの方法との性能の比較

Table 4 Comparison of the performances of the present method and one due to Piessens et al. for the oscillatory infinite integral $\int_0^\infty f(x) \cos x \, dx$, $f(x) = \{\beta^2 + (r-x)^2\}^{-1} + \{\beta^2 + (r+x)^2\}^{-1}$.

β	r	$\varepsilon=10^{-6}$						$\varepsilon=10^{-12}$					
		本 方 法			Piessens			本 方 法			Piessens		
		標本数	誤 差	項数	標本数	誤 差		標本数	誤 差	項数	標本数	誤 差	
1	0	57	2×10^{-6}	7	335	1×10^{-9}		110	1×10^{-14}	12	705	2×10^{-13}	
	π	82	1×10^{-6}	8	360	3×10^{-10}		158	5×10^{-13}	12	760	8×10^{-13}	
	2π	103	7×10^{-6}	12	360	5×10^{-10}		225	2×10^{-14}	14	790	5×10^{-13}	
4	0	89	2×10^{-6}	7	395	1×10^{-9}		190	1×10^{-14}	12	1095	1×10^{-12}	
	π	227	5×10^{-6}	9	540	3×10^{-10}		445	4×10^{-13}	12	1305	2×10^{-12}	
	2π	215	1×10^{-6}	12	540	5×10^{-10}		420	6×10^{-14}	17	1365	1×10^{-12}	

sens らの方法と比較して $f(x)$ が滑らかでそのピークの位置が積分区間の下限に近いほど、本方法は能率的であることが数値実験によって示された。

本方法では入力関数が $f(x) = \sin^2(x/2)/x$ のような定符号であるが振動する関数に対する半無限振動積分

$$\int_0^\infty \{\sin^2(x/2)/x\} \sin \omega x \, dx = \begin{cases} \pi/4, & \omega < 1 \\ \pi/8, & \omega = 1 \\ 0, & \omega > 1 \end{cases}$$

の問題は扱えない (文献 1), p. 239 の問題)。

三角関数の代りに Bessel 関数 $J_n(x)$, $Y_n(x)$ を含んだ半無限振動積分の問題に本方法を拡張することは今後の課題である。

謝辞 日頃ご討論いただく名古屋大学二宮市三教授 (現在中部大学) に感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) Davis, P. J. and Rabinowitz, P.: *Methods of Numerical Integration*, Academic Press, Orlando (1984).
- 2) 戸田英雄, 小野令美: Double Exponential 変換数値積分公式の有効性を発揮させるための注意, 京都大学数理解析研究所講究録, 339, pp. 74-109 (1978).
- 3) 高橋秀俊: 振動的関数の積分法, 京都大学数理解析研究所講究録, 483, pp. 238-248 (1983).
- 4) 吉田年雄: 振動する関数の半無限自動積分, 名古屋大学大型計算機センターニュース, Vol. 14, No. 2, pp. 168-174 (1983).
- 5) 杉原正顕: DE 変換公式と補外法を用いて振動的関数の積分を計算する方法に関する一考察, 京都大学数理解析研究所講究録, 514, pp. 21-47 (1984).
- 6) Longman, I. M.: Note on a Method for Computing Infinite Integrals of Oscillatory Functions, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, Vol. 52, pp. 764-768 (1956).
- 7) Longman, I. M.: A Method for the Numerical Evaluation of Finite Integrals of Oscillatory Functions, *Math. Comput.*, Vol. 14, pp. 53-59 (1960).
- 8) Chisholm, J. S. R., Genz, A. and Rowlands, G. E.: Accelerated Convergence of Sequences of Quadrature Approximations, *J. Comput. Phys.*, Vol. 10, pp. 284-308 (1972).
- 9) Ayse Alaylioglu, Evans, G. A. and Hyslop, J.: The Evaluation of Oscillatory Integrals with Infinite Limits, *J. Comput. Phys.*, Vol. 13, pp. 433-438 (1973).
- 10) 二宮市三: Levin の加速法, 情報処理学会第 29 回全国大会講演論文集, pp. 1501-1502 (1984).
- 11) 中島 洋: 緩減少関数の数値フーリエ積分, 情報処理学会論文誌, Vol. 25, No. 6, pp. 1098-1101 (1984).
- 12) Sidi, A.: Extrapolation Methods for Oscillatory Infinite Integrals, *J. Inst. Math. Applic.*, Vol. 26, No. 1, pp. 1-20 (1980).
- 13) Sidi, A.: The Numerical Evaluation of Very Oscillatory Infinite Integrals by Extrapolation, *Math. Comput.*, Vol. 38, No. 158, pp. 517-529 (1982).
- 14) Olver, F. W. J.: *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New York (1974).
- 15) Sidi, A.: Some Properties of a Generalization of the Richardson Extrapolation Process, *J. Inst. Math. Applic.*, Vol. 24, No. 3, pp. 327-346 (1979).
- 16) Sidi, A.: An Algorithm for a Special Case of a Generalization of the Richardson Extra-

- polation Process, *Numer. Math.*, Vol. 38, No. 3, pp. 299-307 (1982).
- 17) 鳥居達生, 長谷川武光: 標本点数を低倍率で漸増させる実関数の FFT, 情報処理学会論文誌, Vol. 24, No. 3, pp. 343-350 (1983).
- 18) 長谷川武光, 鳥居達生, 二宮市三: 3項漸化式の最小解に対する安定な算法, 情報処理学会論文誌, Vol. 23, No. 6, pp. 583-590 (1982).
- 19) 長谷川武光, 鳥居達生: 激しい振動積分の自動積分法, 情報処理学会論文誌, Vol. 25, No. 1, pp. 116-124 (1984).
- 20) Piessens, R., deDoncker, E., Überhuber, C. W. and Kahaner, D.K.: *QUADPACK A Subroutine Package for Automatic Integration*, Springer-Verlag, Berlin (1983).
- 21) Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M.: *Table of Integrals, Series, and Products* (translated by Jeffrey, A.), Academic Press, New York (1980).

(昭和60年1月17日受付)

(昭和60年3月20日採録)