A-023

GRID 環境を用いたボロノイ図の作成アルゴリズムに関する検討
Voronoi Diagram Algorithm on the Grid Environment

水江 真登[†] Masato Mizue　小林 孝史[†] Takashi Kobayashi　上島 紳一[†] Shinichi Ueshima

1. はじめに

近年，GIS (Geographic Information System) や CG (Computer Graphics)といった応用分野の発達に伴い，大規模な幾何情報の処理に対する必要性が増している．膨大な情報量に対し実時間内で処理を行うために，GRID を用いた分散処理は有効な手段と考えられる．本稿では，GRID 環境で計算幾何問題の一つであるボロノイ図の作成アルゴリズムについて検討する．

2. ボロノイ図

平面 R^2 上に n 個の母点の集合 $S = \{p_1, p_2, \ldots p_n\}$ が与えられたとき，集合 S 内で p_i が最も近い領域をボロノイ領域という．本章では議論を簡単にする為，集合 S 内のどの四点も同一円周上に位置することがないとする．R^2 上の任意の点 p_i と集合 S に含まれる母点 p_i との Euclid 距離を $d(p, p_i)$ と表すと，p_i に対するボロノイ領域 $Vor(p_i)$ は (1) のように定義される．

$$Vor(p_i) = \{p \in R^2 | d(p, p_i) < d(p, p_j)\ j = 1,2,\ldots,n\ j \neq i\}$$

$Vor(p_i)$ は凸多角形である．R^2 は全てのボロノイ領域により排他的に分割される．これをボロノイ図といい，$Vor(S)$ と表す(図 1 の細線)．

$Vor(p_i)$ と $Vor(p_j)$ との境界が 1 の辺を共有するとき，p_i と p_j を結ぶと $Vor(S)$ よりドロネー図 $Del(S)$ を得ることができる(図 1 太線)．$Del(S)$ の辺であるドロネー辺は集合 S の凸包を三角形分割する．この三角形の外心はボロノイ領域の頂点と一致し，外接円は他の母点をその内部に含まないという性質を持つ．またボロノイ図とドロネー図はグラフ理論上での双対関係であるため，$Del(S)$ から $Vor(S)$ を一意に定まる．ボロノイ領域の頂点を求める計算には精度が必要であるのに対して，ドロネー図の構成には三角形の外接円と他の母点との判定のみで行うことができる．また与えられた母点情報に対しボロノイ図のように領域として情報を保持するより，ドロネー図の辺として情報を保持するほうが情報量を低く抑えることができる．ボロノイ図構成よりドロネー図構成の優位性があるためであり，変換にかかる計算複雑度は $O(n)$ の為，本稿ではボロノイ図構成のためドロネー図の計算を行う．

3. GRID 環境でのボロノイ図作成

3.1 分割統治法の利用

分割統治法とは与えられた問題が大規模で複雑な場合に用いられる技法である．まず問題を小規模な部分問題に分割し，各部分問題を解く．部分問題の解を併合する．これを再帰的に繰り返すことで全体の解を得る技法である．分割統治法によるドロネー図の構成アルゴリズムは次のようになる．

[†]関西大学大学院総合情報学研究科

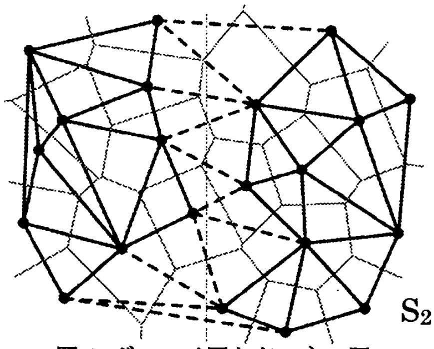

図 1: ボロノイ図とドロネー図

DELAUNAY(S)

入力: 母点集合 S

出力: $Del(S)$ **における全てのドロネー辺**

STEP1: 母点集合 S **を x 座標に従い，ほぼ同じ大きさに二分割し，それぞれを** S_1, S_2 **とする．**

STEP2: 各領域で DELAUNAY(S_1)**と** DELAUNAY(S_2)**よりドロネー図** $Del(S_1)$**，**$Del(S_2)$**を求める．**

STEP3: $Del(S_1)$ **と** $Del(S_2)$ **の併合を行うことで** $Del(S)$ **を求める．**

これは GRID 環境での分散処理に対しても，有効な手法である．問題を小さな部分問題に分割する際，部分問題を GRID 上の各ノードに割り当て，部分問題はそれぞれのノードにおいて計算する．各ノードの部分解を 1 つのノードに集め併合を行う．部分問題を複数のノードによって並列に計算でき，処理の高速化を行うことができる．

3.2 提案手法

提案手法では与えられた問題をノード数に分割し，部分問題をそれぞれノードに割り振る．各ノード内ではさらに分割統治法を用いて割当てられた領域のドロネー図を構成する．GRID 環境ではノード間のデータ転送にネットワークを用いる分散メモリ型の並列計算である為，通信時間が全体の処理時間に与える影響が大きい．ノードへの割当てを初期の分割に限定することでノード間通信の回数を抑えた．集合 S は x 座標に従って分割し，各ノードに割当てる．各ノードが担当領域のドロネー図を構成した後，ノード間の併合を行う．分割領域の x 座標が小さい順にノードへ番号を与える．併合は隣り合う領域担当のノードを 2 つ 1 組とし，構成したドロネー図の情報を番号の若いノードに集める (図 2)．番号の若いノードは集められた情報を基にして，合わせた領域に対するドロネー図を構成する．併合のための情報は番号の若いノードへと送られていき，最後に番号の最も小さいノードにて $Del(S)$ の構成が行われる．

3.3 併合

分割した領域の併合は，各領域で得られたドロネー図をもとにし，余分な辺の除去と領域間のドロネー三角形の計算により行われる．分割された二つの領域の左側を S_1，右側を S_2 としそれぞれの凸包に対し，上部外接線とその接点 U_1, U_2，下部外接線と L_1, L_2 を求める．U_1, U_2 を結ぶ直

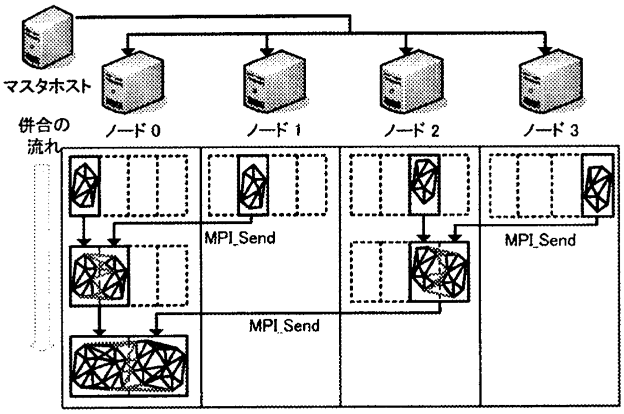

図 2: ジョブの分配とノード間の併合

線を e とする．次に余分な辺の除去を行う． S_1 では e の両端点と S_1 側の端点に接続された母点を時計回りに外接円の判定を行う．例えば図 3 (a) では e に対し，U_1 を中心に e から時計回りに見て次に接続された V_1 とさらに次に接続された V_1' で判定する．V_1 を含む外接円の内部に V_1' が位置する場合，ドロネー辺 $U_1 V_1$ は削除され，V_1' を V_1 にその次に接続された母点を V_1' をして再び判定を行う．V_1' が円の内部に位置しなくなった場合，V_1 はドロネー辺の接続候補となる．S_2 では反時計回りに接続した母点を判定し，接続候補 V_2 を決定する．V_1, V_2 が定まると次にこの二点との外接円判定を行う．判定の結果，選ばれた母点は反対の領域に属する e の端点と新しいドロネー辺 e' が結ばれる．図 3 (b) では V_2 が選ばれるため，U_1 との線分 e' がドロネー辺として追加される．この操作は上部外接線 $U_1 U_2$ から始まり，e' を e として外接円判定を行い下部外接線 $L_1 L_2$ と一致すると併合を終了する．

3.4 記号摂動の導入

2. における集合 S 内の任意の四点の位置関係が幾何学的退化にある場合を考慮し，本稿では外接円判定を行う場合の退化に対して円ボロノイにおいて円の半径に無限小の揺らぎを与えると考え，母点番号の若いものを結んだドロネー三角形を優先的に採用する．併合時の凸包構成に用いる直線に対する点の位相の判定多項式 f は母点座標に無限小 ε に基づいた揺らぎを加えられた $\overline{p_i}$ により以下のように展開される．

$$f(\overline{p_i},\overline{p_j},\overline{p_k}) = f(p_i,p_j,p_k) - \begin{vmatrix} 1 & y_j \\ 1 & y_k \end{vmatrix} \varepsilon^{i} + \begin{vmatrix} 1 & y_i \\ 1 & y_k \end{vmatrix} \varepsilon^{j}$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & y_i \\ 1 & y_k \end{vmatrix} \varepsilon^{k} + \begin{vmatrix} 1 & x_j \\ 1 & x_k \end{vmatrix} \varepsilon^{2^{n+i}} - \varepsilon^{j+2^{n+i}} + \cdots$$

(a) V_1 の決定　　(b)ドロネー辺の決定

図 3: 外接円判定

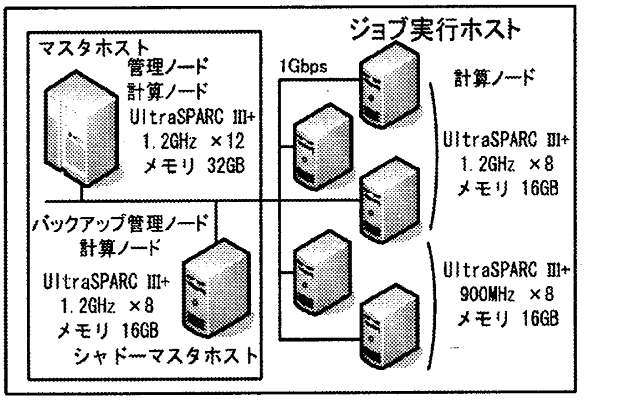

図 4: 実装環境の構成

本稿ではこれを第一項より判定を行い，退化している場合は次項の判定を行うというように実装した．記号摂動法は整数帰着法と共に用いる必要がある．

4. 実装

4.1 実装環境

実装として Sun Microsystems 社の Sun Grid Engine, Enterprise Edition(以下 SGE)で図 4 の構成で行う．SGE は多数のユーザによる同時使用を考慮し，複数のジョブをマスタホストにてスケジューリングすることで計算資源の有効利用が行える分散資源管理ソフトウェアである．実行ホストであるノードにジョブを割振ることで MPI や PVM を利用した並列プログラムを実行可能である．ここでは SGE 上でドロネー図の構成アルゴリズムを実装する為，ノード間のデータ通信は MPI を用いた．ドロネー図の構成には母点の位置，母点間の隣接関係，領域の凸包の情報が必要である．母点には一意に識別できる番号を与える．そしてある母点のドロネー辺は接続する相手の母点の番号とともに時計回りの環状リストとして保持する．また凸包もその頂点となる母点の番号を環状リストとする．MPI によりこれら母点情報，ドロネー辺リスト，凸包リストの通信を行い，ノード間の分割統治アルゴリズムを実装した．

4.2 評価

8 ノードに対し 1 ノードあたり 10 個，全体で 80 個の母点のドロネー図の構成を行う．10 回実行した平均の実時間は 3.411 秒，CPU 時間は 1.144 秒であった．ノードへの割当てはマスタホストが決定する為，実行されるノードは異なる組合せであった．GRID 環境では特定利用者の占有利用を許可されない為，他利用者のジョブに影響を受けている．

5. おわりに

本稿では，ボロノイ図を作成の為のドロネー図構成アルゴリズムを示し，それを GRID 環境で用いる為の検討を行った．大規模な入力データに対しては，頑健で実時間内に処理が行えるアルゴリズムが必要である．

今後は，より母点数の多い場合の検証の実装部分での効率化を検討する必要がある．

参考文献

[1] M.Chen et al, “Parallel 2D Delaunay Triangulations in HPF and MPI”, IPDPS’01, 2001

[2] J.Kohout et al, “Parallel Delaunay Triangulation Based on Circum-Circle Criterion”, SCCG’03, pp.73-81, 2003

[3] 杉原厚吉, “計算幾何工学”, 培風館, 1994