A-19

指定した群遅延と指定した平たん度を有する最大平たん低域通過 FIR フィルタの伝達関数

The transfer function of maximally flat magnitude lowpass FIR digital filters with the specified group delay and the degree of flatness

森　幸男†　Yukio Mori
相川　直幸‡　Naoyuki Aikawa

1．はじめに

パルス通信や高速データ通信などの分野で用いられるディジタルフィルタは、平たんな振幅特性や直線位相特性、または一定の群遅延を持つことが必要である。FIR フィルタは完全な直線位相特性を実現することができ、安定性が保証されているため、このような分野への応用が重要視されている。しかし、IIR フィルタに比べて、FIR フィルタは、同じ振幅特性を近似しようとした場合に大きな次数を必要とするため、遅延時間が増加し、実時間信号処理においてしばしば問題となる。

近年、振幅特性が平たんである低遅延 FIR フィルタの設計法が検討されている[1]-[3]。Selesnick らは、振幅と群遅延特性の平たん条件を異ならせることによって閉じた形の伝達関数を与えた[2]。この方法は、振幅特性と群遅延特性双方の平たん度を指定して伝達関数を与えるが、任意の群遅延を実現することが難しい。一方、Samadi らは、Baher の提案した伝達関数[1]に Bernstein 形の多項式を適用することによって伝達関数を求める計算の煩雑さを改善した。しかし、この方法も群遅延を直接指定して伝達関数を決定することが困難である[3]。

そこで、本論文では、ω=0 で指定した群遅延となり、指定した振幅特性の平たん度を有する最大平たん低域通過 FIR フィルタの伝達関数を提案する。さらに、任意の遮断周波数を通る準最大平たん低遅延低域通過 FIR フィルタの伝達関数も提案する。これは、次数と群遅延が同じで振幅特性の平たん度が 1 だけ異なる最大平たん低域通過 FIR フィルタを並列接続することによって得ることができる。本方法で得られる伝達関数は数学的に閉じた形で与えられるため、設計が簡単になる。

2．群遅延と振幅の平たん度が与えられた最大平たん低域通過 FIR フィルタの伝達関数

次数 N の実係数 FIR フィルタの周波数特性は、次式のように与えられる。

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{N}h(n)e^{-jn\omega}=A(\omega)e^{j\theta(\omega)} \tag{1}$$

ここで、$h(n)$はフィルタ係数で、$A(\omega)$と$\theta(\omega)$は、それぞれ振幅特性と位相特性である。ω=0 での群遅延τである最大平たん低域通過 FIR フィルタは、以下の条件を満たす必要がある。

$$A(\omega)\big|_{\omega=0}=1 \tag{2a}$$

$$\left.\frac{d^nA(\omega)}{d\omega^n}\right|_{\omega=0}=0,\quad \text{for } n=1,2,\ldots,2u+1 \tag{2b}$$

$$\left.\frac{d^nA(\omega)}{d\omega^n}\right|_{\omega=\pi}=0,\quad \text{for } n=0,1,\ldots,2v-1 \tag{2c}$$

$$\left.\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=0}=-\tau \tag{2b}$$

ここで、u,vはω=0 とω=πにおける振幅特性の平たん度を表わすパラメータであり、次式のように表わされる。

$$\begin{cases}u=1,2,\ldots\\ v=m/2 \qquad m=1,2,\ldots\end{cases} \tag{3}$$

このとき、条件(2a)～(2d)を満たすフィルタの伝達関数 $H(z)$ は以下のように数学的に閉じた形で与えられる。

$$H(z)=2^{-2v}\left(z^{-1}+1\right)^{2v}\times\sum_{i=0}^{2u}\left\{\sum_{j=0}^{i}2^{-j}\binom{-2v}{j}\binom{\tau}{i-j}\right\}\left(z^{-1}-1\right)^{i} \tag{4}$$

ここで、( )は、

$$\binom{a}{n}=\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} \tag{5}$$

で、a は実数、n は整数を表わす。式(4)が条件(2a)～(2d)を満足することは[4]に示した。[1]-[3]の方法では、群遅延が間接的に与えられるが、式(2)～(5)より明らかに、提案する方法は群遅延を直接パラメータとして利用可能であることが特徴である。

また、フィルタ次数 N と u, vの関係は、

$$N=2u+2v=2u+m \tag{6}$$

となる。ここで m は正の整数であるので、提案する伝達関数は奇数次、偶数次の FIR フィルタを実現できることができる。また、$\tau=N/2$ と選べば $H(z)$はよく知られた最大平たん直線位相 FIR フィルタの伝達関数[5]となる。

† 育英高専, Salesian Polytechnic
‡ 日本大学工学部, Nihon University

3．指定した遮断周波数を通る準最大平たん低遅延低域通過 FIR フィルタの伝達関数

最大平たん低域通過 FIR フィルタは、通過域と阻止域の平たん度によって遮断周波数が決まる。伝達関数の次数が一定のとき、通過域の平たん度が増加すれば遮断周波数も単調に増加する。

いま、次数と群遅延が同じで平たん度が 1 だけ異なる 2 つの最大平たん低遅延低域通過 FIR フィルタの伝達関数 $H_1(z)$, $H_2(z)$を与える。ここで、通過域の平たん度は $H_2(z)$が 1 だけ大きい、すなわち遮断周波数は $\omega_1 < \omega_2$ である。このとき、遮断周波数ω_c（$\omega_1 \le \omega_c \le \omega_2$）を通る伝達関数は次式のように与えられる。

$$H(z) = (1-\alpha)\cdot H_1(z) + \alpha \cdot H_2(z) \tag{7}$$

ここで、αは定数で、

$$\alpha = \frac{|H(\omega_c)| - |H_1(\omega_c)|}{|H_2(\omega_c)| - |H_1(\omega_c)|},\ 0 \le \alpha \le 1 \tag{8}$$

である。遮断周波数ω_cが与えられればαは一意に決まるので、式(7)の伝達関数は数学的に閉じた形である。

式(7)において、$H_1(z)$のω=0 とω=πでの平たん度をそれぞれ $2u$, 2νとすると、$H_2(z)$のω=0 とω=πでの平たん度はそれぞれ $2u$+1, 2ν-1 となる。したがって、$H(z)$の平たん度は $0<\alpha<1$ のときω=0 で $2u$、ω=πで 2ν-1 となる。以上より、提案する伝達関数 $H(z)$は、遮断周波数を指定できる代わりに $H_1(z)$, $H_2(z)$の伝達関数の平たん度より 1 だけ低くなる。このことから、本方法で得られる伝達関数は最大平たん特性ではなく、準最大平たん特性であると言える。

式(7)の方法で指定した遮断周波数を通る準最大平たんの伝達関数を与えるためには、群遅延と平たん度を指定した最大平たん特性の伝達関数を求める必要がある。これは、2．で提案した伝達関数が有効であることを意味する。

4．例

群遅延τ=5.0、ω=0 とω=πでの平たん度が $2u$=4, 2ν=7（次数 N=11）となる最大平たん低遅延低域通過フィルタの伝達関数 $H_1(z)$を考える。このとき、3．で述べたように、式(7)の $H_2(z)$の伝達関数は、群遅延τ=5.0、ω=0 とω=πでの平たん度が $2u$+1=5, 2ν-1=6 となる。$H_1(z)$, $H_2(z)$自身の特性は，式(7)よりαが 0 または 1 の場合に相当し，その振幅特性と群遅延特性を図１、図２に点線と波線で示す。次に、遮断周波数ω_cをゲイン 0.5 になるときの周波数と定義すると、$H_1(z)$の遮断周波数はω_c=0.4590π、$H_2(z)$の 遮断周波数はω_c=0.5595πとなる。そこで、$\omega_1 \le \omega_c \le \omega_2$ を満足するω_c=0.5πを通る準最大平たん低遅延低域通過フィルタ $H(z)$の設計を考える。式(8)よりα=0.4121 となり，そのときの振幅特性と群遅延特性を図１、図２に実線で示す。図２より $H(z)$のω=0 での群遅延は、指定したτ=5.0 であることがわかる。以上の例から、本方法は、指定した群遅延と平たん度を有する最大平たん低遅延低域通過 FIR フィルタと、指定した遮断周波数を通る準最大平たん低遅延低域通過 FIR フィルタが設計できることが確認できる。

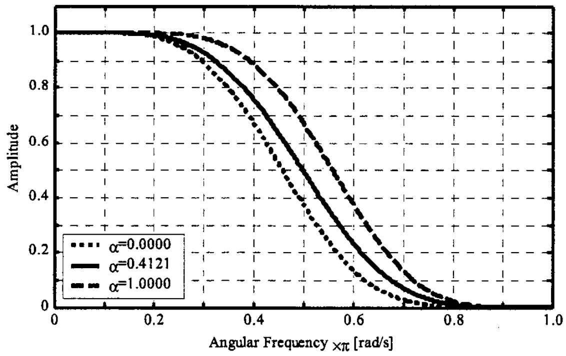

図1 振幅特性（τ=5.0, $2u$=4, 2ν=7）

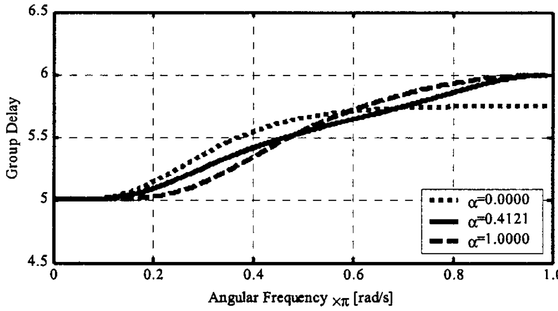

図2 群遅延特性（τ=5.0, $2u$=4, 2ν=7）

5．おわりに

本論文では、ω=0 で指定した群遅延となり、指定した振幅特性の平たん度を有する最大平たん低域通過 FIR フィルタの伝達関数を提案した。さらに、任意の遮断周波数を通る準最大平たん低遅延低域通過 FIR フィルタの伝達関数を提案した。これは、次数と群遅延が同じで振幅特性の平たん度が 1 だけ異なる最大平たん低域通過 FIR フィルタを並列接続することによって得ることができる。本方法で得られる伝達関数は数学的に閉じた形で与えられるため、設計が簡単になる。また、例により、本方法の有効性を示した。

文　献

[1] H. Baher, “FIR digital filters with simultaneous conditions on amplitude and delay,” Electron. Lett., vol.18, pp.296-297, Feb. 1982

[2] I. W. Selesnick and C. S. Burrus, “maximally flat low-pass FIR filters with reduced delay,” IEEE Trans. Circuits and Syst. II, vol.45, no.1, Jan. 1998

[3] S. Samadi, A. Nishihara and H. Iwakura, “Universal maximally flat lowpass FIR systems,” IEEE Trans. Signal Proc., vol.48, no.7, July 2000

[4] Y. Mori and N. Aikawa, “The transfer function of low delay maximally flat lowpass FIR digital filters,” Proc. ISCAS 2001, pp.II-89-92, Sydney, Australia, May 2001

[5] 相川直幸, 屋比久直也, 佐藤正光, “奇数次の低域通過最大平たん FIR フィルタ,” 信学論(A), vol.J75-A, no.4, pp.762-768, April 1992