

## 非線形発振回路の数値解析とSPICEによるSimulation

## Numerical Analysis of Nonlinear Oscillators and Their Simulation by SPICE

望月 孔二\* 若林 周汰\* 川上 誠† 大庭 勝久† 青木 悠祐† 宮内 太積‡ 舟田 敏雄†

Kouji Mochizuki Shuta Wakabayashi Makoto Kawakami Katsuhisa Ohba Yusuke Aoki

Tatsumi Miyauchi

Toshio Funada

## 1. まえがき

高専上級学年から専攻科にかけて技術者教育教程の高度化や工学的応用を目指した問題設定・解決能力の向上が求められている。そこで、一方では、力学解析・実験教材等を整備して、非線形力学系専門基礎科目の再編と教材の更新を図って来ており、並行して、電気電子工学分野の理論・実験・simulation (数值的、回路的) 教材等を整備することも、本校の総合システム工学プログラムとして学科枠や専門枠を超えて求められる。電気電子工学科4年の「負性抵抗発振回路の特性」実験の回路は Bonhoeffer-van der Pol (BVP) 方程式に従い、非線形発振の代表的な教材である。それに注目し、本研究でも、数値解析を併用して、BVP 及び van der Pol (VP) 方程式の特性を解明して来た。BVP 並びに変形 BVP (custom BVP, CBVP) 方程式については先行研究 [1] を参考にし、非線形発振器に関する SPICE 教材作成を進めている。CBVP 回路の抵抗とインダクタを交換すると Chua 回路 [2] となり、いずれも非線形発振の教材として重要である。

## 2. Chua 回路方程式の平衡点解析と Simulation

川上 [3] による非線形回路解析手順に従うこととして、Chua 回路 (Fig.1) [2] の方程式は次式で表される:

$$\begin{cases} C_1 \dot{v}_1(t) = \mu_1 (v_1(t) - \frac{1}{3}v_1(t)^3) \\ \quad - G_1 (v_1(t) - v_2(t)), \\ C_2 \dot{v}_2(t) = i_1(t) + G_1 (v_1(t) - v_2(t)), \\ L_1 \dot{i}_1(t) = -v_2(t) \end{cases} \quad (1)$$

$v(t)$  は電圧,  $i(t)$  は電流であり,  $C_1, C_2$  はキャパシタ,  $L_1$  はインダクタ,  $G_1 = 1/R_1$  はコンダクタ,  $g(v) = \mu_1(v^3/3 - v)$  は非線形負性抵抗の電流である。回路設定 ( $C_1 = 1, C_2 = 18, L_1 = 9/7, G_1 = 0.65, \mu_1 = 0.8$ ) [4] を用い、その周辺で値を変化させ発振特性を調べる。

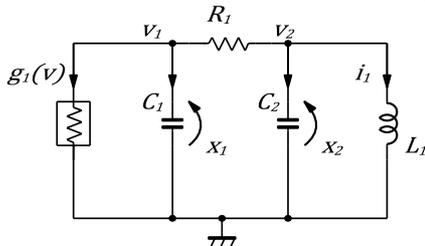


Fig.1 Chua circuit with  $g(v) = \mu_1(v^3/3 - v)$ .

\*沼津高専 電気電子工学科, Numazu National College of Technology, Department of Electrical & Electronics Engineering

†沼津高専 電子制御工学科, Numazu National College of Technology, Department of Digital Engineering

‡沼津高専 機械工学科, Numazu National College of Technology, Department of Mechanical Engineering

(1) 式より Chua 回路の平衡解  $\{v_{10}, v_{20}, i_{10}\}$  の方程式が得られ、その3つの平衡解は次のように表される:

$$\{0, 0, 0\}, \mp \frac{\sqrt{3}\sqrt{\mu_1 - G_1}}{\sqrt{\mu_1}} \{1, 0, G_1\} \quad (2)$$

よって、原点が第1平衡解で、 $\mu_1 \geq G_1$  の場合に第2,3の平衡解が有意である。まず、第1平衡解の安定性を調べるため、scaling parameter  $\epsilon$  ( $\epsilon \ll 1$ ) を用いて、平衡解に攪乱  $\{u_1(t), u_2(t), u_3(t)\}$  を加える。

$$\begin{cases} v_1(t) = v_{10} + \epsilon u_1(t), & v_2(t) = v_{20} + \epsilon u_2(t), \\ i_1(t) = i_{10} + \epsilon u_3(t) \end{cases} \quad (3)$$

これを方程式系 (1) に代入し、 $O(\epsilon)$  の項まで取ると、攪乱に対する線形化方程式系を得る。その解を

$$\{u_1(t), u_2(t), u_3(t)\} = \{u_{10}, u_{20}, u_{30}\} \exp(\lambda t) \quad (4)$$

と表して、線形化方程式系に代入すると、固有値  $\lambda$  の特性方程式 (3次の代数方程式) を得る:

$$a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0 \quad (5)$$

これに含まれる係数は、次式で定義される:

$$\{a_0, a_1, a_2, a_3\} = \{C_1 C_2 L_1, L_1 [(C_1 + C_2) G_1 - C_2 \mu_1], \\ C_1 - G_1 L_1 \mu_1, G_1 - \mu_1\} \quad (6)$$

Routh-Hurwitz の安定判別法により、 $\lambda$  の3次方程式 (5) の根が全て負の実部を持つための必要十分条件は、(i) 係数  $a_0, a_1, a_2, a_3$  が全て存在し、(ii) 全ての係数が同符号であり、(iii) 行列式  $D_1 = a_1, D_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3$  が全て正であることである。そこで、係数の内で定数の  $a_0$  は除くと、parameter  $\mu_1$  の変化に対し  $a_1, a_2, a_3, D_2$  の符号変化を調べる必要がある。まず、方程式  $D_2 = 0$  から  $\mu_1 = 0.0701504$  と  $\mu_1 = 0.615961$  を得て、 $D_2$  は正負正と変化することが分かる。次に、 $a_3 = 0$  から  $\mu_1 = 0.65$  を得て、 $a_3$  は正から負に変化する。さらに、(5) 式の  $\lambda$  の3根の実部の符号変化を調べる。

次に、第2,3平衡解に対する線形安定性解析により、固有値  $\lambda$  の特性方程式の係数は次式で定義される:

$$\{a_0, a_1, a_2, a_3\} = \{C_1 C_2 L_1, L_1 [C_1 G_1 + 2C_2 (\mu_1 - G_1)], \\ C_1 - (3G_1 - 2\mu_1) G_1 L_1, 2(\mu_1 - G_1)\} \quad (7)$$

この係数では、方程式  $D_2 = 0$  により  $\mu_1 = 0.66702$ ,  $\mu_1 = 0.939925$  を得て、 $a_3 = 0$  により  $\mu_1 = 0.65$  を得る。また、 $\lambda$  の3根の実部の符号変化を調べる。それらの安定性解析結果は次のようにまとめられる: 第

1 平衡点の安定性に関する  $\mu_1$  の範囲と根  $\lambda$  の分類は、(1 実根安定と 2 複素根安定)  $< 0.0701504 < (1 実根安定と 2 複素根不安定) < 0.615961 < (1 実根安定と 2 複素根安定) < 0.65 < (1 実根不安定と 2 複素根安定) < 0.66702 < (1 実根安定と 2 複素根不安定) < 0.939925 < (1 実根安定と 2 複素根安定)$  (Fig.2a) となる。これらの値は倉光等 [4] の解析とも一致する。

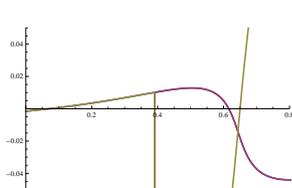


Fig.2a  $\Re\{\lambda\}$  vs.  $\mu_1$ , for the 1st solution.

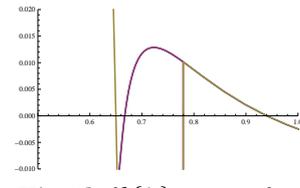


Fig.2b  $\Re\{\lambda\}$  vs.  $\mu_1$  for the 2nd/3rd solution.

以上の平衡点の線形攪乱に対する安定性解析は、平衡解に含まれる  $G_1$  についても行っているが、その詳細は省略する。

(1) 式の数値計算にあたり、第 1 平衡解に 3 つの初期変位 0.01 を加えた初期値、第 2 平衡解に 0.01 の初期変位を加えた初期値、初期値  $\{v_1(0), v_2(0), i_1(0)\} = \{1+0.01, 1+0.01, 1+0.01\}$  と回路設定を用いて、Mathematica で計算し、2D 位相面図 (Fig.3a)、3D 位相面図 (Fig.3b)、時系列図 (Fig.3c)、spectrum (Fig.3d)、複数の合成位相面図 (Fig.3e) を得る。

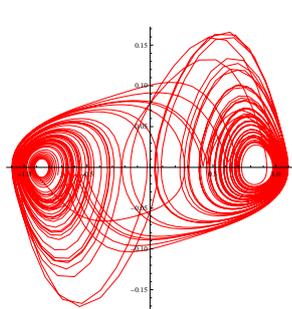


Fig.3a Phase portrait of  $(v_1(t), \dot{v}_1(t))$ , for  $\mu_1 = 0.8$ .

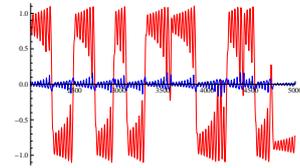


Fig.3c Time sequence of  $(v_1(t), \dot{v}_1(t))$ .

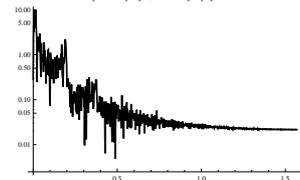


Fig.3d Spectrum of  $v_1(t)$  versus angular frequency in Log scale.

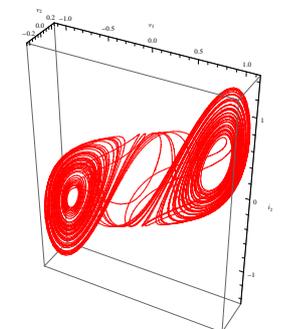


Fig.3b 3D portrait of  $(v_1(t), v_2(t), i_1(t))$ .

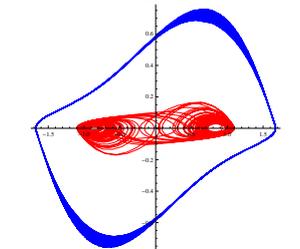


Fig.3e Phase portrait of  $(v_1(t), \dot{v}_1(t))$ .

数値計算により、線形安定性解析で求められた領域  $0.66702 < \mu_1 < 0.939925$  内で、 $\mu_1$  の変化に伴い、極

限軌道、周期倍化、周期 3 倍化、single-scroll, double-scroll が観測される。なお、数値計算では、振動波形から周期を算出して Poincaré 図の作成、Lyapunov 数の算出・作図等の program が用意されている。

回路実験・解析・数値 simulation と連携して、LT SPICE の simulation (Fig.4) が組まれている。図では  $\mu_1 = 0.8$  の位相面図が描かれているが、ほかに時系列、spectrum を描くことができる。LT SPICE では、非線形負性抵抗  $g(v)$  を 3 次曲線、区分線形関数、双曲線正接関数等で簡単に記述できるため、様々な非線形発振回路を simulation できる点が優れている。

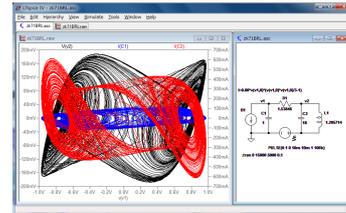


Fig.4 Simulation of Chua circuit by LT SPICE.

### 3. あとがき

先行研究を参考にし、非線形発振回路の理論・実験・simulation 教材の作成状況を報告した。この Chua 回路解析と同様な教材は変形 BVP 回路についても作成された。論文の研究成果の周辺を教育教材として補充し、非線形回路の学修に効果的な教材提供が課題となっている。電気回路実験・simulation は複雑な微分方程式を扱うよりも簡単で且つ直感的に理解し易いため、高度な技術者の育成教程で本取組が重要な役割を果たすものと期待される。

なお、高度な解析に関わるものは数値解析例に留めることとしている。Chua 回路解析に関して、Leonov 等 [5] により、新たな展開が見られた。それらに関しては、数値解析例を作成して対応する予定である。

### 参考文献

- [1] 上田 哲史, 川上 博: “変形 BVP 発振器に生じる周期解の分岐とカオス” 電子情報通信学会技術研究報告. NLP, 非線形問題 101(464), pp.71-78, 2001-11-21.
- [2] T. Matsumoto, L. Chua, and M. Komuro: “The Double Scroll” *IEEE Transactions on circuits and systems*, Vol. CAS-32, No. 8, August 1985, pp.798-818.
- [3] 川上 博: “非線形現象入門 定性的接近法” 2005. <http://cms.db.tokushima-u.ac.jp/DAV/lecture/125260/LectureNote/2006/NonlinearPhenomena.pdf>
- [4] 倉光 正己, 荒谷 篤志: “3 次元発振回路におけるカオス発生機構の検討” 電子情報通信学会技術研究報告. NLP, 非線形問題 94(160), 39-46, 1994-07-21
- [5] G. A. Leonov, N. V. Kuznetsov and V. I. Vagitse: “Hidden attractor in smooth Chua systems” *Physica D* **241** (2012), 1482-1486.