

代用電荷法と Newton 法による逆等角写像の数値計算法†

天 野 要†† 高 松 孝 安†† 安 倍 齊††

代用電荷法に基づいて、与えられた Jordan 領域、その外部、または有界な 2 重連結領域から、それぞれ、単位円の内部、その外部、または円環領域への等角写像を簡単かつ高精度に計算することができる。ここでは、その近似写像関数の記述が簡潔であることに着目し、代用電荷法と Newton 法の結合による逆写像、すなわち、標準領域から与えられた問題の領域への等角写像の計算法を提案する。この逆写像の計算法は、あらかじめ求められた近似写像関数を用いて、1 点ごとに反復計算を行うものである。しかし、その原理とプログラミングは簡単であり、高い精度を得ることができ、誤差の評価も可能である。特に、等角写像の応用上重要な標準領域における等絶対値線と等偏角線の逆写像の計算に適している。本稿では、単連結領域の内部問題、すなわち、単位円の内部から与えられた Jordan 領域への写像を扱う。

1. はじめに

Dirichlet 問題の解である調和関数とその共役調和関数を複素対数ポテンシャルの 1 次結合で近似して、与えられた Jordan 領域、その外部、または有界な 2 重連結領域（問題領域と呼ぶ）から、それぞれ単位円の内部、その外部、または円環領域（標準領域と呼ぶ）への等角写像を簡単かつ高精度に計算することができる^{1)~3)}。この計算法は、Laplace 方程式の数値解法としての代用電荷法の優れた特徴を継承し、等角写像の計算法としては数学的表現が最も簡潔なものの 1 つである。

ここでは、その近似写像関数の記述が簡潔であることに着目し、代用電荷法と Newton 法の結合による逆写像、すなわち、標準領域から問題領域への等角写像の計算法を提案する。この計算法は、特に、標準領域における等絶対値線と等偏角線の逆写像の計算に適している。これらは、電磁気学でいえば等電位面と電気力線に相当し、等角写像の応用上重要である。

数値等角写像の研究は、問題領域から標準領域への写像を求める問題と、逆に、標準領域から問題領域への写像を求める問題に大別される^{4), 5)}。その計算法としては、いずれの場合も、境界対応関数を未知量とする積分方程式に基づく方法が主流である。しかし、従来、両者は比較的独立した問題として研究されてきた。一般に、問題領域から標準領域への等角写像の場合には、積分方程式は線形である。一方、標準領域か

ら問題領域への場合には、積分方程式は非線形であり、その数値解法にはさまざまな反復法が用いられる。問題領域から標準領域への計算法としては Symm の積分方程式法^{6)~8)}とその改良法^{9)~11)}が代表的であるが、これらは標準領域から問題領域への写像の計算には必ずしも適していない。逆に、標準領域から問題領域への計算法としては Theodorsen の積分方程式に基づく方法^{12)~14)}が代表的であるが、これらは問題領域から標準領域への写像の計算には必ずしも適していない。したがって、いずれの問題にも効果的に適用できる計算法の開発は数値等角写像に関する重要な研究課題の 1 つである。

代用電荷法と Newton 法の結合は次のような特徴を持っている。

(1) 問題領域から標準領域への等角写像と標準領域から問題領域への等角写像のいずれの問題をも計算することができる。

(2) 問題領域から標準領域への計算法としては、従来の方法と比較して、(a)原理と数学的表現が簡潔でプログラミングが容易である、(b)数値積分が不要で計算量が少ない、(c)精度が高い、(d)正則関数の最大値の原理が利用できることで誤差の評価が容易である、等の特徴を持っている^{1)~3)}。

(3) 標準領域から問題領域への計算法としても、次の 1 点を除いて、上記の特徴 (a)~(d) がそのまま成立する。その 1 点とは、問題領域から標準領域への近似写像関数を用いて、各点ごとに反復計算を要するという点である。しかし、後述のように、この問題における Newton 法の収束はきわめて良い。また、特に、標準領域における等絶対値線と等偏角線の逆写像の計算に適しているという特徴は重要である。

本稿では、単連結領域の内部問題¹⁾、すなわち、単

† Numerical Inverse Conformal Mapping by the Charge Simulation Method Combined with Newton's Method by KANAME AMANO, TAKAYASU TAKAMATSU and HITOSHI ABE (Department of Applied Mathematics, Faculty of Engineering, Ehime University).

†† 愛媛大学工学部応用数学教室

位円の内部から与えられた Jordan 領域への写像を扱う。しかし、その方法は外部問題²⁾や2重連結領域の問題³⁾にも適用することができる。

2. Riemann の写像定理と近似写像関数

Riemann の写像定理によれば、少なくとも2つの点を含む境界を持つ任意の単連結領域は単位円の内部に等角写像することができる。ここでは、 z 平面上の与えられた Jordan 曲線 C で囲まれた Jordan 領域 D から w 平面上の単位円の内部 $|w| < 1$ への等角写像を考える (図1)。その写像関数 $w=f(z)$ は、 D の内部に原点をとれば (問題の一般性を失わない)、正規化条件 $f(0)=0$, $f'(0)>0$ の下に一意的に定まり、

$$w=f(z)=ze^{g(z)+ih(z)} \quad (1)$$

で与えられる^{1),4)}。ここに、 $g(z)$ と $h(z)$ は D で共役な調和関数であり、それぞれ、 C が単位円に移るための境界条件

$$g(z)=-\log|z|, \quad z \in C \quad (2)$$

と正規化条件 $f'(0)>0$ すなわち

$$h(0)=0 \quad (3)$$

を満たさなければならない ($f(0)=0$ の成立は明らかである)。さらに、 C は Jordan 曲線であるから、Carathéodory の定理により、 $f(z)$ は境界をも含む閉領域 $\bar{D}=D+C$ を1対1、連続に写像する。

代用電荷法に基づいて、この共役な調和関数 $g(z)$ と $h(z)$ を問題の領域 D の外部に配置された N 個の電荷点 ζ_i を極とする複素対数ポテンシャルの実部と虚部の1次結合で近似して、次のように、この等角写像の簡潔かつ高精度な近似写像関数を与えることができる¹⁾。

$$W=F(z)=ze^{G(z)+iH(z)}, \quad z \in \bar{D} \quad (4)$$

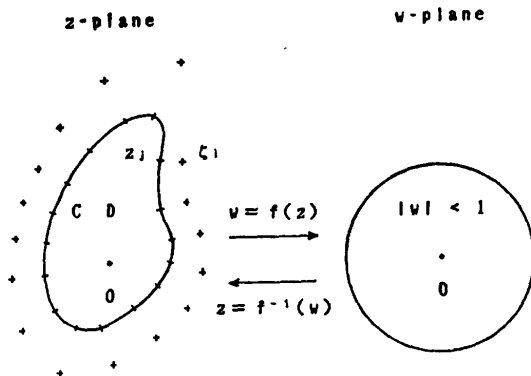


図1 等角写像と逆写像および代用電荷法

Fig. 1 Conformal mapping and its inverse mapping, and the charge simulation method.

$$G(z)=-\sum_{i=1}^N Q_i \log|z-\zeta_i| \quad (5)$$

$$\begin{aligned} H(z) &= -\sum_{i=1}^N Q_i \arg(z-\zeta_i) + \theta_0 \\ &= -\sum_{i=1}^N Q_i \arg(1-z/\zeta_i) \end{aligned} \quad (6)$$

ここに、

$$\theta_0 = \sum_{i=1}^N Q_i \arg(-\zeta_i) \quad (7)$$

は正規化条件 $F'(0)>0$ すなわち $H(0)=0$ から定まる回転の任意定数で、 W , F , G , H 等の大文字は近似値を表す。未定係数である電荷 Q_i は境界 C 上に選ばれた N 個の拘束点 z_j で境界条件 (2) を満たすように定められる。すなわち、 Q_i は拘束条件と呼ばれる連立1次方程式

$$\sum_{i=1}^N Q_i \log|z_j-\zeta_i| = \log|z_j|, \quad (8)$$

$$j=1, 2, \dots, N$$

の解である。

電荷点と拘束点の数 N と位置 ζ_i , z_j に起因する公式誤差の大小にかかわらず、また、(8)式から電荷 Q_i の数値解を求める過程で大きな桁落ち誤差を生じても、問題の領域 D における $G(z)$ と $H(z)$ の共役調和性と $F(z)$ の正則性が成立していることに注意する。

3. 逆写像の数値計算法

等角写像 (1) の逆写像 $z=f^{-1}(w)$ では、 $w=re^{i\theta}$ 平面上の同心円 $r=r_c$ ($0 < r_c \leq 1$) と、これに直交する放射状の直線 $\theta=\theta_c$ ($-\pi < \theta_c \leq \pi$) とに対応する $z=x+iy$ 平面上の曲線群、すなわち、標準領域における等絶対値線と等偏角線 (図2) の逆写像が重要である。ここで、(4)~(7)式から、

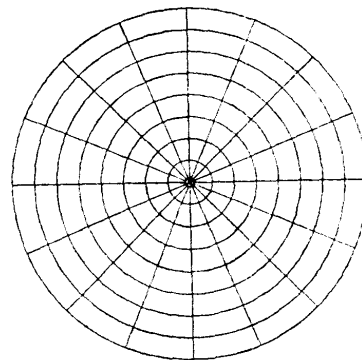


図2 等絶対値線と等偏角線

Fig. 2 Equi-modulus lines and equi-argument lines on the unit disk.

$$W = F(z) = R(z)e^{i\theta(z)} = e^{P(z)+i\theta(z)} \quad (9)$$

とおけば,

$$P(z) = \log R(z) = \log |z| + G(z) \quad (10)$$

$$\theta(z) = \arg z + H(z) \quad (11)$$

であり, これらの導関数も, 差分近似を用いることなく,

$$P_x = x/|z|^2 - \sum_{i=1}^N Q_i(x-\xi_i)/|z-\zeta_i|^2, \quad (12)$$

$$P_y = y/|z|^2 - \sum_{i=1}^N Q_i(y-\eta_i)/|z-\zeta_i|^2, \quad (13)$$

$$\theta_x = -y/|z|^2 + \sum_{i=1}^N Q_i(y-\eta_i)/|z-\zeta_i|^2, \quad (14)$$

$$\theta_y = x/|z|^2 - \sum_{i=1}^N Q_i(x-\xi_i)/|z-\zeta_i|^2 \quad (15)$$

と簡潔に書き表すことができる. ここに, $\zeta = \xi + i\eta$ で, P_x は $\partial P/\partial x$ を意味する. したがって, $P(z)$ と $\theta(z)$ は z 平面上の 1 価関数で, x 方向と y 方向の導関数を正確に計算できるから, 等高線の作図法¹⁵⁾と同様な方法で, 問題の逆写像を計算することができる.

ここでは, まず等絶対値線の逆写像 $R(z) = r_c$ すなわち $P(z) = \rho_c$ ($\rho_c = \log r_c$) と等偏角線の逆写像 $\theta(z) = \theta_c$ の計算法を記し, 次いで 1 点 w_c の逆写像 $F^{-1}(w_c)$ の計算法を記す.

3.1 等絶対値線の逆写像

等絶対値線の逆写像 $P(z) = \rho_c$ 上の 1 点を z_k として, 次の 1 点 z_{k+1} を以下の手順で計算することができる (図 3).

1° z_k から接線方向に距離 t ($0 < t \ll 1$) だけ離れた点

$$z_{k1} = z_k + te^{i(\arg(\nabla P(z_k)) + \pi/2)} \quad (16)$$

を計算する. ここに, ∇ は微分演算子であり, $\nabla P(z_k)$ は $\nabla P(z) = P_x + iP_y$ の $z = z_k$ における値を意味する.

2° 2次元平面上の Newton 法により, z_{k+1} の近似値

$$z_{k2} = z_{k1} - \Delta t e^{i \arg(\nabla P(z_{k1}))}, \quad (17)$$

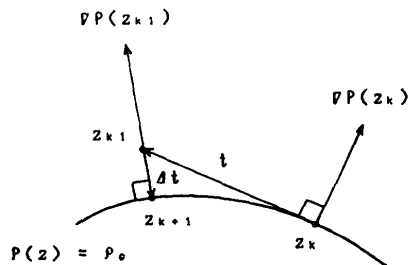


図 3 Newton 法

Fig. 3 Newton's method on the 2-dimensional plane.

$$\Delta t = (P(z_{k1}) - \rho_c) / |\nabla P(z_{k1})| \quad (18)$$

を計算する.

3° $|R(z_{k2}) - r_c| > \varepsilon_r$ すなわち $|P(z_{k2}) - \rho_c| > \varepsilon_p$ ($\varepsilon_p = \varepsilon_r / r_c$) であれば $z_{k1} = z_{k2}$ において 2° に戻る.

また, $|R(z_{k2}) - r_c| \leq \varepsilon_r$ すなわち $|P(z_{k2}) - \rho_c| \leq \varepsilon_p$ であれば $z_{k+1} = z_{k2}$, $k = k+1$ において 1° に戻る.

ここに, ε_r ($0 < \varepsilon_r \ll 1$) は Newton 法の要求精度である. なお, 等絶対値線については, この要求精度を $|R(z_{k2}) - r_c| / r_c \leq \varepsilon_r$ すなわち $|P(z_{k2}) - \rho_c| \leq \varepsilon_p$ と相対誤差で与える方がよい.

出発点 z_0 は, z_{k1} に適当な初期値を与えて, 全く同様に 2° と 3° の手続きを反復して求めることができる. また, 3° で (数ステップ以上の計算後) $|z_{k+1} - z_0| \leq t$ となった場合には, $z_{k+2} = z_0$ として, この等絶対値線の計算を終了する.

なお, 計算のステップ幅 t の値は後述のように写像関数の局所的な形に応じて変えることができる.

3.2 等偏角線の逆写像

等偏角線の逆写像 $\theta(z) = \theta_c$ は, $P(z)$, ρ_c , ε_r をそれぞれ $\theta(z)$, θ_c , ε_θ ($0 < \varepsilon_\theta \ll 1$) に置き換えれば, (16) ~ (18) 式の代わりに,

$$z_{k1} = z_k + te^{i(\arg(\nabla \theta(z_k)) + \pi/2)} \quad (19)$$

$$z_{k2} = z_{k1} - \Delta t e^{i \arg(\nabla \theta(z_{k1}))} \quad (20)$$

$$\Delta t = (\theta(z_{k1}) - \theta_c) / |\nabla \theta(z_{k1})| \quad (21)$$

を用いて, 等絶対値線の場合と全く同様に計算することができる. ただし, 出発点 z_0 を境界 C 上に取り, 原点を終着点とする.

しかし, $\theta_c = \pm \pi$ の場合には注意を要する. すなわち, 計算の途中で (21) 式の分子が $\arg$ 関数の $\pm \pi$ の不連続線を横切ることがあってはならない. そこで, $\theta_c = +\pi$ の場合には, $\theta(z_{k1}) < 0$ になれば $\theta(z_{k1}) = \theta(z_{k1}) + 2\pi$ において (21) 式を計算する. また, $\theta_c = -\pi$ の場合には, $\theta(z_{k1}) > 0$ になれば $\theta(z_{k1}) = \theta(z_{k1}) - 2\pi$ において (21) 式を計算する.

3.3 1 点の逆写像

w 平面上に与えられた 1 点 w_c の逆写像は, $\rho_c = \log |w_c|$, $\theta_c = \arg w_c$ として, 等絶対値線と等偏角線の逆写像の計算法の重ね合せで求めることができる. すなわち, z_{k1} に適当な初期値を与えて,

$$z_{k2} = z_{k1} - \Delta t_p e^{i \arg(\nabla P(z_{k1}))} - \Delta t_\theta e^{i \arg(\nabla \theta(z_{k1}))}, \quad (22)$$

$$\Delta t_p = (P(z_{k1}) - \rho_c) / |\nabla P(z_{k1})|, \quad (23)$$

$$\Delta t_\theta = (\theta(z_{k1}) - \theta_c) / |\nabla \theta(z_{k1})| \quad (24)$$

を計算し, $|P(z_{k2}) - \rho_c| \leq \varepsilon_p$ かつ $|\theta(z_{k2}) - \theta_c| \leq \varepsilon_\theta$,

または $|F(z_{k2}) - w_c| \leq \varepsilon_N$ ($0 < \varepsilon_N \ll 1$) で収束の判定を行えばよい。

4. 誤 差

誤差には、丸め誤差のほか、近似写像関数の公式誤差と Newton 法の要求精度に起因する誤差とがある。逆写像の誤差の評価には、正則関数の空間的な拡大率がその導関数の絶対値に等しいことを利用して、まず w 平面上の誤差を評価し、それを z 平面上の誤差に変換するという方法を探る。ここでは、まず与えられた 1 点の逆写像の場合を記し、次いで等絶対値線と等偏角線の逆写像の場合を記す。

1 点の逆写像では、与えられた w_c に対して、写像関数 (1) の逆関数を用いて $z_c = f^{-1}(w_c)$ を求める代わりに、近似写像関数 (4) を用いて $Z_c = F^{-1}(w_c)$ を要求精度 ε_N の Newton 法で計算する (図 4)。その結果、収束条件を満たす解 z_k が得られたとすると、 $W_k = F(z_k)$ として、Newton 法の要求精度に起因する w 平面上の誤差は

$$\varepsilon_N(w_c) = |W_k - w_c| \leq \varepsilon_N \quad (25)$$

である。ここで、正則関数 $W = F(z)$ による平面の局所的な拡大率はその方向に依存せず $|F'(z)|$ に等しいから¹⁶⁾、(25)式に対応する z 平面上の誤差は、

$$\begin{aligned} E_N(Z_c) &= |z_k - Z_c| \\ &\doteq |W_k - w_c| / |F'(Z_c)| \\ &\leq \varepsilon_N / |F'(Z_c)| \end{aligned} \quad (26)$$

となる。ここに、 $F'(z) \neq 0$ は写像 $W = F(z)$ が z で等角であるための必要条件であることに注意する。一方、近似写像関数 $F(z)$ の公式誤差については、 $W_c = f(Z_c)$ として、正則関数の最大値の原理により、

$$\varepsilon_F(w_c) = |W_c - w_c|$$

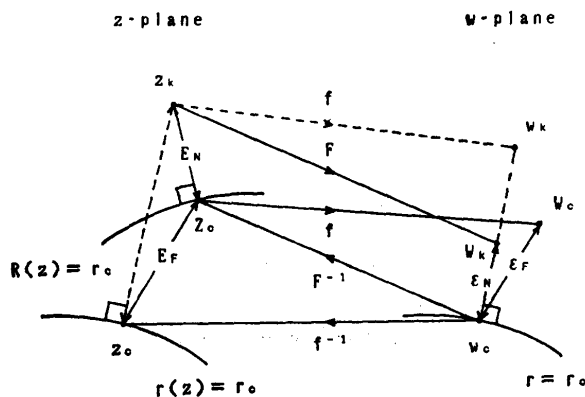


図 4 誤差評価
Fig. 4 Error estimation.

$$\begin{aligned} &\leq \max_C |F(z) - f(z)| = \varepsilon_F \\ &\doteq 2 \max |F(z_{j+1/2})| - 1 \end{aligned} \quad (27)$$

という関係が成立している¹⁷⁾。ここに、添字の C は境界上での評価を示し、 $z_{j+1/2}$ は C 上の拘束点 z_j と z_{j+1} の間の中間点である。この誤差は、(26)式の場合と同様に、 z 平面上で

$$\begin{aligned} E_F(z_c) &= |Z_c - z_c| \\ &\doteq |W_c - w_c| / |f'(z_c)| \\ &\leq \varepsilon_F / |f'(z_c)| \end{aligned} \quad (28)$$

となる。したがって、全体の誤差を $E_R(z_c)$ とすれば、

$$\begin{aligned} E_R(z_c) &= |z_k - z_c| \leq |z_k - Z_c| + |Z_c - z_c| \\ &= E_N(Z_c) + E_F(z_c) \\ &\leq \varepsilon_N / |F'(Z_c)| + \varepsilon_F / |f'(z_c)| \end{aligned} \quad (29)$$

が成立する。ただし、記号 $\leq$ は、厳密に不等号が満たされる保証はないが、ある程度高い確率でこれが満たされることを期待できることを意味する。

実際には z_c , Z_c , W_c が計算されることはなく、したがって、(29)式右辺の $f'(z_c)$ と $F'(Z_c)$ は未知である。しかし、この式は

$$E_R(z_c) \leq \varepsilon_N / \min_C |F'(z)| + \varepsilon_F / \min_C |f'(z)| \quad (30)$$

と近似することができる。なぜなら、問題の領域で、 $w = f(z)$ は正則であるから、その導関数 $f'(z)$ と逆関数 $z = f^{-1}(w)$ も正則で、

$$f'(z) \cdot f^{-1'}(w) = 1 \quad (31)$$

という関係が成立する。このとき、 $f^{-1'}(w)$ もまた正則であるから、(31)式の $f'(z)$ と $f^{-1'}(w)$ に最大値の原理を適用することができる。したがって、 $|f'(z)|$ と $|f^{-1'}(w)|$ はいずれも境界上で最大値とともに最小値をもとらなければならない。 $F(z)$ についても同様である。ゆえに、(30)式が成立する。さらに、

$$\min_C |F'(z)| \doteq \min_C |f'(z)| \quad (32)$$

であれば、(30)式を

$$E_R(z_c) \leq (\varepsilon_F + \varepsilon_N) / \min_C |F'(z)| \quad (33)$$

と近似することができる。実際、多くの場合 (境界 C の形状が比較的滑らかであれば)、適切な電荷点と拘束点を用いた $F(z)$ の精度はきわめて高いことを数値実験的に確かめることができる。

なお、(4)~(7)式から、

$$F'(z) = e^{G(z) + iH(z)} \left\{ 1 - z \sum_{i=1}^N Q_i / (z - \zeta_i) \right\}, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} |F'(z)| &= e^{G(z)} \left[\left\{ 1 - \sum_{i=1}^N Q_i \frac{x(x - \xi_i) + y(y - \eta_i)}{|z - \zeta_i|^2} \right\}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \sum_{i=1}^N Q_i \frac{x(y - \eta_i) - y(x - \xi_i)}{|z - \zeta_i|^2} \right\}^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (35)$$

である。

等絶対値線または等偏角線の逆写像の場合には、1点 w_c の代わりに、半径 r_c または偏角 θ_c が与えられる。この場合にも、 W_k から $r=r_c$ または $\theta=\theta_c$ へ下した垂線（最短距離）の足を w_c と考えて、 ε_N をそれぞれ ε_r または ε_θ に置き換えれば、(25)式は

$$\begin{aligned}\varepsilon_r(w_c) &= |W_k - w_c| \\ &= |R(z_k) - r_c| \\ &\leq r_c \varepsilon_r \leq \varepsilon_r,\end{aligned}\quad (25')$$

または

$$\begin{aligned}\varepsilon_\theta(w_c) &= |W_k - w_c| \\ &= |R(z_k) - \theta_c| \\ &\leq R(z_k) \varepsilon_\theta \leq \varepsilon_\theta\end{aligned}\quad (25'')$$

となって、以上の議論がそのまま成立する。

5. 計算例

円（凸形）、Cassini の楕形（凹形）、正方形（角の存在）という典型的な3種の領域（文献¹⁾の例に対応）について、標準領域における等絶対値線と等偏角線（図2）の逆写像の計算例を示す。

円と Cassini の楕形については、初等的な写像関数が知られているので、より直接的な誤差の評価が可能である（図4）。すなわち、収束条件を満たす解 z_k が得られたとすると、 $w_k = f(z_k)$ として、 w_k から $r=r_c$ または $\theta=\theta_c$ へ下した垂線の足は $w_c = r_c \exp(i \arg w_k)$ または $w_c = |w_k| \exp(i \theta_c)$ である。したがって、逆写像の誤差は z 平面上で

$$\begin{aligned}E_X(z_c) &= |z_k - z_c| \\ &= |z_k - f^{-1}(w_c)|\end{aligned}\quad (36)$$

となる。通常、これをさらに

$$E_X(z_c) \leq \max_c |z_k - f^{-1}(w_c)| \quad (37)$$

と近似することができる。なぜなら、正則関数の最大値の原理により、 $E_F(z_c) = |F^{-1}(w_c) - f^{-1}(w_c)|$ は境界上で最大値をとる。また、 $E_N(z_c) = |W_k - w_c| / |F'(Z_c)|$ の分子 $|W_k - w_c|$ は、Newton 法の要求精度によって定まり、境界上で大きく ((25')および(25''))を参照、分母 $|F'(Z_c)|$ は前述のように境界上で最小値をとらなければならないからである。しかし、(37)式の右辺を誤差の指標の1つとして採用することの適否は厳密には数値実験的な検証を必要とすることに注意する。

正方形についても、この等角写像は逆 Schwarz-Christoffel 変換であるから、写像関数の楕円関数（逆写像関数の楕円積分）表現は可能である。しかし、そ

の角点では $f'(z)=0$ となる¹⁶⁾ことに注意する。

計算結果の提示に用いられた記号は次のとおりである。

N : 電荷数=拘束点数（括弧内は対称性を利用した場合の拘束条件の連立1次方程式の元数）。

r_0, p, q : 問題によって意味の異なる電荷配置のパラメータ。

t : 計算のステップ幅。文献¹⁵⁾の方法に従って、写像関数の局所的な形に応じて変える。すなわち、 t とその最初の修正量 Δt との比によって、 $|\Delta t/t| < t_1$ ($t_1=0.05$ とする) ならば $t=1.5t$ とし、 $t_1 \leq |\Delta t/t| \leq t_*$ ($t_*=0.1$ とする) ならば t の値はそのまま、それぞれ次の点を計算する。また、 $|\Delta t/t| > t_*$ ならば $t=t/2$ としてその点の計算をやり直す。

ε_F : 近似写像関数の公式誤差。写像関数との比較による値（円、Cassini の楕形）または近似値（正方形）で、その評価には拘束点と中間点における計算値が用いられる¹⁾。

$N_{r,k}, N_{r,l}, N_{\theta,k}, N_{\theta,l}$: それぞれ、等絶対値線と等偏角線の逆写像曲線1本あたりの平均近似点数と Newton 法の平均反復数。

E_R, E_X : 逆写像の誤差の指標。(33)または(37)式の右辺に基づく評価値。

なお、計算には愛媛大学情報処理センターの FACOM M-360 AP システムを利用した。いずれの場合も単精度である。

例1 円（図5）

境界 $(x-x_c)^2 + y^2 = 1, x_c = 0.75$

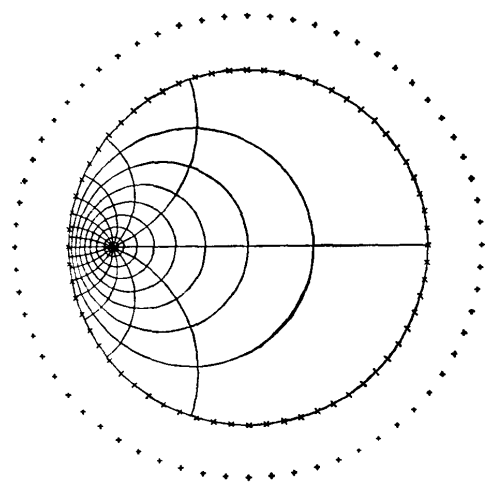


図5 等絶対値線と等偏角線の逆写像（円）
Fig. 5 Inverse mapping of equi-modulus lines and equi-argument lines for a circular domain.

写像関数 $w=f(z)=z/[1+x_c(z-x_c)]$

$$z=f^{-1}(w)=w(1-x_c^2)/(1-x_c w)$$

$$\min|f'(z)|=|f'(1+x_c)|=0.1428571$$

拘束点 $x_j=\cos(j-1)\Delta\theta+x_c$

$$y_j=\sin(j-1)\Delta\theta$$

$$\Delta\theta=2\pi/N, N=64(33)$$

電荷点 $\zeta_i=r_Q(z_i-x_c)+x_c, r_Q=1.3$

Newton 法 の要求精度

$$\varepsilon=\varepsilon_r=\varepsilon_\theta=10^{-5}$$

計算結果 $\varepsilon_F=\max_c|F(z)-f(z)|=1.7\times 10^{-5}$

$$\min_c|F'(z)|=0.1428557$$

$$N_{r,k}=51.1, N_{r,i}=1.7$$

$$N_{\theta,k}=9.1, N_{\theta,i}=1.8$$

$$E_R=(\varepsilon_F+\varepsilon)/\min|f'(z)|=1.9\times 10^{-4}$$

$$E_X=\max_c|z_k-f^{-1}(w_c)|=4.4\times 10^{-5}$$

電荷点の配置は境界拡大法による。

誤差 E_R と E_X の値はこの逆写像の計算精度がきわめて高いことを示している。しかし、両者の値には約4倍の差異がある。これは、 E_R の評価式が近似写像関数の誤差と Newton 法の誤差および逆写像によるこれらの誤差の拡大率 $1/|f'(z)|$ のすべてが同じ点で最大値をとり、しかも前2者は同方向であるという最悪の場合を想定しているためである。したがって、実際の誤差は E_R の値よりかなり小さいと考えられる。このとき、(32)式は約5桁の精度で成立している。また E_X の値は原点すなわち正規化点に近づくほど減少し(最も内側の等絶対値線上で $\max E_X=1.5\times 10^{-6}$)、(37)式もよく成立している。

なお、Newton 法の収束は等絶対値線と等偏角線の際の場合にも良好である。また、電荷配置のパラメータ R_Q の変化に対して、計算精度は $\varepsilon_F=3.2\times 10^{-5}$ ($r_Q=1.2$)、 1.9×10^{-5} (1.4)、 1.4×10^{-5} (1.5) と安定している。

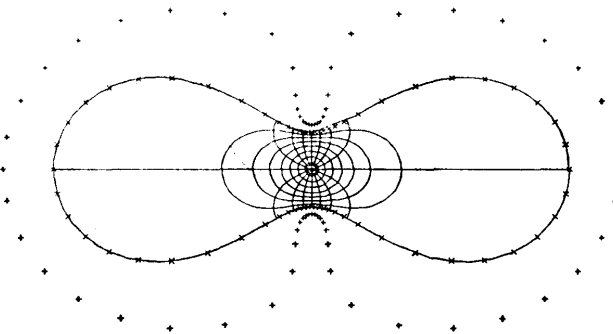


図6 等絶対値線と等偏角線の逆写像 (Cassini の楕形)
Fig. 6 Inverse mapping of equi-modulus lines and equi-argument lines for a domain of oval of Cassini.

例2 Cassini の楕形 (図6)

$$\text{境界 } \{(x+1)^2+y^2\}\{(x-1)^2+y^2\}=a^4$$

$$a=2^{1/32}=1.0218$$

写像関数 $w=f(z)=az/(a^4-1+z^2)^{1/2}$

$$z=f^{-1}(w)=(a^4-1)^{1/2}w/(a^2-w^2)^{1/2}$$

$$\min|f'(z)|=|f'| \{(a^2+1)^{1/2}\} = 2.965223\times 10^{-2}$$

拘束点 $x_j=r\cos\theta$

$$y_j=r\sin\theta$$

$$r=\{\cos 2\theta+(\cos^2 2\theta+a^4-1)^{1/2}\}^{1/2}$$

$$\theta=2\pi(j-1)/N, N=64(17)$$

電荷点 $\zeta_i=z_i+r_Q|z_i-z_{i-1}|e^{i(\arg(z_i-z_{i-1})-\pi/2)}$

$$r_Q=2.0$$

Newton 法 の要求精度

$$\varepsilon=\varepsilon_r=\varepsilon_\theta=10^{-5}$$

計算結果 $\varepsilon_F=\max_c|F(z)-f(z)|=2.5\times 10^{-5}$

$$\min_c|F'(z)|=2.966073\times 10^{-2}$$

$$N_{r,k}=51.0, N_{r,i}=1.7$$

$$N_{\theta,k}=10.5, N_{\theta,i}=1.8$$

$$E_R=(\varepsilon_F+\varepsilon)/\min|f'(z)|=1.2\times 10^{-3}$$

$$E_X=\max_c|z_k-f^{-1}(w_c)|=1.5\times 10^{-4}$$

電荷点の配置は文献^{2),3)}の方法による。

この場合にも計算精度は高いが、誤差 E_R と E_X の値には約8倍の差異がある。これも、 E_R の評価式が前述のような最悪の場合を想定しているためであり、特に $\min|f'(z)|=0.029\cdots$ という値による。このとき、例1の場合と同様に、(32)式は3~4桁の精度で成立し、(37)式もよく成立(最も内側の等絶対値線上で $\max E_X=2.4\times 10^{-7}$) している。

なお、Newton 法の収束は良好であり、電荷配置のパラメータの変化に対しても、 $\varepsilon_F=1.0\times 10^{-4}$ ($r_Q=1.0$)、 2.5×10^{-5} (1.5)、 5.7×10^{-5} (2.5) と、計算精度は比較的安定している。

例3 正方形 (図7)

$$\text{境界 } |x-x_c|=1, |y-y_c|=1$$

$$x_c=0.25, y_c=0.5$$

拘束点 $x_j=1+x_c$

$$y_j=(1-r_Q^{1/8})/(1-r_Q^{N/8})+y_c$$

$$(1\leq j\leq N/8+1, \text{ 他は対称配置})$$

$$r_Q=1/2^{1-N/8}, N=64$$

電荷点 $\xi_i=(1-p/q)\eta_i+p+x_c$

$$\eta_i=q(1-r_Q^{1/8})/(1-r_Q^{N/8})+y_c$$

$$p=1.4, q=1.1$$

Newton 法 の要求精度

$$\varepsilon=\varepsilon_r=\varepsilon_\theta=10^{-5}$$

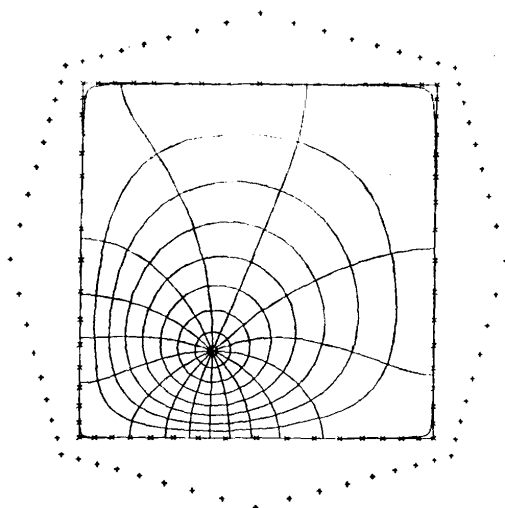


図 7 等絶対値線と等偏角線の逆写像 (正方形)

Fig. 7 Inverse mapping of equi-modulus lines and equi-argument lines for a square domain.

計算結果 $\varepsilon_F = 2\max ||F(z_{j+1/2})| - 1| = 1.0 \times 10^{-4}$

$N_{r1} = 48.5, N_{r2} = 1.9$

$N_{\theta1} = 9.8, N_{\theta2} = 1.6$

電荷点と拘束点の配置は文献2), 3)の方法による。すなわち、座標 $(p, 0)$ と (q, q) は、 (x_c, y_c) の平行移動を除いた正方形の対称軸上の電荷点の位置であり、 r_q は電荷点間または拘束点間の距離を与える等比級数の公比である。

境界上の4つの角点は Schwarz-Christoffel 変換の特異点で、ここでは $f'(z)=0$, $f^{-1}(w)=\infty$ であり、写像の等角性は成立しない。また、Newton 法と計算のステップ幅の自動調節のアルゴリズムも有効には機能せず、(33)式による誤差の評価も不可能である。しかし、境界の逆写像は与えられた正方形そのものであり、両者の対応関係は近似写像関数 $F(z)$ を求める時点で既に計算されている。その意味では、境界の逆写像を Newton 法で計算する必要はない。そこで、図7では、問題の正方形と等絶対値線 $r_c = 1.0 - 10^{-3}$ の逆写像を重ねて示した。この近似境界線 C' 上で評価すると、(35)式から

$$\min_{C'} |F'(z_k)| = 3.3 \times 10^{-2}$$

であり、したがって、(33)式から

$$\max_{C'} E_R(z_k) = 3.2 \times 10^{-3}$$

となる。ゆえに、4つの角点の近傍を除けば、この場合の逆写像の精度も十分に高いと考えることができる。

なお、Newton 法の収束は良好であり、角点近傍の電荷配置のパラメータ q を変えた場合の計算精度は $\varepsilon_F = 3.4 \times 10^{-4}$ ($q=1.05$), 2.6×10^{-4} (1.15) である。また、対称な場合、すなわち、 $x_c=y_c=0$ の場合の計算精度は、例3と同じパラメータを用いて、 $\varepsilon_F = 1.1 \times 10^{-5}$, $\min_{C'} |F'(z_k)| = 5.8 \times 10^{-2}$, $\max_{C'} E_R(z_k) = 3.7 \times 10^{-4}$ と1桁程度高い。

6. おわりに

代用電荷法に基づく近似写像関数の簡潔性に着目して、問題領域から標準領域への等角写像の逆写像、すなわち、標準領域から問題領域への等角写像の Newton 法との結合による計算法を与えた。ここでは、簡単な計算で高い精度を得ることができるという代用電荷法の特徴が、原理は簡明であるが、各点ごとに反復計算を必要とするという Newton 法の性質を補っている。Newton 法の収束もきわめて良い。数学的表現の簡潔性は、数値等角写像の問題においても、代用電荷法を持つ優れた特徴の1つであるといえよう。

問題領域から標準領域への等角写像と標準領域から問題領域への等角写像のいずれの問題にも効果的に適用できる標準的な計算法が存在していない現在、これらが比較的簡単かつ高精度に計算できることの意義は小さくない。

参 考 文 献

- 1) 天野 要：代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法，情報処理学会論文誌，Vol. 28, No. 7, pp. 697-704 (1987).
- 2) 天野 要：代用電荷法に基づく外部等角写像の数値計算法，情報処理学会論文誌，Vol. 29, No. 1, pp. 62-72 (1988).
- 3) 天野 要：代用電荷法に基づく2重連結領域等角写像の数値計算法，情報処理学会論文誌，Vol. 29, No. 10, pp. 914-924 (1988).
- 4) Henrici, P.: *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol. 3, pp. 323-506, John Wiley and Sons, New York (1986).
- 5) Trefethen, L. N. (ed.): *Numerical Conformal Mapping*, 269 p., North-Holland, Amsterdam (1986); reprinted from *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 1 & 2 (1986).
- 6) Symm, G. T.: An Integral Equation Method in Conformal Mapping, *Numer. Math.*, Vol. 9, pp. 250-258 (1966).
- 7) Symm, G. T.: Numerical Mapping of Exterior Domains, *Numer. Math.*, Vol. 10, pp. 437-445 (1967).

- 8) Symm, G. T.: Conformal Mapping of Doubly-Connected Domains, *Numer. Math.*, Vol. 13, pp. 448-457 (1969).
- 9) Hayes, J. K., Kahaner, D. K. and Kellner, R. G.: An Improved Method for Numerical Conformal Mapping, *Math. Comput.*, Vol. 26, No. 118, pp. 327-334 (1972).
- 10) Hough, D. M. and Papamichael, N.: The Use of Splines and Singular Functions in an Integral Equation Method for Conformal Mapping, *Numer. Math.*, Vol. 37, pp. 133-147 (1981).
- 11) Hough, D. M. and Papamichael, N.: An Integral Equation Method for the Numerical Conformal Mapping of Interior, Exterior and Doubly-Connected Domains, *Numer. Math.*, Vol. 41, pp. 287-307 (1983).
- 12) Henrici, P.: Fast Fourier Methods in Computational Complex Analysis, *SIAM Rev.*, Vol. 21, No. 4, pp. 481-527 (1979).
- 13) Gutknecht, M. H.: Solving Theodorsen's Integral Equation for Conformal Maps with the Fast Fourier Transform and Various Nonlinear Iterative Methods, *Numer. Math.*, Vol. 36, pp. 405-429 (1981).
- 14) Gutknecht, M. H.: Numerical Experiments on Solving Theodorsen's Integral Equation for Conformal Maps with the Fast Fourier Transform and Various Nonlinear Iterative Methods, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 4, No. 1, pp. 1-30 (1983).
- 15) 村島定行: 代用電荷法とその応用, 194 p., 森北出版, 東京 (1983).
- 16) 安部 齊: 応用関数論, 282 p., 森北出版, 東京 (1981).

(昭和 63 年 9 月 2 日受付)

(平成 元年 1 月 17 日採録)

天野 要 (正会員)



昭和 23 年生. 昭和 46 年京都大学工学部電子工学科卒業. 昭和 49 年同大学院工学研究科修士課程修了. 昭和 53 年北海道大学大学院工学研究科博士課程修了. 工学博士. 同年北海道大学大型計算機センター助手. 現在, 愛媛大学工学部応用数学教室助教授. 応用数学, 数値解析, 特に関数論の数値解析的研究に興味を持つ. 日本数学会, 電子情報通信学会, ACM 各会員.

高松 孝安 (正会員)



昭和 39 年生. 昭和 62 年 3 月愛媛大学工学部電気工学科卒業. 平成元年 3 月同大学院修了. 同年 4 月日本電気ソフトウェア(株)入社. 数値解析, プログラミング技法等に興味を持つ.

安倍 齊



大正 12 年生. 昭和 27 年京都大学理学部数学科卒業. 現職は愛媛大学工学部応用数学教室教授. 理学博士. 現在的主要研究テーマは, 等角写像論, 等角写像の数値解析. 日本数学会会員.