

数値等角写像における Theodorsen 方程式の解法†

宋 殷 志†† 杉 浦 洋†† 櫻 井 鉄 也††

等角写像は2次元のラプラス方程式が現れる熱伝導, 静電ポテンシャル, 流体の問題でよく利用され, 工学, 物理学への応用が広い. 数値等角写像の目的は速く, 正確で適用範囲の広い計算法の研究である. 単位円から Jordan 領域への等角写像の決定は境界関数に関する非線形方程式である Theodorsen 方程式を解くことに帰着される. Theodorsen 方程式に関しては多くの数値解法が提案されているが本論文ではその中から Niethammer, Vertgeim そして, Wegmann の方法を紹介する. Niethammer の方法は SOR 法的であるが後者の2つは Newton 法的な解法である. この3つの方法を計算機上で実現して数値実験を行いその有効性を比較した. 数値実験により Wegmann の方法の不安定性を発見した. その原因の分析と数値フィルタによる Wegmann の方法の安定化について述べる.

1. ま え が き

一般に, 等角写像を求めることは数値的にのみ可能である. 数値等角写像の目的は速く, 正確で, 適用範囲の広い計算法を見出すことにある. 数値等角写像では単位円から単連結領域 (Jordan 領域) への写像と逆方向の等角写像, すなわち, 単連結領域から単位円への写像があり, それぞれ独立に研究されている. 今回は単位円から Jordan 領域への写像を求める方法を比較, 分析した. この写像の決定は境界関数に関する非線形積分方程式である Theodorsen 方程式を解くことに帰着される^{1),2)}.

Theodorsen 方程式に関しては多くの数値解法が提案されているが本論文では Niethammer, Vertgeim そして, Wegmann の方法を紹介する. Niethammer の方法は SOR 的な方法であるが, 後者の2つは Newton 法的な解法である. この3つの方法を計算機上に実現して数値実験を行いその有効性を比較した結果, 難しい問題で, かつ要求精度が高い時には Newton 法が有効であった. Vertgeim と Wegmann の方法は, 反復計算を Riemann-Hilbert 問題に帰着させて計算量と記憶容量を大幅に節約する方法である. Wegmann の方法は Vertgeim の方法より1回反復あたりの計算量は少ないが数値実験より難しい問題ではある程度反復すると修正量が大きくなって収束しない, もしくは発散するという不安定現象が起こった³⁾. そこで, Wegmann の方法の収束しない原因を分析して低周波フィルタによる安定化を考案した. 実

際, このフィルタによる新しい反復法で Wegmann の方法の安定化ができたのでその実験結果を報告し最適フィルタの設計のために分析した結果についても述べる.

2. Theodorsen 方程式

以下, S を単位円, D をその内部, Γ を Jordan 閉曲線, Δ をその内部とする. g は D から Δ への等角写像で次の正規化条件

$$g(0)=0, g'(0)>0 \quad (1)$$

を満たす写像とする (図1). Jordan 閉曲線 Γ のパラメタ表現を γ とすると

$$\Gamma := \{\gamma(t); t \in T\}, T := \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}.$$

ここで, T は $\mathbf{R}$ において 2π の整数倍の差をもつ実数を同値とみなした1次元トーラスである.

そうすると, 円周上での g はある周期連続関数 $\tau(t)$ を使って

$$g(e^{it}) = \gamma(\tau(t) + t), \tau(t) \in C(T) \quad (2)$$

と書ける. ここで, $C(T)$ は周期 2π の実連続関数の族である. 以下, $A(\bar{D})$ というのは D で解析的で D の閉包 $\bar{D}$ における連続関数の空間とする. $A(\bar{D})$ の要素 h の境界関数 $f(t) = h(e^{it})$, $t \in T$ の集合を $A(\bar{D})|_{\tau}$ と書く.

g は等角写像, すなわち, $g \in A(\bar{D})$ であるから円周上で計算できれば内部でも計算できる. したがって, 問題は γ が与えられて τ を求めることに帰着される.

(定義) 関数 f が

$$f \sim \sum_{k \in \mathbf{Z}} f_k e^{ikt}, f_k: f \text{ の } k \text{ 番目の Fourier 係数}$$

のように Fourier 展開されている時

$$Kf \sim -i \sum_{k \in \mathbf{Z}} \text{sign}(k) f_k e^{ikt}$$

† Methods for Solving Theodorsen's Equation in Numerical Conformal Mapping by ENJEE SONG, HIROSI SGIURA and TETSUYA SAKURAI (Department of Information Engineering, Faculty of Engineering, Nagoya University).

†† 名古屋大学工学部情報工学科

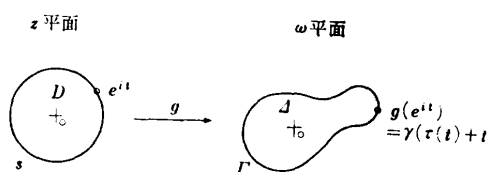


図1 等角写像

Fig. 1 Notation for the conformal mapping problem.

で定義される K を共役作用素という。 K を用いて、次の定理がある (証明は省く)²⁾。

(定理) $f(t) = \xi(t) + i\eta(t)$, $\xi(t), \eta(t) \in C(T)$

$$f(t) \in A(\bar{D}) | \tau \iff \eta(t) - \hat{\eta}_0 = K\xi(t)$$

である。ここで、 $\hat{\eta}_0$ は η の 0 番目の Fourier 係数である。

次に、補助関数 h を導入して

$$g(z) = ze^{h(z)} \quad (3)$$

とすると、 $\text{Im } h(0) = 0$ の条件の下で上式の右辺は等角写像 g の正規化条件 (1) を満たすようになる。したがって、 g の代わりに補助関数 h の解析性を条件にして τ を求めることにする。

作用素 $G: C(T) \rightarrow C(T)$ を

$$G\gamma(t) := \log \gamma(y(t) + t)/e^{it} \quad (4)$$

と定義すると (2), (3) 式から

$$h(e^{it}) = \log g(e^{it})/e^{it} = \log \gamma(\tau(t) + t)/e^{it} = G\tau(t) \quad (5)$$

になる。 $G\tau(t) = \xi(t) + i\eta(t)$ ($\xi(t), \eta(t) \in C(T)$) とおくと前定理より (5) 式は

$$G\tau(t) \in A(\bar{D}) | \tau \iff \eta(t) = K\xi(t), \hat{\eta}_0 = 0$$

となる。さらに、作用素 Ψ を導入して

$$\Psi\tau := \eta - K\xi = \text{Im } G\tau - K\text{Re } G\tau = 0 \quad (6)$$

と書く。この (6) 式が Theodorsen 方程式である。

以下、 $\gamma(t) = \rho(t)e^{it}$ と極座標表現されているものとする。このとき、(5), (6) 式はそれぞれ

$$G\tau(t) = \log \rho(\tau(t) + t) + it\tau(t), \quad (7)$$

$$\Psi\tau(t) = \tau(t) - K[\log \rho(\tau(\cdot) + (\cdot))](t) = 0. \quad (8)$$

(7) 式で $G\tau(t) \in A(\bar{D}) | \tau$ になるように $\tau(t)$ を求めるのが Wegmann による方法で (8) の方程式を解くのが Niethammer と Vertgeim による方法である。

3. 数値解法

数値計算のためにまず離散化を行う。後の都合のため偶数の標本点 $N = 2n$ を使って

$$t_k = 2\pi k/N, \quad \mathbf{t} = (t_0, t_1, \dots, t_{N-1})^T$$

として x を t_k 上で標本化して並べたものを $\mathbf{x}$ とする。すなわち、

$$\mathbf{x}_k := x(t_k), \quad \mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})^T$$

とする。次に共役作用素の離散化を行う。

離散化された共役作用素 $K_N: \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\xrightarrow{F_N} (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n; b_1, \dots, b_{n-1})^T \\ &\quad \downarrow \hat{K}_N \\ \mathbf{y} &\xleftarrow{F_N^{-1}} (0, -b_1, \dots, -b_{n-1}, 0; a_1, \dots, a_{n-1})^T \end{aligned}$$

F_N : 離散型フーリエ変換, $\hat{K}_N$: 共役作用素による Fourier 係数の変換, a_i : cosine 係数, b_i : sine 係数。したがって、離散化された共役作用素は

$$K_N := F_N^{-1} \hat{K}_N F_N \quad (9)$$

となる。(9) は Wittich 行列として知られているが各要素は

$$(K_{2n})_{lj} := \begin{cases} 0 & : j-l \text{ が偶数の時} \\ \frac{1}{n} \cot \frac{(l-j)\pi}{2n} & : j-l \text{ が奇数の時} \end{cases} \quad (j, l = 0, 1, \dots, 2n-1)$$

である。あるスカラー関数 σ を $\mathbf{s} \in \mathbf{R}^N$ に対して

$$\sigma(\mathbf{s}) := (\sigma(s_0), \dots, \sigma(s_{N-1}))^T \quad (10)$$

のように定義する。結局、離散化された Theodorsen 方程式は

$$\mathbf{y} = K_N \log \rho(\mathbf{y} + \mathbf{t}) \quad (11)$$

となる。(11) 式を解く方法として SOR 方法と Newton 法を次に説明する。

3.1 SOR 法 (Niethammer⁴⁾ 1966 年)

$\mathbf{x}'$ を奇数番目の標本点, $\mathbf{x}''$ を偶数番目の標本点とする。すなわち、

$$\mathbf{x}' := (x_1, x_3, \dots, x_{2n-1})^T, \quad \mathbf{x}'' := (x_0, x_2, \dots, x_{2n-2})^T$$

とする。そして、

$$P_{2n} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}'' \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} \text{ の並べかえより } K_{2n} \text{ は}$$

$$\begin{aligned} P_{2n} K_{2n} P_{2n}^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & -L_n^T \\ L_n & 0 \end{pmatrix}, \\ (L_n)_{kj} &= \frac{1}{N} \cot \frac{(2k-2j+1)\pi}{2n} \\ &\quad (k, j = 0, 1, \dots, n-1) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\mathbf{y} = K\mathbf{x}$ は

$$\mathbf{y}'' = -L_n^T \mathbf{x}', \quad \mathbf{y}' = L_n \mathbf{x}''$$

と分離して計算できるので (11) 式は

$$\mathbf{y}'' = -L_n^T \log \rho(\mathbf{y}' + \mathbf{t}') \quad (12a)$$

$$\mathbf{y}' = L_n \log \rho(\mathbf{y}'' + \mathbf{t}'') \quad (12b)$$

として計算できる。さらに、(12) 式に SOR 法を適用すると

$$\mathbf{y}_{m+1}' := -\omega L_n^T \log \rho(\mathbf{y}_m' + \mathbf{t}') + (1-\omega) \mathbf{y}_m'' \quad (13a)$$

表 1 数値解法の比較 (FFT 利用)
Table 1 The comparison of the methods.

	1 回反復の計算量	収束	方法
Niethammer	$N \log N$	1 次	SOR 法
Vertgeim	$3N \log N$	2 次	Newton 法
Wegmann	$2N \log N$	2 次	Newton 法

$$y'_{m+1} := L_n \log \rho(y'_{m+1} + t^n) + (1-\omega)y'_m \quad (13b)$$

$$(m=0, 1, \dots)$$

ここで, ω は緩和係数であり (13) の収束条件より $0 < \omega \leq 1$ とする⁵⁾. L_n と L_n^T の作用は FFT を利用して効率的に計算できる.

次に 2 次収束する Newton 法を説明する. 直接 Jacobian 行列を作って Newton 法を適用すると, $N^3/3$ の計算量と Jacobian 行列を格納するために N^2 の記憶容量が必要である. これらを減らすため提案された 2 つの方法を説明する (表 1 参照).

3.2 Vertgeim⁶⁾の方法 (1958 年)

まず元の連続問題で考える.

$$\begin{cases} \Psi y_m + \Psi v_m \delta_m = 0 \\ y_{m+1} := y_m + \delta_m, \Psi v_m: \Psi \text{ の } y_m \text{ での Fréchet 微分.} \end{cases} \quad (14)$$

$$(m=0, 1, \dots)$$

(8) より

$$\Psi y(t) = y(t) - K \log \rho(y(t) + t)$$

となるので δ に Ψ の Fréchet 微分を作用させると

$$\Psi v \delta(t) = \delta(t) \operatorname{Im} \zeta(t) - K[\delta \operatorname{Re} \zeta](t) \quad (15)$$

$$\zeta(t) := \rho'(y(t) + t) / \rho(y(t) + t) + i$$

となる. したがって (14) は

$$\Psi y + \Psi v \delta = \Psi y + \delta \operatorname{Im} \zeta - K[\delta \operatorname{Re} \zeta] = 0 \quad (16)$$

となり (16) はただちに

$$\Psi y + \delta \operatorname{Im} \zeta = K[\delta \operatorname{Re} \zeta]$$

になって定理より円周上で関数 f を

$$f(e^{it}) := \zeta(t) \delta(t) + i \Psi y(t) \quad (17)$$

$$f(e^{it}) \in A(\bar{D})|_{\tau}, \operatorname{Im} f(0) = 0$$

のように定義できる. この f は Riemann-Hilbert 問題

$$0 = \operatorname{Re} \{i|\zeta(t)|^2 \delta(t)\} = \operatorname{Re} \{\bar{\zeta}[if(e^{it}) + \Psi y(t)]\} \quad (18)$$

の解である. (18) を変形すると

$$\operatorname{Re} \{i\bar{\zeta}(t)f(e^{it})\} = -\Psi y \operatorname{Re} \{\zeta(t)\} \quad (19)$$

となり解 f は次のように陽的に求まる²⁾.

$$f(e^{it}) = [iq + \sigma(t) + iK\sigma(t)] \exp(-K\phi(t) + i\phi(t)),$$

ここで,

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \arg \zeta(t) - \pi/2, \\ \sigma(t) &= \Psi y \sin \phi(t) \exp(K\phi(t)), \end{aligned}$$

$$q = -\partial_0 \tan \phi_0,$$

∂_0 : σ の 0 番目 Fourier 係数

ϕ_0 : ϕ の 0 番目 Fourier 係数

である. 求めた f を (17) に代入して

$$\delta(t) = \frac{f(e^{it}) - i\Psi y(t)}{\zeta(t)} \quad (20)$$

として δ を計算する.

3.3 Wegmann⁷⁾の方法 (1978 年)

この方法は (7) の $Gy \in A(\bar{D})|_{\tau}$ になるように y を決めるのが問題である. これは y に関する非線形問題になるから

$$y_{m+1} = y_m + \delta_m \quad m=0, 1, \dots$$

のような形式の反復法の解法を考えて $G(y_m + \delta_m) \in A(\bar{D})|_{\tau}$ になるように δ_m を決めれば y_{m+1} は真の解になる. しかし, これはまた δ_m に関する非線形問題になるので

$$G(y_m + \delta_m) \approx Gy_m + Gv_m \delta_m \in A(\bar{D})|_{\tau} \quad (21)$$

Gv_m : G の y_m での Fréchet 微分

のように線形化すると δ_m は δ_m に関する線形問題によって決められる. またこの問題は Riemann-Hilbert 問題に帰着するので δ_m の陽的な表現が得られる. δ に G の Fréchet 微分を作用させると,

$$Gv \delta = \zeta \delta, \zeta(t) := \rho'(y(t) + t) / \rho(y(t) + t) + i$$

となるから (21) は

$$Gy + Gv \delta = Gy + \zeta \delta \in A(\bar{D})|_{\tau} \quad (22)$$

$$\operatorname{Im}[Gy + Gv \delta]_0 = \operatorname{Im}[Gy + \zeta \delta]_0 = 0$$

となり (22) をある関数 H を使って,

$$H(e^{it}) := \zeta(t) \delta(t) + Gy(t), \quad (23)$$

$$H(e^{it}) \in A(\bar{D})|_{\tau}, \operatorname{Im} H(0) = 0$$

のように定義できる. この H は Riemann-Hilbert 問題

$$0 = \operatorname{Re} \{i|\zeta(t)|^2 \delta(t)\} = \operatorname{Re} \{i\bar{\zeta}(t)[H(e^{it}) - Gy(t)]\} \quad (24)$$

の解である. (24) を変形すると

$$\operatorname{Re} \{i\bar{\zeta}(t)H(e^{it})\} = -\operatorname{Im} \{\bar{\zeta}(t)Gy(t)\}$$

となって解 H は次のように陽的に求まる.

$$H(e^{it}) = [iq + \sigma(t) + iK\sigma(t)] \exp(-K\phi(t) + i\phi(t)), \quad (25)$$

$$\phi(t) = \arg \zeta(t) - \pi/2,$$

$$\sigma(t) = \operatorname{Re} \{Gy \exp(-i\phi(t))\} \exp(K\phi(t)),$$

$$q = -\partial_0 \tan \phi_0,$$

∂_0 : σ の 0 番目 Fourier 係数,

ϕ_0 : ϕ の 0 番目 Fourier 係数.

求めた H を (23) に代入して

$$\delta(t) = \frac{H(e^{it}) - Gy(t)}{\zeta(t)} \quad (26)$$

として θ を計算する。

離散化された問題では (10) で定義したように上の式を離散化して計算する。初めに 3 つの方法の比較を表 1 に示す。

4. 数値実験

偏心円と Cassini の楕形の領域に対して数値実験を行った。これは解がわかっていることと難易度がパラメタによって変えられるからである。偏心円の場合、解の式は

$$g(z) = z(r-1)/(zr-1), \quad 0 \leq r < 1$$

である。与えられた式は

$$\rho(\theta) = \frac{r \cos \theta + \sqrt{1-r^2 \sin^2 \theta}}{r+1}$$

である。Cassini の楕形の場合、解の式は

$$g(z) = z \sqrt{\frac{r^2-1}{z^2 r^2-1}}, \quad 0 \leq r < 1$$

であり、与えられた式は

$$\rho(\theta) = \sqrt{\frac{r^2 \cos 2\theta + \sqrt{1-r^4 \sin^2 2\theta}}{r^2+1}}$$

である。ここで、パラメタ r が 1 に向かって大きくなるほど領域の変形がはげしい (図 2) 実験結果より Theodorsen 方程式の離散解の誤差も大きくなっており問題が難しくなる。前に説明した 3 つの方法によって実験した。実験は名古屋大学大型計算機セン

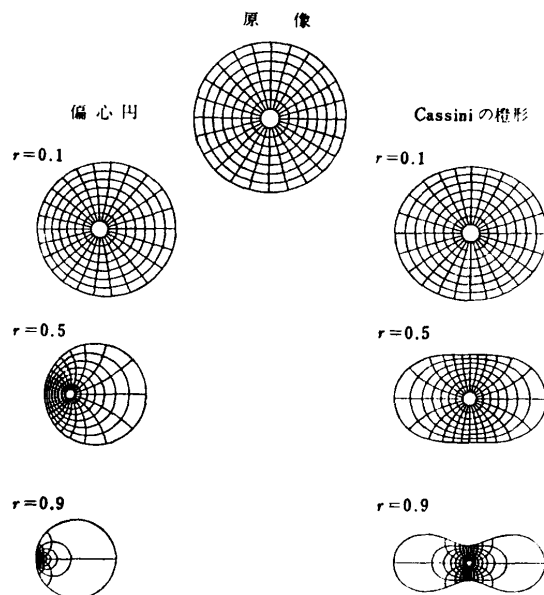


図 2 パラメタ r による領域の変形
Fig. 2 The transformation defined by (1) and (2) onto the eccentric circle and Cassini's oval.

ターの FACOM M780 と FACOM M382 を用い FORTRAN 77 の倍精度で計算した。

4.1 Niethammer の方法

初期値は $y_0 = (0, 0, \dots, 0)^T$, 要求精度は $\|y_m - y_{m+1}\|_2 < 10^{-5}$ とした。計算結果の提示に用いた記号は次のとおりである (図 3, 4)。

r : 形状パラメタ, N : 離散化した標本点数,

ω : 緩和係数, m : 反復回数

ω を 0.4~1.0 の間 0.2 のきざみで変化させて要求精度を満足するまでの反復回数を比較したが ω を一定にした時の反復回数は N にあまり依存せず問題に依存することがわかった。反復回数が最も少ない時の最適緩和係数は $r=0.1$ の場合、 $\omega=1.0$ である。この最適緩和係数も N によらず決定できると思われる。 r が 1 に近くなるにつれて最適緩和係数が小さくなる傾向がある (図 3, 4)。

SOR 法では最適緩和係数の決定が重要であるので

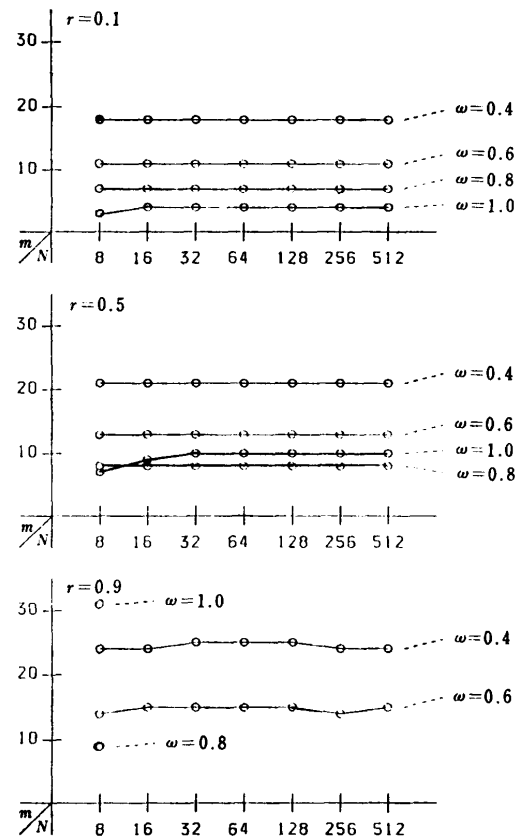


図 3 Niethammer 法の反復回数 (偏心円)

Fig. 3 The required iterative number of convergence of Niethammer's method with tolerance 10^{-5} . Underrelaxation factor ω is fixed as N increases for the mapping onto the eccentric circle.

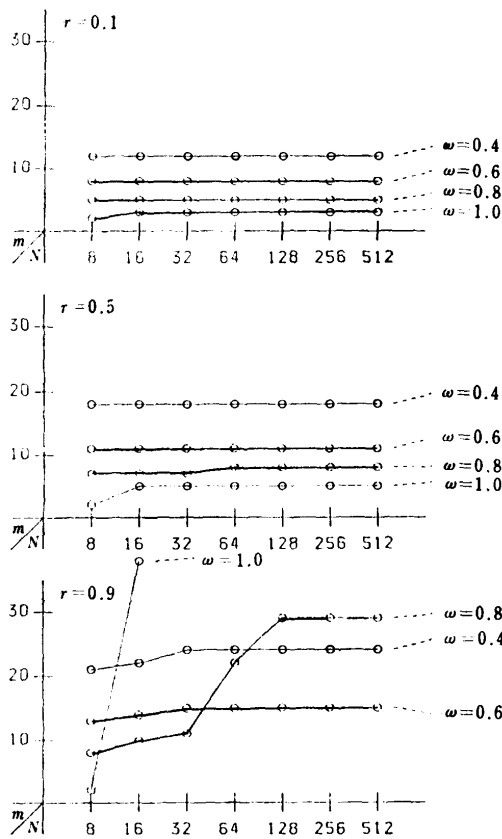


図 4 Niethammer 法の反復回数 (Cassini の楕形)
Fig. 4 Results as in Fig. 3 but for the mapping
onto the Cassini's oval.

この実験結果を説明する理論的研究が必要である。

4.2 Vertgeim の方法

初期値 $y_0 = (0, \dots, 0)^T$, 要求精度は $\|d_m\|_2 = \|y_m - y_{m+1}\|_2 < 10^{-5}$ とする. d は修正量である. 図 5, 6 で用いた記号は図 3, 4 の記号と同じである. 図 5, 6 からわかるように r が 0 に近い時にはすぐ 2 次収束するが r が 1 に近づくとき小さな N では 2 次収束しない. ところが, N を大きくすると r が 1 に近い時でも 2 次収束する. そのことより小さな N では 2 次収束しない原因は離散誤差のためであると思われる.

表 2 に Niethammer と Vertgeim の方法の結果を比較した. Vertgeim の方法は 2 次収束するので要求精度が高い時に有効である.

4.3 Wegmann の方法

初期値 $y_0 = (0, \dots, 0)^T$, 要求精度 $\|d_m\|_2 = \|y_m - y_{m+1}\|_2 < 10^{-10}$ として計算結果を図 7, 8 に示す. 用いた記号は前と同じである. Vertgeim と Wegmann の方法を比較するため Vertgeim の結果を併記する. Wegmann の方法は Vertgeim の方法と比較して

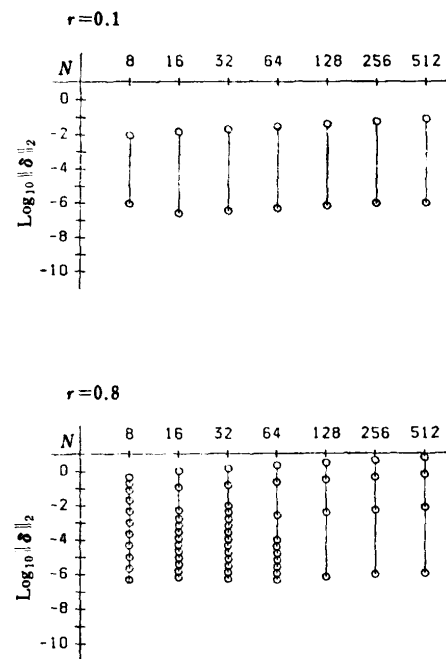


図 5 Vertgeim 法の収束のふるまい (偏円円)
Fig. 5 Convergence behaviors with tolerance 10^{-5}
for the mapping onto the eccentric circle
calculated with Vertgeim's method where
 $\|d\|_2$ is correction.

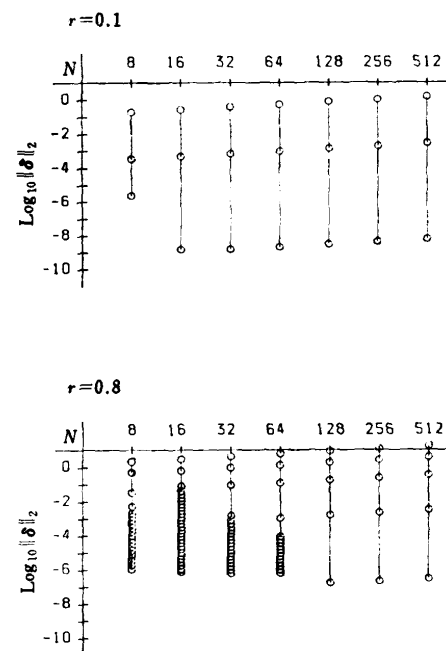


図 6 Vertgeim 法の収束のふるまい (Cassini の楕形)
Fig. 6 Results as in Fig. 5 but for the mapping
onto the Cassini's oval.

表 2 Niethammer の方法と Vertgeim の方法の比較
Table 2 The required number of iteration for convergence and the error of Niethammer's method with optimal underrelaxation factor and those of Vertgeim's method with tolerance 10^{-10} for the mapping onto the Cassini's oval.

r	N	Niethammer		Vertgeim	
		m	error	m	error
0.1	32	4	0.15×10^{-15}	3	0.15×10^{-15}
	64	4	0.23×10^{-15}	3	0.24×10^{-15}
	128	4	0.35×10^{-15}	3	0.34×10^{-15}
	256	4	0.51×10^{-15}	3	0.51×10^{-15}
	512	4	0.77×10^{-15}	3	0.79×10^{-15}
0.5	32	15	0.17×10^{-5}	7	0.17×10^{-5}
	64	15	0.71×10^{-10}	4	0.18×10^{-10}
	128	15	0.97×10^{-10}	4	0.13×10^{-10}
	256	15	0.14×10^{-9}	4	0.19×10^{-10}
	512	15	0.94×10^{-9}	4	0.29×10^{-10}
0.9	32	26	0.12	52	0.11
	64	28	0.18×10^{-1}	43	0.17×10^{-1}
	128	28	0.46×10^{-3}	38	0.45×10^{-3}
	256	28	0.46×10^{-4}	23	0.39×10^{-4}
	512	28	0.87×10^{-4}	6	0.20×10^{-10}

m : 反復回数, error: 真値との差

- (1) 1 回反復あたりの計算量が少ない (表 1 参照).
- (2) 収束が速い.
- (3) 丸め誤差の影響がやや大きい (図 9).
- (4) 難しい問題では収束しない.

今まで(1), (2)の理由から Wegmann の方法が Vertgeim の方法より優れているとされて来た²⁾が(4)という問題点が発見された. 次に(4)の原因を分析する.

5. Wegmann の方法の問題点の分析

図 10 は 2 倍精度と 4 倍精度計算における収束のふるまいである. 相(1)では修正量が小さくなるが 4 倍精度の計算ではその期間が長くつき解に近づく. 相(2)ではその解から離れてゆき, 相(3)では別の解に収束してゆく.

5.1 反復列が解から遠ざかる原因

Wegmann の反復法を簡単に

$$\mathbf{y}_{m+1} = W\mathbf{y}_m, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^N \quad m=0, 1, \dots \quad (27)$$

のように書いて分析する. 反復ベクトル列 $\{\mathbf{y}_m\}$ が解 $\mathbf{y}$ の近傍にあるとすると

$$\mathbf{y}_{m+1} = W\mathbf{y}_m = \mathbf{y}_m + \delta_m$$

となって

$$\begin{aligned} \delta_{m+1} &= \mathbf{y}_{m+2} - \mathbf{y}_{m+1} = W\mathbf{y}_{m+1} - \mathbf{y}_{m+1} \\ &= W(\mathbf{y}_m + \delta_m) - \mathbf{y}_{m+1} \approx W\mathbf{y}_m + W\delta_m - \mathbf{y}_{m+1} \\ &= W\delta_m \approx W\delta_m \quad (m=0, 1, \dots) \end{aligned}$$

と近似できる. ここで W は W の $\mathbf{y}$ での Fréchet 微分である. 結局 m が大きくなるにつれて $\|\delta_{m+1}\|/\|\delta_m\|$ は W のスペクトル半径に近づく. このスペクトル半径が 1 より大きいと修正量がだんだん大きくなって収束しないことになる. それで, 修正量が極小になった $\mathbf{y}$ で W のスペクトル半径をしらべてみた. 相(2)をもたない問題ではスペクトル半径は 1 より小で相(2)をもつ問題では 1 以上であった. その時, スペクトル半径は修正量のノルムの増大比とほぼ等しかった (表 3). したがって, 反復列が解から遠ざかる原因は W のスペクトル半径が 1 より大きかったためであることが明らかになった.

次は W のスペクトル半径が 1 より大きくなった

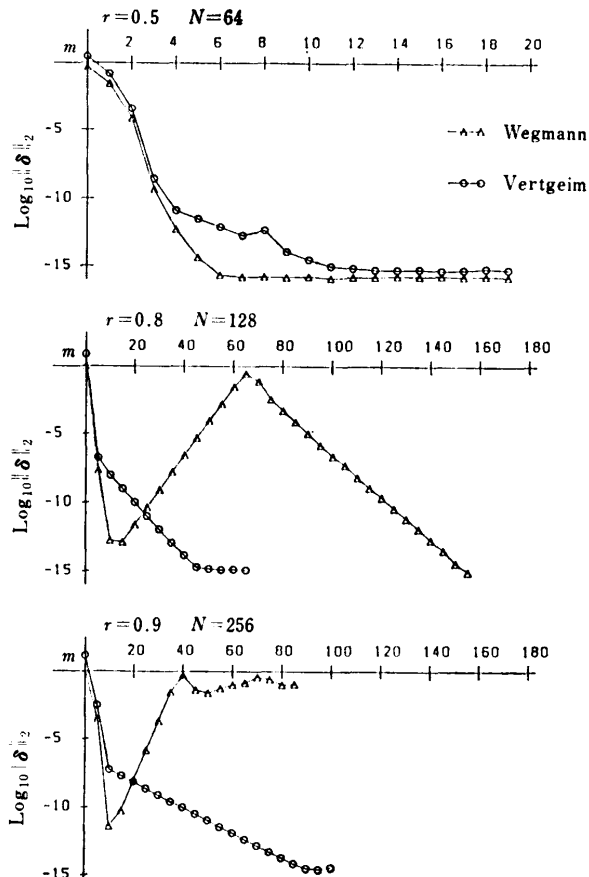


図 7 Vertgeim と Wegmann の方法の収束のふるまい (偏心円)
Fig. 7 Convergence behaviors with tolerance 10^{-10} for the mapping onto the eccentric circle calculated with Wegmann and Vertgeim's methods where $\|\delta\|_2$ is correction.

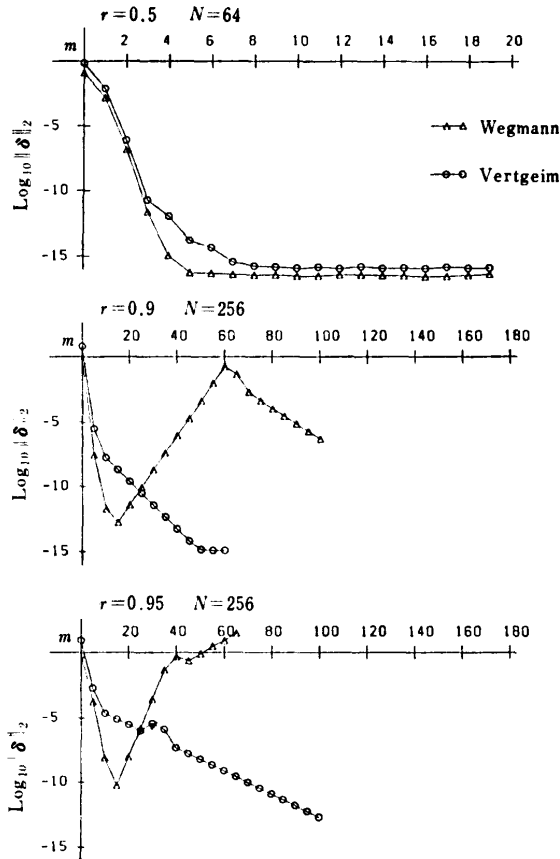


図 8 Vertgeim と Wegmann の方法の収束のふるまい (Cassini の楕形)

Fig. 8 Results as in Fig. 7 but the mapping onto the Cassini's oval.

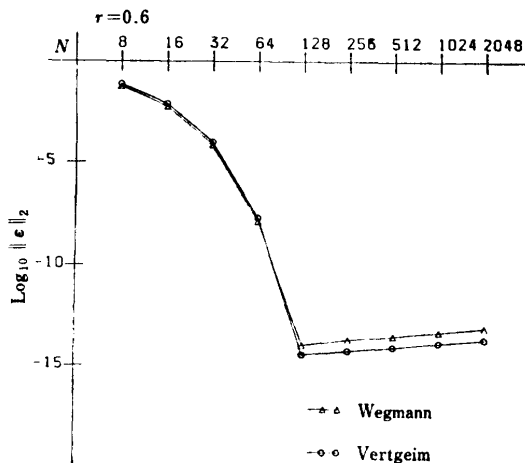


図 9 Wegmann と Vertgeim の方法による丸め誤差の差

Fig. 9 The roundoffs of Wegmann's method compared with Vertgeim's method at the level of double precision where ϵ is the error of computed solution and true solution.

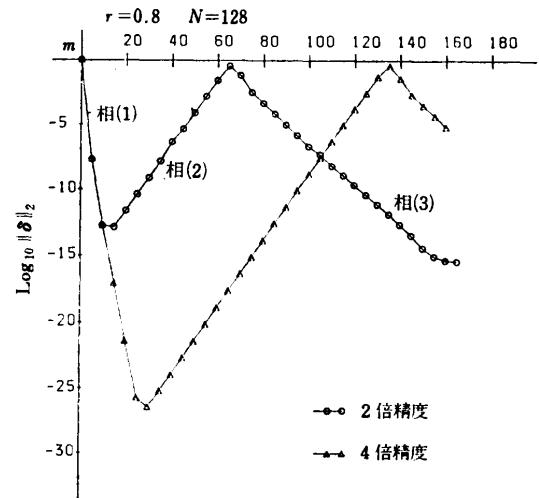


図 10 Wegmann の方法の 2 倍精度と 4 倍精度における収束のふるまい

Fig. 10 The behaviors of convergence of Wegmann's method on double precision and quadruple precision.

表 3 Wegmann の方法の Spectral radius.

Table 3 The Spectral radius of Fréchet derivative $W_{\#}$.

	r	N	Spectral radius
偏 心 円	0.1	32	0.0132
	0.8	128	1.7855
	0.9	256	2.7294
Cassini's oval	0.1	32	0.0001
	0.9	128	1.8803
	0.95	256	2.8350

原因を分析するために各周波数成分の $W_{\#}$ による拡大率 $R(l)$ をはかってみた。図 11 に用いた記号

$$R(l) = \frac{\| \mathcal{F} W_{\#} e^{i l t} \|_2}{\| e^{i l t} \|_2}, \quad 0 \leq l \leq N/2$$

であり、ここで $\mathcal{F}$ というのはある関数 f に対して

$$\mathcal{F}(f) := (f(t_0), \dots, f(t_{N-1}))^T, \quad t_i = 2\pi i/N \quad (28)$$

の意味である。図 11 を見ると高周波成分の拡大率が大きい。それが $W_{\#}$ のスペクトル半径が 1 以上になった原因であると予想される。また図 11 は高周波成分をうしろからいくつかを削れば $W_{\#}$ のスペクトル半径が 1 より小さくなって安定化できることを暗示している。そこで、次に説明する低周波フィルタによる安定化を考案した。

5.2 低周波フィルタによる安定化

低周波フィルタ D_k を

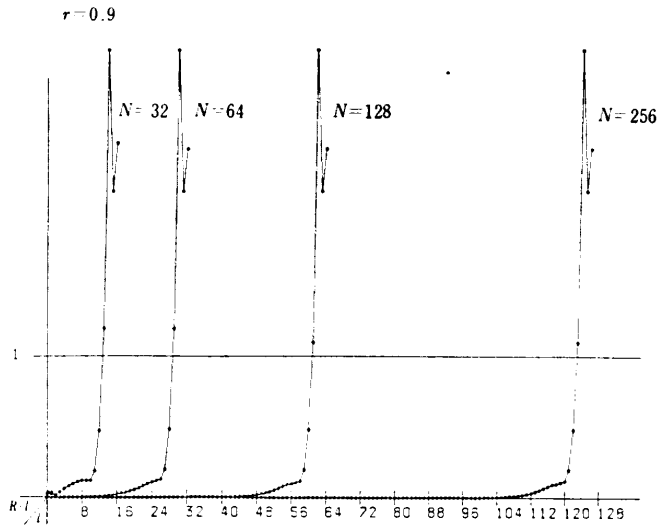


図 11 Wegmann の方法の Fréchet 微分 W_f による各周波数の拡大率

Fig. 11 The magnification of each frequency factor by Fréchet derivative W_f of Wegmann's method.

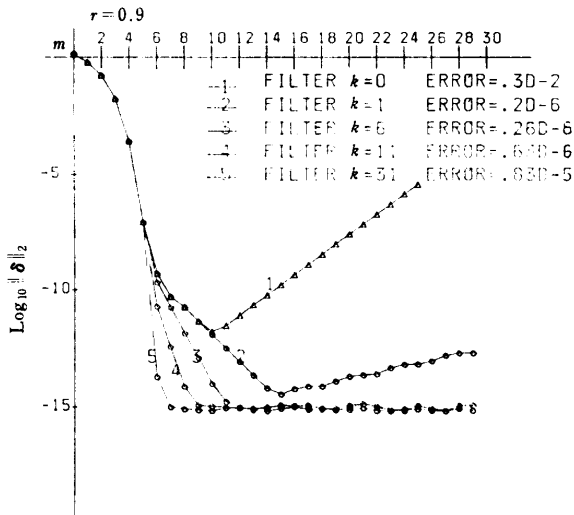


図 12 フィルタによる収束のふるまい

Fig. 12 The behaviors of convergence of Wegmann's method with filter for the mapping onto the eccentric circle.

表 4 フィルタによる反復法の収束と誤差

Table 4 The speed of convergence and truncation error of Wegmann's method with filter.

フィルタ	弱 ← → 強
収 束	遅い, 発散 ← → 速い, 2 次収束
誤 差	小さい ← → 大きい

$$D_k[e^{i l t}] = \begin{cases} [e^{i l t}] & : 1 \leq l \leq N/2 - k \text{ の時} \\ 0 & : N/2 - k < l \leq N/2 \text{ の時} \end{cases} \quad (29)$$

のように定義する。ここで「 $\lceil$ 」は(28)と同じ意味で

k はうしろからいくつの高周波成分を削るかを示すパラメタである。(29)で定義した低周波フィルタ D_k による新しい反復法

$$y_{m+1} = D_k W y_m \quad m=0, 1, \dots \quad (30)$$

によって実験を行った (図 12)。

図 12 の $k=0$ はフィルタをかけなかったことに対応する。 k が大きくなるほど、すなわち、うしろからたくさんの高周波成分を削るほど安定化ができた。さらにしだいに収束が速くなった。しかし、誤差はだんだん大きくなることがわかった。したがって、弱いフィルタをかけると収束は遅くなるかまたは発散するが打ち切り誤差は小さい。反面強いフィルタをかけると収束は速くて 2 次収束するが問題の変形が大きくて正確な解が得られない。すなわち、この場合打ち切り誤差は大きい (表 4)。したがって、目的に応じた最適フィルタの設計が課題となる。

6. む す び

これまで Niethammer による SOR 法と Vertgeim と Wegmann による Newton 法の 3 つの方法を分析し、その有効性を比較した。高精度を要求した場合には Newton 法が有効であることがわかった。Newton 法の中でも Wegmann の方法は Vertgeim の方法より 1 回反復あたりの計算量は少ないが難しい問題では収束しないという大きな問題点が発見された。その原因を分析した結果、反復法の不安定性のためであることが明らかになった。その分析に基づいて Wegmann の方法が低周波フィルタにより安定化できることを示した。

謝辞 等角写像の数値解析的研究である本論文に関する御指導と助言をいただいた名古屋大学工学部情報工学科の鳥居達生教授と三井斌友助教授に感謝する。

参 考 文 献

- 1) Theodorsen, T.: Theory of Wing Sections of Arbitrary Shape, NACA Report 411 (1931).
- 2) Gutknecht, M. H.: Numerical Conformal Mapping Methods Based on Function Conjugation, *J. Comput. Appl. Math.* Vol. 14, No. 1 & 2, pp. 31-77 (1986).
- 3) 宋 殷志, 杉浦 洋, 桜井鉄也: 数値等角写像における Theodorsen の方程式の解法, 情報処理学会報告, 87-NA-23-4, Vol. 87, No. 88.
- 4) Niethammer, W.: Iterationsverfahren bei der konformen Abbildung, *Computing*, Vol. 1,

- No. 2, pp. 146-153 (1966).
- 5) Gutknecht, M. H.: Solving Theodorsen's Integral Equation for Conformal Maps with the Fast Fourier Transform and Various Nonlinear Iterative Methods, *Numer. Math.*, Vol. 36, No. 4, pp. 405-429 (1981).
 - 6) Vertgeim, B. A.: Approximate Construction of Some Conformal Mappings, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, Vol. 119, No. 1, pp. 12-14 (1958) (in Russian).
 - 7) Wegmann, R.: Ein Iterationsverfahren zur konformen Abbildung, *Numer. Math.*, Vol. 30, No. 4, pp. 453-466 (1978), translated as: An Iterative Method for Conformal Mapping, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 1 & 2, pp. 7-18 (1986).
 - 8) Gutknecht, M. H.: Fast Algorithms for the Conjugate Periodic Function, *Computing*, Vol. 22, No. 1, pp. 79-91 (1979).

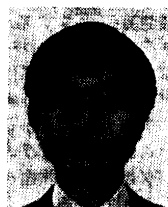
(昭和 63 年 5 月 2 日受付)

(平成 元年 2 月 14 日採録)



宋 殷志 (正会員)

1961 年生. 1984 年韓国淑明女子大学数学科卒業. 1988 年名古屋大学大学院工学研究科修士課程修了し, 博士課程に進学. 現在に至る. 等角写像に関する数値解析に興味を持つ.



杉浦 洋 (正会員)

昭和 27 年生. 昭和 50 年名古屋大学理学部数学科卒業. 昭和 53 年同大学大学院理学研究科数学専攻修士課程修了. 昭和 56 年同大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程満了. 昭和 57 年より同大学工学部助手. 数値積分と積分方程式に興味をもつ.



櫻井 鉄也 (正会員)

昭和 36 年生. 昭和 59 年名古屋大学工学部応用物理学科卒業. 昭和 61 年同大学院工学研究科情報工学専攻博士課程前期課程修了. 同年同大学工学部情報工学科助手. 代数方程式の数値解法と有理関数による近似に興味を持つ.