

## ブラック・ホールのコンピュータ・グラフィックス： 光線追跡法の曲がった4次元時空への拡張†

山 下 義 行†

コンピュータ・グラフィックス(CG)応用のひとつとして、一般相対論的な曲がった4次元時空におけるCGについて述べる。今回は特にブラック・ホールをCG化する。曲がった時空では光線の進路が曲がるから、通常の光線追跡法を拡張すればよい。光線の進路の一般相対論的な計算には膨大な計算量を要するが、ベクトル計算機では80%以上のベクトル化が可能で、CG画像1枚を数十秒で生成できることが分かった。

### 1.はじめに

コンピュータ・グラフィックス(以下CG)の利用範囲は急速に拡大しつつある。特に3次元CGは事物の直感的理解にとって有効である。本論文ではこの手法を一般相対論に利用する方法を明らかにする。

一般相対論(general theory of relativity)<sup>1)-3)</sup>は時空の物理的な性質を4次リーマン(Riemann)幾何学上に展開した理論であり、一般の人々にも「曲がった4次元時空」、「ブラック・ホール(black hole)」等の言葉を通して知られている。一般相対論の予言する内容は我々の素朴な時空感覚からは遙かにかけ離れたものが多く、それが逆に我々を魅了して止まない。しかしながら、時空の性質を表す物理量は複雑な数式で与えられるため、数式が実際どのような時空を表しているのかを知ることは専門家をしても困難な場合が多い。まして素人にとってはなおさらである。本研究の目的は、光線追跡法<sup>4)</sup>を曲がった4次元時空上に拡張して、一般相対論を素人にもわかるように視覚的に表現することである。今回は特に曲がった時空の典型例であるブラック・ホールを忠実にCG化する。本研究によって、これまで想像図でのみ知られていたブラック・ホールの正確な姿、すなわち我々がブラック・ホールに近付いたならば見るであろう光景が精巧なCG画像として明らかになる。

一般相対論によると曲がった時空では光線の進路も曲がる。そこで光線の進路をコンピュータで計算して視覚化すれば、曲がった時空におけるCGができる。このアイディア自体は一般相対論を知る者には自明で

ある。しかしながらこれまでこの自明なアイディアを本格的に実現する試みはほとんど行われなかった。これにはいくつかの理由が考えられる。

第1に、相対論の専門家には本論文の意味でのCG化の発想がほとんど見られなかったことである。コンピュータを用いて一般相対論を研究する分野は数値的重力理論(theory of numerical gravity)と呼ばれ、既に確立されつつある分野である。しかし彼らの興味は主に星の重力崩壊や重力波の発生などの現象を調べることであり、CG化は必ずしも重要な課題ではない。

第2に、もし彼らがCG化に興味を持ったとしても、本格的なCG画像を作成するには少なくとも基本的なCG技法、画像処理技法の習得が必須であろう。しかし多忙な彼らにはそれだけの時間的余裕がない。

第3に、一般相対論を正確に理解するには少なくともRiemann幾何学の初步的な知識が必要である。もし一般相対論的CGに興味を持つ計算機関係の研究者がいても、この条件を満たす研究者、特にCGの研究者の数は限られている。

第4に、光線が曲がる場合のCG画像生成には膨大な計算量が要求される。後に明らかになるが、特にアニメーション作成には一昔前の大型計算機をフル稼働させても数週間以上を費やすことがわかる。よほど恵まれた計算環境を有しないと実現不可能なことであった。

上の四つの理由の中で、最初の二つは我々には直接関係ない。後の二つには本論文において解決法を示す。

まず2章では一般相対論の必要最小限の紹介をし、相対論的CGに必要な知識は一般相対論の中でもごく一部に限られることを明らかにする。極論すれば、光線の曲がり方を相対論的に計算できれば十分なのであ

† Computer Graphics of Black Holes: The Extension of Ray-tracings to 4-dimensional Curved Space-time by YOSHIOKI YAMASHITA (The Doctorial Program of Engineering, University of Tsukuba).

†† 筑波大学大学院工学研究科

る。ブラック・ホールについても簡単に紹介する。

3章ではCG化を行う世界のモデルを述べる。今回の試みは曲がった時空における本格的CGの最初の研究であるから、ブラック・ホールが世界の中心に静止し、ブラック・ホールの近傍には全く物体の存在しないような単純なモデルを設定した。

4章ではCG画像作成の方法を詳細に述べる。曲がった時空のCGは通常のCGに比べ計算量が数倍以上に増大する。この計算量を如何に削減するかが最大の課題である。

5章ではブラック・ホールの高精度CG画像作成例を紹介する。この画像はハイビジョン用に並列計算機LINKS 1<sup>6)</sup>で作成されたものである。

6章ではSUN 3/50(以下SUN 3), SUN 4/260(以下SUN 4), LINKS 1, そしてベクトル計算機HITAC S-820/80<sup>7)</sup>(以下S-820)を用いたCG画像作成を報告する。SUN 4でさえ1枚のCG画像生成にCPU時間約1時間を費やす。しかし4章の画像生成方式をベクトル計算機向きに変更して、S-820ではCPU時間約35秒であった。S-820を用いてブラック・ホールのCGアニメーションを作成した。

## 2. コンピュータ・グラフィックスのため的一般相対論

この章ではCGを行う際に必要な一般相対論の内容を概説する。一般相対論の内容は素人には難解なものとして知られているが、我々の興味は光線の進路の決定法であるから、一般相対論の古典的、初步的な理解で十分である。

### 2.1 曲がった時空の数学的表示法

一般相対論によれば、時空の4次元的な性質は4×4の対称テンソルで表される。すなわち全時空点を定義域とする10個の実数値関数で表される。これらの関数を $g_{mn}$ と表し、計量テンソル(metric tensor)と呼ぶ。ここに下付き添え字 $m, n$ は0, 1, 2, 3のいずれかで、それぞれの数字は時間座標 $x^0$ 、空間座標 $x^1, x^2, x^3$ に対応している。通常対角成分 $g_{00}$ の値は負、 $g_{11}, g_{22}, g_{33}$ の値は正である。

計量テンソルは直感的には各時空点における時間の進み方や空間の伸縮の度合を表している。ある点における座標値の微少な変化を4次元ベクトル( $\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3$ )で表すとき、相対論によればこのベクトルの4次元的な大きさの二乗は、計量テンソルを用いた2次形式

$$\sum_{m=0,3} \sum_{n=0,3} g_{mn} \Delta x^m \Delta x^n$$

で与えられる。よって、もしある地点 $P$ の $g_{00}$ の値が別の地点 $P'$ に比べ4倍の大きさであるならば、 $P$ における時間の進み方は $P'$ の2倍だけ速いことになる。何故ならば、時間座標の微少変化( $\Delta x^0, 0, 0, 0$ )の点 $P$ および $P'$ における4次元的な大きさを $\Delta\tau, \Delta\tau'$ とするとき

$$\Delta\tau = 2\Delta\tau'$$

が成り立つからである。ブラック・ホールでは計量テンソルの成分値が無限大あるいは0になる点が現れ、これらは時空の特異点と見なされる。また光線の進行方向を表す4次元ベクトル(これを光線ベクトルと呼ぶ)の大きさはすべての時空点で常に0である(注: 計量テンソルの値は正とは限らないから、自明なヌル(null)・ベクトル(0, 0, 0, 0)以外にもヌル・ベクトル是有りうる)。

物理的に意味のある計量テンソルはアインシュタインの方程式(Einstein's equation)と呼ばれる非線形10元連立2階偏微分方程式を満たすものであるが、その偏微分方程式を解くのは物理学者の仕事であるから、我々は関知しない。既に多くの物理的に意味のある計量テンソルが求められており、その中の幾つかがブラック・ホールを表す(2.4節参照)。

### 2.2 視点の座標系

一般相対論は、任意の4次元座標変換について物理法則が常に不变な形式の方程式で表せるような理論体系である。そのため時空を記述するに当たり意図的に奇妙な座標系を採用することも可能であるが、しかしながら一般にはそのような座標系を物理的に解釈することは困難である。たとえ四つの座標軸の名前が( $t, x, y, z$ )であったとしても、それが我々が常識的に理解している4次元直交座標系(正確には特殊相対論で言う4次元ミンコフスキー(Minkowski)座標系)と同じ性質の座標系であるとは限らない。そのような意味で言うとき、物理的意味が最も明らかな座標系は重力に引かれて自由落下する観測者(あるいは観測者の視点)が乗っている座標系であり、その座標系の上に見た光景が我々がブラック・ホールの近くへ行ったときに実際に見るであろう光景と考えられている。特に自由落下する瞬間の座標系を局所慣性系(locally inertial frame)と呼ぶ。

CG画像作成時のその瞬間に視点は局所慣性系に乗っているとすべきである。

相対論によると、視点が局所慣性系に乗っているこ

とは視点  $P$  の計量テンソルの対角成分値が、自由落下のその瞬間に

$$g_{00}(P) = -1,$$

$$g_{11}(P) = g_{22}(P) = g_{33}(P) = 1$$

であり、その他の非対角成分値が 0 あることに等しい。もしすべての時空が同時に局所慣性系であるならば、その時空はあらゆる点において無重力であるような平坦 (flat) な時空である。逆に言えば重力の働く時空では必ずしも任意の点が局所慣性系ではないから、そこでもし視点でこの条件が成り立たないならば、 $g_{mn}$  の線形座標変換を行う。テンソル解析によると、元の座標系  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  と新しい座標系  $(y^0, y^1, y^2, y^3)$  の間に

$$x^m = \sum_{n=0}^3 k^m_n y^n$$

という関係があるならば（ただし各  $k^m_n$  は定数である）、新しい座標系の計量テンソル  $g'^{mn}$  の値は

$$g'^{mn} = \sum_{a=0}^3 \sum_{b=0}^3 g_{ab} k^a_m k^b_n$$

と求められる。そこで新しい座標系では視点が局所慣性系になるように  $k^m_n$  の値を決めればよい。

### 2.3 光の進路

計量テンソルが与えられると、それを用いて光線の進路、これを測地線 (geodesic curve) と呼ぶ、の方程式を作ることができる。光の進路をパラメータ  $\tau$  を用いて 4 元表示  $(x^0(\tau), x^1(\tau), x^2(\tau), x^3(\tau))$  で表すとき、測地線の方程式は

$$\ddot{x}^i = \sum_{m=0}^3 \sum_{n=0}^3 \Gamma^i_{mn} \dot{x}^m \dot{x}^n$$

で与えられる。ここに  $\ddot{x}^i$  は  $x^i(\tau)$  の  $\tau$  による 2 階微分、 $\dot{x}^i$  は 1 階微分を表す。 $\Gamma^i_{mn}$  は接続の係数 (coefficients of connection) と呼ばれ、計量テンソルから以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{mn} &= \sum_{k=0}^3 g^{ik} (\partial g_{km} / \partial x^n + \partial g_{kn} / \partial x^m \\ &\quad - \partial g_{mn} / \partial x^k) / 2 \end{aligned}$$

ここに上付き添え字を持つ計量テンソル  $g^{ik}$  は下付き添え字を持つ  $g_{ik}$  の逆行列である。 $\partial g_{km} / \partial x^n$  等は偏微分を表す。視点  $P$  で  $\tau=0$  とするとき、測地線の方程式は 2 階微分方程式だから、視点  $P$  の位置  $(x^0(0), x^1(0), x^2(0), x^3(0))$  と視点に入射する光線の方向  $(\dot{x}^0(0), \dot{x}^1(0), \dot{x}^2(0), \dot{x}^3(0))$  を与えれば、その光線の進路は一意に定まる。2.1 節で述べたように、光線ベクトルの 4 次元的大きさは常に 0 であるから、光線の方向は視点において

$$\sum_{m=0}^3 \sum_{n=0}^3 g_{mn}(P) \dot{x}^m(0) \dot{x}^n(0) = 0$$

を満たさねばならない。もし視点においてこれが満たされるならば、測地線上の任意の点において光線ベク

トルの大きさが 0 になることが簡単に証明できる。

以上の議論で、曲がった時空における任意の光線の進路を求める基本的な準備ができた。

我々の仕事は、適当な計量テンソル  $g_{mn}$  が与えられたならば、まず視点が局所慣性系になるように座標変換する。次に変換後の計量テンソルから接続の係数を求める。接続の係数が求められたならば、それから非線形 4 元連立 2 階常微分方程式である測地線の方程式が求められるから、この方程式を解く数値積分プログラムを作る。あるいは計算テンソルから最初に接続の係数を求め、その後に計量テンソル、接続の係数を局所慣性系へ変換し、数値積分プログラムを作る。これが一般相対論的な光線追跡プログラムである。しかしながら実際の光線追跡時には、光線が時空の特異点に至らないための特別の配慮を必要とする。今回の CG プログラムではブラック・ホールの性質に依存した数値計算の終了条件が付加された (2.4 節、4.3 節参照)。

### 2.4 ブラック・ホールの時空

本論文では一定速度で回転するブラック・ホールを表す計量テンソルを採用する。ブラック・ホールを表す計量テンソルとしては他にも様々な性質を持つブラック・ホールが知られている。しかし多くの星はほぼ球形でかつ回転していることから、それらがブラック・ホールになった場合には球対称な回転するブラック・ホールになると予想されている。その意味で物理学者は回転するブラック・ホールに最も注目しており、このブラック・ホールは重要である。この計量テンソルは、空間座標としての極座標  $(x^1, x^2, x^3) = (r, \phi, \theta)$  を用いて、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + ar/f \\ g_{02} &= g_{20} = abr \sin^2 \theta / f \\ g_{11} &= f / (r^2 + b^2 - ar) \\ g_{22} &= (r^2 + b^2) \sin^2 \theta + ab^2 r \sin^4 \theta / f \\ g_{33} &= f \end{aligned}$$

ただし

$$f = r^2 + b^2 \cos^2 \theta$$

である。 $a$  は重力半径 (gravitational radius) と呼ばれるブラック・ホールの大きさを表すパラメータ、 $b$  はブラック・ホールの回転速度を示すパラメータである。 $b=0$  ならば、ブラック・ホールは回転していない。

この計算テンソルから接続の係数を求めるには、以下のように各計量テンソルの偏微分を求める。

$$\begin{aligned}
 \partial g_{00}/\partial x^1 &= af(1-2r^2/f)/f \\
 \partial g_{00}/\partial x^3 &= 2ab^2r \sin \theta \cos \theta / f^2 \\
 \partial g_{02}/\partial x^1 &= -b \sin^2 \theta \partial g_{00}/\partial x^1 \\
 \partial g_{02}/\partial x^3 &= -2abr \sin \theta \cos \theta (1+b^2 \sin^2 \theta / f) / f \\
 \partial g_{20}/\partial x^1 &= \partial g_{02}/\partial x^1 \\
 \partial g_{20}/\partial x^3 &= \partial g_{02}/\partial x^3 \\
 \partial g_{11}/\partial x^1 &= (2r(b^2-ar-b^2 \cos^2 \theta) \\
 &\quad + af)/(r^2+b^2-ar)^2 \\
 \partial g_{11}/\partial x^3 &= -2b^2 \sin \theta \cos \theta /(r^2+b^2-ar) \\
 \partial g_{22}/\partial x^1 &= \sin^2 \theta (2r-b \partial g_{02}/\partial x^1) \\
 \partial g_{22}/\partial x^3 &= 2 \sin \theta \cos \theta (r^2+b^2-b g_{02}) \\
 &\quad - b \sin^2 \theta g_{02}/\partial x^3 \\
 \partial g_{33}/\partial x^1 &= 2r \\
 \partial g_{33}/\partial x^3 &= -2b^2 \sin \theta \cos \theta
 \end{aligned}$$

さらに計量テンソルの逆行列を求め、定義式に従って計算すれば接続の係数が求められる。この場合の接続の係数は時間依存性でないから、測地線の方程式は3元連立微分方程式である。

ブラック・ホールを表す時空解としてはほかにも標準体で回転しているものの系列<sup>10)</sup>が既に知られているが、それらは計量テンソルを書き下すだけで紙面数ページを費やすほどに複雑であり、人手だけで接続の係数を求めるることはほとんど困難であり、また人手では計算ミスを犯してしまう。数式処理システムの助けが必要である。

さて上の計量テンソル  $g_{11}$  の値は、座標  $r$  の値が  $(a + \sqrt{a^2 - 4b^2})/2$  よりも大きいならば正、等しいならば無限大、小さいならば負になることが分かる。相対論によると、計量テンソルの対角要素の符号が反転することは時空の構造の劇的な変化を意味しており、その意味で、半径が  $(a + \sqrt{a^2 - 4b^2})/2$  の球面は特異な面である。これを事象の地平 (event horizon) と呼ぶ。詳細な議論は専門書<sup>11)-13)</sup>に譲るが、如何なる光線も事象の地平を通過できないから、CG 化では注意を要する。

上の計量テンソルの式から容易に予想できるように、接続の係数は非常に複雑な数式になり、これが CG 画像作成時の計算量のネックのひとつになる。人手で十分に最適化した FORTRAN 77 プログラムで接続の係数を計算するためには、加算、減算 28 回、乗算、除算 70 回、三角関数計算 1 回を必要とする。少なくともこれだけの演算量が数値積分のステップごとに必要とされるから、CG 画像生成の全体で必要とされる演算量は膨大なものになる。

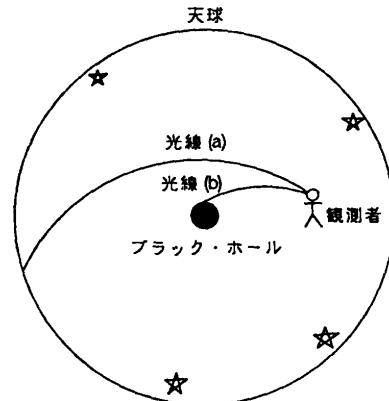


図 1 世界のモデル

Fig. 1 The model of our world containing a spinning black hole.

### 3. 対象世界のモデル

この章では CG 化の対象となる世界のモデルを述べる。今回の試みは曲がった時空における CG の最初の試みであるから、最も簡単なモデルを採用した（図 1 参照）。

まず空間原点に回転する球対称なブラック・ホールが存在し、原点から無限の遠方では無重力になるとすると、この時空は時間的に不变である。

原点から無限の遠方の天球には多くの星や銀河が適当な密度で分布しているとする。ブラック・ホールの近傍には物体は何もないとする。現実の物理現象では、星間物質がブラック・ホールに吸い込まれながら X 線を放射したり、イオン化したりするなど、ブラック・ホールの周辺は決して静かでないと予想されている<sup>2)</sup>が、そのような現象の CG 化は今後の課題として、ここではブラック・ホール近傍には何も置かない簡単化したモデルを扱う。

さて、カメラを持った観測者はブラック・ホールの近傍を、ブラック・ホールに落ちないように注意しながら、十分ゆっくりと動く。ブラック・ホールの周辺には見るべき物体は何もないが、天球上の星や銀河の発した光線はブラック・ホール近傍で様々に湾曲して観測者に届くから、星の見かけの位置は変化し、銀河の形状も歪んで見える。これを CG 画像で明らかにするのが今回の試みである。

### 4. CD 画像作成法

#### 4.1 天球上のマッピング・データ

まず、天球に張る星や銀河の画像データを用意する。これを天球上のマッピング・データと呼ぶことに

する。今回はメルトカトル図法を用いて  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  の天球面を  $3600 \times 1800$  に分割した。簡単のため、銀河を描いた  $512 \times 512$  の大きさのカラー画像をひとつだけ天球に張り、星は  $256 \times 256$  の大きさのモノクロ画像を天球全体に繰り返して張り合わせた。今回用いた銀河データ、星のデータは、イラストレータによる手書きの絵をコンピュータに取り込んだものである。

#### 4.2 視点の設定

ブラック・ホールを表す計量テンソルでは座標  $r$  の大きさ、パラメータ  $a$ ,  $b$  の大きさは互いに相対的な意味しか持たないから、計算の簡単化のため、 $a$  の値を 1 に固定し、回転のパラメータ  $b$  と視点の位置と方向を決める。

次に視点の直前に射影平面を仮定し、それを横  $m$  個、縦  $n$  個のピクセルに分割する。ピクセルの各頂点には  $(0, 0)$  から  $(m, n)$  までの番地を付ける。

#### 4.3 光線の進路の計算

射影平面上のピクセルの各々の頂点を通る光線について測地線の方程式を解く。

もし頂点  $(i, j)$  ( $0 \leq i \leq m$ ,  $0 \leq j \leq n$ ) を通る光線の先端がブラック・ホールから十分離れた位置まで計算されたならば、その時点で計算を終了し、その光線が無限遠方へ向かう方向  $(\phi, \theta)$  を求める（図 1 の光線 (a) 参照）。 $(i, j)$  と  $(\phi, \theta)$  の組が測地線の計算結果になる。 $(\phi, \theta)$  の値の誤差は今回の場合には 1 万分の 1 以下であれば十分である。何故ならば、今回使用するマッピング・データの大きさが縦横それぞれ数千のオーダであり、それ以上の精度の計算を行っても画質はあまり向上しないからである。数値誤差自体の条件は甘いが、しかし重力の強い領域では光線は極端に湾曲するから、数値積分のアルゴリズムには十分な配慮が必要である。今回のプログラムでは 2 次の Runge-Kutta 法を用いた。数値積分の刻み幅は測地線の変化率に反比例するようにし、光線の湾曲に動的に対処した。また計量テンソルは極座標で表されているから、極の近傍、すなわち  $\theta$  の値が 0 または  $\pi$  の近傍では  $\phi$  の値に誤差が累積しやすい。そこで、刻み幅は  $1 + c |\sin \theta|$  ( $c$  は定数,  $|\cdots|$  は絶対値を表す) に反比例するようにした。十分離れた位置とはそれ以後の光線の湾曲が計算誤差の範囲内になるような位置である。今回のプログラムで測地線の計算誤差を 1 万分の 1 程度にした場合の十分離れた距離とは  $20a$  以上であった（ $a$  は重力半径）。

また、もし光線の先端がブラック・ホールの事象の地平に十分近付いた位置まで計算されたならば、計算を中断する（図 1 の光線 (b) 参照）。視点から出た光線が事象の地平に十分近付くということは、その光線が事象の地平に捕獲される、簡単に言うと、ブラック・ホールに落ち込むことを意味する。十分近付いた位置とは光線が必ず事象の地平に捕獲される位置で、それは半径が  $(a + \sqrt{a^2 - 4b^2})/2 + \delta$  となる球面の内側である。一般相対論によると、 $b=0$  のとき  $\delta \leq 0.5a$  ならば十分であり、 $b > 0$  のときもこれに準ずる。今回は十分に余裕をとって  $\delta = 0.01a$  とした。

射影平面の各点を通る光線は必ず上に述べた二つの場合のいずれかに該当する。

この測地線の計算は CG 画像生成の中で最も計算の負荷の大きな処理である。そこでこの計算量を減らすために、射影平面の中でも光線の湾曲の変化が比較的小さいと思われる領域についてはいくつかの代表点のみで測地線を求め、その他の点では内挿して求める。具体的には、まず射影平面を適当な大きさの正方形に分割し、その正方形の周囲 8 点（4 頂点とそれの中点）および中心点について測地線の方程式を解く。もし 4 頂点を通る光線が向かう無限遠方の方向の平均値  $(\Sigma \phi/4, \Sigma \theta/4)$  と中心を通る光線が向かう無限遠方の方向  $(\phi_c, \theta_c)$  の差が十分小さいならば、9 点の計算結果から領域内の各点の方向を 2 次近似で内挿する。さもなくばこの正方形をさらに 4 分割し、同様の処理を再帰的に繰り返す。もし領域の大きさが  $2 \times 2$  になったならば分割を終了する。光線の進路はブラック・ホールのごく近傍を除いては十分に滑らかだから、この方法は有効である。

#### 4.4 ピクセルの色濃度の計算

前節の計算より、射影平面の各々のピクセルについて、そのピクセルの四つの頂点それぞれに対応する四つの無限遠方の方向を求める。

もし四つの頂点を通る光線のいずれかひとつでもブラック・ホールに落ち込むならば、そのピクセルを通過する光線はないとして、そのピクセルに黒い色を割り付ける。

さもなくば、この四つの方向が天球上に張る（メルカトル図法の意味での）四辺形の領域から発せられた光線の束がこのピクセルを通って視点に入射する（図 2 参照）。厳密に言うならば、一般には天球上の対応する領域は四辺形ではないが、計算の簡単化のためそのように仮定する。そこでマッピング・データから天

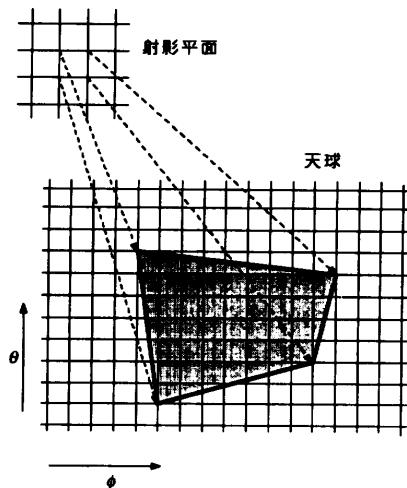


図 2 射影平面から天球への光線追跡  
Fig. 2 The ray-tracing from the projective plane to the celestial sphere.

球上のこの領域内のすべての点について RGB の色濃度を求め、その平均値を射影平面のそのピクセルの色濃度とする。

通常の 3 次元 CG での光線追跡法では、ピクセルの色濃度はそのピクセルの中心を通る光線についてのみサンプリングを行う。この方法では CG 画面の変化の激しい領域ではエイリアジングを生じる。今回の場合も同様に、光線の湾曲の変化が激しい領域では天球上の非常に広い（全天の数分の 1 にさえ達する）領域から発せられた光線の束がひとつのピクセルを通過することもしばしばあるから、ピクセルの中心点のみによるサンプリングではエイリアジングを生じる。これに関する十分な評価はまだ行っていないが、今回は安全のため、このサンプリング方式は採用しなかった。次の段に述べるように、サンプリング方式は計算量に重大な影響を及ぼすから、さらに詳しく検討する必要があろう。これは今後の課題である。

上の平均値計算を計算量の立場から見ると、第 1 に天球上の点が四辺形の内側にあるか否かの判定は決して簡単ではない。そこで四辺形の代わりに、その四辺形を含む（メルカルト図法の意味での）長方形を用いて判定を行う（図 3 参照）。この方法によると、四辺形の外部でかつ長方形の内部の点が計算に混入することになるから、求める色濃度は実際の値よりもボケてしまう<sup>5)</sup>が、画質の劣下と計算量の減少を比べるならば、現時点では後者がはるかに優先されるだろう。何故ならば、第一の理由は、内外判定の省略による画質の劣下は画像の解像度を上げることで補えると判断するからである。もしピクセル数 512×512 でボケが

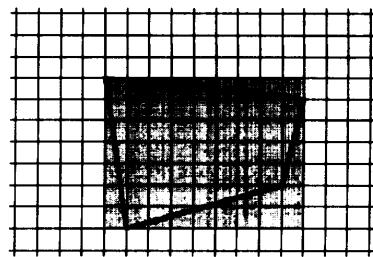


図 3 長方形による代用  
Fig. 3 The replacement of a quadrangle by a rectangle.

顯著ならば、計算量は 4 倍になるが、1024×1024 で計算すればよい。第二の理由は、6 章で報告するように本研究の CG 画像生成ではベクトル計算機の利用が非常に有効であることである。ベクトル計算機における実行ではベクトル化の可・不可は計算速度に 100 倍以上の差を生じ、ベクトル化できない部分が計算時間の大部分を占めてしまう。第三の理由は、実験による解像度 512×512 の場合に内外判定を行った場合と省略した場合では画質に顯著な差異が確認できなかったことである。以上のような理由により計算省略を優先し、長方形による代用を採用した。

しかしながら長方形で代用する場合でも、その長方形が大きいならば内側に含まれるピクセル数そのものが多いから、平均値の計算は決して高速にはできない。そこで、たとえば銀河ならば、マッピング・データに含まれる  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$ ,  $8 \times 8$ , … の大きさのすべての正方領域の平均値をあらかじめ計算しておく、大きな長方形領域の計算にはこれを利用する。たとえば図 3 の領域は図 4 の領域で代用され、この領域の平均値は、この領域に含まれる  $4 \times 4$  の大きさの部分正方領域 6 個の（あらかじめ計算されている）平均値として計算される。この代用によって、平均値計算にはさらに不要な点が混入するが、与えられた長方形に対する部分領域の大きさを適当に選ぶことで画質の劣下を小さく抑えることができる。今回のプログラムでは、長

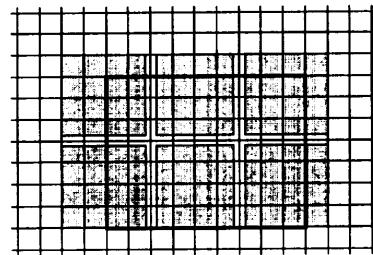
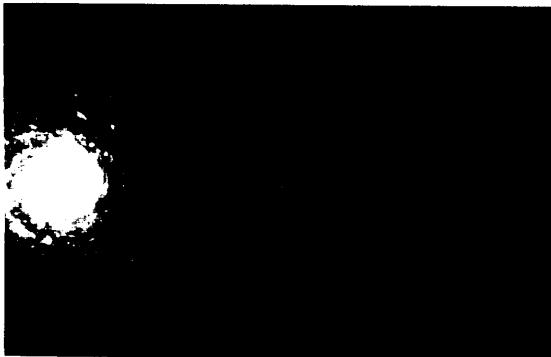


図 4 部分正方領域の張り合わせによる代用  
Fig. 4 The replacement of a rectangle by a set of squares covering the rectangle.

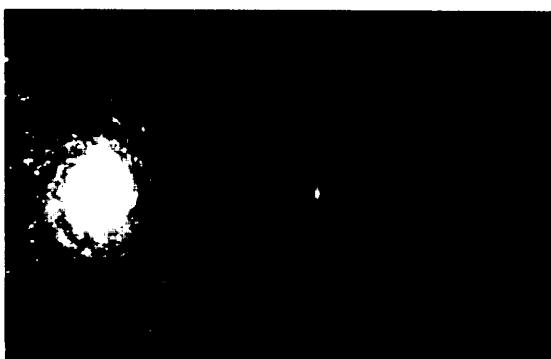
方形の短い方の辺の長さの 8 分の 1 よりも小さい 2 の累乗数の上限を部分正方形領域の辺の長さとした。

### 5. 画像生成例

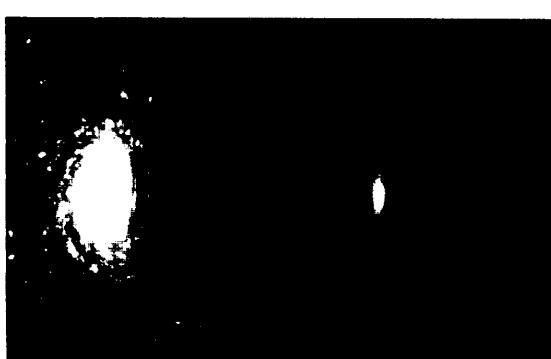
4 章で述べた方法に従ってブラック・ホールの CG 画像を生成した。図 5(a), (b), (c) がその CG



(a)  $r=60a$  の場合  
The case for  $r=60a$ .



(b)  $r=40a$  の場合  
The case for  $r=40a$ .



(c)  $r=20a$  の場合  
The case for  $r=20a$ .

図 5 CG 画像例  
Fig. 5 Examples of CG images.

画像例である。この画像は並列計算機 LINKS 1 (木構造 2 段、ノード・プロセッサ 35 台)/C プログラムで計算、画像出力された。これはハイビジョン用に生成されたもので、画像の解像度は  $960 \times 1024$  である。ハイビジョンの解像度は  $1920 \times 1024$  であるが、横方向に 1920 の大きさを有するフレームメモリが使用できなかったため、やむなく横方向の解像度は 2 分の 1 とした。計算時間は (a) 9 時間 23 分、(b) 9 時間 36 分、(c) 5 時間 21 分であった (計算時間のばらつきの理由は次章で述べる)。回転の速度は  $b=0.49a$  とした。視点の位置は原点から (a)  $60a$ , (b)  $40a$ , (c)  $20a$  とし、視点の方向はブラック・ホールの中心を向いている。すなわち図 5 はブラック・ホールにだんだんと近付くときの連続画像である。CG 画像の左右の視角は  $90^\circ$  とした (よって若干広角である)。銀河の本来の位置は、ブラック・ホールの中心を対称点として視点とほぼ反対側である。

ブラック・ホールの近傍では光線が曲がるから、ひとつの銀河がブラック・ホールの両側に二つ見えている。これは重力レンズ効果 (gravitational lens effect) として知られている現象である。点としての星が二重に見える様子を検討した報告は既にある<sup>8), 9)</sup> が、銀河の見かけの歪みを描き出した本格的な CG は今回が初めての試みと思われる。この距離ではブラック・ホールの回転の効果はあまり現れていない。回転の視覚効果については物理的にもまだ不明な点が多いから、今後相対論の専門家とも議論しさらに検討して行きたい。

### 6. 各種計算機による画像生成

前章までは暗黙にスカラ計算機を仮定して生成方法を述べたが、CG 画像生成実験は、これまでにワークステーション SUN 3, SUN 4、並列計算機 LINKS 1、ベクトル計算機 S-820 で行われた。それについて特に計算速度の侧面から簡単に報告する。以下の計算ではブラック・ホールの二つのパラメータ  $a$ ,  $b$ 、視点の位置、方向は前章と同じまたは同等の値を設定した。ただし著者がそれぞれの計算機をいつでも自由に使用できる計算機環境にはいないため、以下に述べる画像生成実験の条件 (プログラミング言語、画像の大きさ) が不統一であることを了承願いたい。

#### 6.1 ワークステーションによる生成

ワークステーションによる生成はスカラ計算機による生成の基礎データを提供してくれる。またワーク

ステーションは多くのCG研究者が最も一般的に使用できる計算機であり、曲がった時空におけるCG研究の最も有用な計算時間を示してくれる。

SUN 3/C プログラムで  $512 \times 512$  の大きさの CG 画像を作成すると、約 6 時間 38 分の CPU 時間が必要であった。SUN 4/FORTRAN 77 プログラムで  $640 \times 512$  の大きさの CG 画像を生成すると、約 57 分の CPU 時間が必要であった。両者のこの計算時間の比は演算能力の比にはほぼ等しいと思われる。もしブラック・ホールの CG アニメーションを 30 秒間、15 フレーム/秒で作成するならば、SUN 4 でさえ約 18 日を費やすことになる。

計算時間の内訳は、SUN 4 では、4.3 節の計算に約 52 分、全体の 90% 以上、4.4 節の計算に約 5 分と分かっている。

## 6.2 並列計算機による生成

一般に CG 画像生成において並列計算機は有望であるが、ブラック・ホールの CG 画像生成では負荷分散に特に注意を要すると思われる。

何故ならば、通常の 3 次元 CG では CG 画像の各ピクセルの計算の負荷の比は高々数十倍であるから、ノード・プロセッサへの負荷の分散は単純な方法でよい。しかし今回のブラック・ホールの CG の場合、内挿法を用いるから、各ピクセルの測地線の計算の負荷の比は数百倍にも達する。負荷をうまく分散させるにはノード・プロセッサに割り当てる領域の大きさを小さくする必要があるが、領域が小さいと逆に内挿法が十分効果を出さない。割り当てる領域の大きさを動的に変化させるには並列計算機の構造は相当に高度なものでなければならない。

並列計算機 LINKS 1 は CG 画像生成に多くの実績を持つが、その構造は平坦であるから、上のような柔軟な負荷分散には問題があると思われる。もしそれを実現するならばプログラムが相当複雑になってしまい、その場合のプロセッサ間通信の負荷も無視できない。

前章の CG 画像作成では一枚 CG 画像を 960 個の領域に単純に分割したが、計算の終わり頃には数台のノード・プロセッサのみが数時間以上動き、他の 30 数台は遊んでしまうという状況が現れた。前章で述べた図 5(a), (b), (c) の計算時間はまちまちであったが、これはまさに負荷分散の失敗による。

プロセッサそれぞれはスカラ演算を行うから、4.3 節と 4.4 節の計算時間の比はワークステーションの場

合とほとんど同じであると思われる。

## 6.3 ベクトル計算機による生成

本研究で設定した CG モデルは非常に単純であったにも関わらず、測地線の計算は膨大である。この種の計算にはベクトル計算機が適していると予想され、実際予想どおりの計算速度を実現できた。

4.3 節の計算に現れる式は複雑ではあるがその内容は単純な数値積分であるから、もし射影平面の各点を通る光線を並列に計算するならば、ベクトル計算機でも十分な効率が得られると期待できる。ただし 4.3 節で述べた再帰的な内挿法はそのままではベクトル化できないから、計算のレベルを 2 段階に固定する。すなわち、今回のプログラムでは、最初に射影平面全体を縦横 8 点間隔に荒く計算し、その結果から内挿できないとわかった  $16 \times 16$  の大きさの正方領域すべてを再度詳細に計算する。光線によって数値積分の繰り返し回数が異なるから、リスト・ベクトルを用いてベクトル長を可変にした。最大ベクトル長は今回のプログラムでは 5 千以上に設定した。この方法に従って S-820/FORTRAN 77 で数値実験したところ、 $640 \times 512$  の大きさの CG 画像について、ベクトル化率 80% 以上を達成し、1 枚当たり 5 秒以下の CPU 時間で計算できた。このプログラムは SUN 4 のそれとほぼ同じものであるが、SUN 4 の約 620 倍以上に加速された。これに対して 4.4 節の計算は内容が複雑であるから、ベクトル化の対象となる最内ループがほとんど存在せず、S-820/FORTRAN 77 で 1 枚当たり 30 秒の CPU 時間であった。SUN 4 の約 6 倍である。これは単に S-820 と SUN 4 のスカラ演算性能の差に由来すると思われる。結果 CG 画像 1 枚当たり 35 秒であるから、30 秒間の CG アニメーションは約 4 時間 20 分で生成できる計算になる。これは我々がアニメーションを作るに際しきわめて現実性のある数値であり、実際 30 秒間のアニメーションを作成できた。一般相対論的な CG はこれまでほとんど行われておらず、ブラック・ホールの本格的 CG アニメーション作成は今回が初めての試みであると思われる。

ところで、スカラ計算機では 4.3 節の計算がネックになっていたが、ベクトル計算機では事情は逆転し、むしろ 4.4 節の計算がネックになっている。さらに計算速度を上げるには、4.4 節の色濃度計算アルゴリズムを改良する必要がある。またもし画像解像度は落としたとしても 1 枚当たり 1 秒以下で画像生成ができるならば、ブラック・ホール近傍への宇宙旅行を疑似体

表 1 各種計算機による計算時間  
Tabel 1 Computation times by several kinds of computers.

	4.3 節の計算	4.4 節の計算
SUN 3	22000	2400
SUN 4	3100	340
LINK 1	5500	610
S-820	5	30

注) 単位は秒

験できる。これは近い将来十分に可能であると思われる。

以上、報告した各種計算機による計算時間（概算）を推定したものが表 1 である。画像解像度は  $640 \times 512$  とした。すべての計算機について同じ条件下のデータがあるわけではないが、生成された画像の解像度と計算時間から単純推定した。また LINKS 1 の場合は負荷分散がある程度成功した図 5(c)の CG 画像のデータを用いた。

## 7. おわりに

本論文では曲がった時空における CG の最初の試みとしてブラック・ホールの CG について紹介した。ブラック・ホール近傍では強い重力によって光線の進路さえもが曲がってしまう。それを一般相対論に従って忠実にシミュレートし、ブラック・ホール近傍の観測者の見る光景を作成した。ブラック・ホールによる銀河の見かけの形状の歪みを視覚化したのは今回が初めての試みと思われる。

本研究は始まったばかりであり、今後の課題も山積みされている。

まず、今回採用した世界のモデルはブラック・ホールの近傍に全く物体が存在しない単純なものであった。これには光線と物体の交点計算を省略する意図があった。もしブラック・ホール近傍に適当な大きさの物体、たとえばロケットなどを置くならば、交点計算は不可欠である。その効率的な計算方法等はまだ検討されていない。これによってたとえば、ブラック・ホールに物体の落ち込む様子などの CG 化が可能になる。

また、今回は観測者（視点）はゆっくりと動くと仮定した。しかしたとえば、観測者（視点）がブラック・ホールの周辺で梢円運動、放物線運動する場合の光景は今回とはかなり異なっているに違いない。特にブラック・ホールに落ち込む観測者が見る光景は興味

深い。

その他にも我々の想像し得ないような光景が CG によって明らかにできる。これらが一般の人々の相対論理解に役立つことはもとより、相対論研究に与える影響も大きいと思われる。

**謝辞** 東京大学大型計算機センター金田康正先生にはベクトル計算機用プログラムのチューニングをやって頂くと共に S-820 での数値実験、アニメーション作成を全面的に支援して頂いた。筑波大学電子情報工学系森正武先生、小柳義夫先生には貴重な計算機環境を提供して頂いた。筑波大学物理学系表 實先生には多くの励ましと物理サイドからの貴重な御助言を頂いた。広島大学理論物理学研究所細谷暁夫先生には本研究を始めるきっかけを作って頂いた。京都大学理学部佐藤文隆先生、大阪教育大学天文教室福江純先生、大阪大学物理学科大学院前野昌弘さんおよびハード SF 研究会のみなさんには貴重な御意見を頂いた。大阪学院大学大村浩一先生には LINKS 1 を使用するチャンスを与えて頂いた。LINKS 社の並木茂さん、吉村浩さん、イメージ・ファクトリの宮脇季里さん、中川佳子さん、岡勝利さんには LINKS 1 の使用に際し多大な便宜を図って頂いた。以上の皆さんに深く感謝いたします。そして最後に NHK 産業科学部の佐藤傑さんの様々な御支援なくしては本研究はここまで成果を出せなかつたであろうことを特に強調し、深く感謝いたします。

## 参考文献

- 1) 内山龍雄：一般相対性理論、裳華房（1978）。
- 2) Davies, P.C.W. (松田卓也, 二間瀬敏史訳)：ブラック・ホールと宇宙の崩壊、岩波現代選書（1983）。
- 3) Hawking, S.W. and Ellis, G.F.R.: *The Large Scale Structure of Space-time*, Cambridge University Press (1973).
- 4) Whitted, T.: An Improved Illumination Model for Shaded Display, *Comm. ACM*, Vol. 23, No. 6, pp. 343-349 (1980).
- 5) 柴本 猛, 小林 誠：テクスチャマッピングについて (1), 第 31 回情報処理学会全国大会論文集, pp. 1703-1704 (1985).
- 6) 出口 弘, 西田政人ほか：視線探索法による画像生成のための木構造並列処理システム、電気通信学会論文誌, Vol. J 69, No. 2, pp. 170-179 (1986).
- 7) 長島重夫ほか：小特集スーパーコンピュータ、日立評論, Vol. 69, No. 12, pp. 1097-1176 (1987).

- 8) Young, P., Gunn, J. et al.: The Double Quasar Q0957+561 A, B : A Gravitational Lense Image Formed by a Galaxy at  $z=0.39$ , *The Astrophysical Journal*, Vol. 241, pp. 507-520(1980).
- 9) 江沢 洋: 重力レンズ効果, 科学, Vol. 53, No. 9, pp. 587-595 (1983).
- 10) Tomimatsu, A. and Sato, H.: New Series of Exact Solutions for Gravitational Fields of Spinning Masses, *Progress of Theoretical Physics*, Vol. 50, No. 1, pp. 95-110 (1973).  
(昭和 63 年 10 月 31 日受付)  
(平成元年 2 月 14 日採録)



山下 義行 (正会員)

昭和 34 年生。昭和 57 年大阪大学理学部物理学科卒業。昭和 57 年～61 年日立マイクロコンピュータエンジニアリング(株)勤務。昭和 61 年筑波大学情報学類研究生。昭和 62 年より同学大学院博士過程工学研究科(電子情報工学専攻)に在学中。工学修士。文法的プログラミングとその周辺、ニューラルネット・プログラミング、一般相対論的コンピュータグラフィックスに関する研究に従事。日本ソフトウェア科学会会員。