F-048

「多数決」の数学的モデルによる解析と評価

Analysis and evaluation of a mathematical majority decision model

三浦 章†　坂井 公‡　金井 貴†
Akira Miura　Ko^ Sakai　Takashi Kanai

1. はじめに

2010 年 10 月に女流名人と対戦し勝利した将棋ソフト「あから」の制御[1] [2]に多数決原理が用いられ，大きな成果が得られたこと等，多数決原理が意思決定に有効であることは経験的によく知られている [3] [4].

一方で，「三人寄っても下種は下種」，「衆愚政治」等の諺・故事にあるように，多数決原理の過信には危険が孕んでいることも直感的には理解できる.

本稿では，多数決原理を数学的にモデル化することで，個々人の判断能力と，集団としての判断の正確さの相関に関する，定量的解析・評価を実施するとともに，本モデルをベースに，集団としての正答率を高めるための具体的方策を議論する.

2. モデル

モデルは，

①（２ｎ＋１）人の集団において決定は単純過半数の多数決で行う．すなわち，（ｎ＋１）人の賛成で決定がなされる.
②個人の判断は他人の判断に影響されない.
③個人の正答率は一様に，ｐ（０≦ｐ≦１）である.

とし，この下で，多数決により，正しい判断がなされる確率，すなわち正答率を求める.

3. 正答率の解析的導出

（２ｎ＋１）人中の（ｎ＋１）人以上が正答である確率を $f_n(p)$ とすると，

$$f_n(p) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} p^k (1-p)^{2n+1-k}$$

である.

$f_n(p)$ に関する主要な性質は以下のとおりである.

$$f_n(0) = 0, \quad f_n(1) = 1 \qquad (1)$$

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

$f_n(p)$は点$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ に関して点対称　（３）

$$\frac{d}{dp} f_n(p) = (2n+1)\binom{2n}{n} p^n (1-p)^n \qquad (4)$$

$$\frac{d}{dp} f_n\left(\frac{1}{2}\right) = O(\mathrm{n}^{1/2}) \qquad (5)$$

$$\frac{d^2}{dp^2} f_n(p) = n(2n+1)\binom{2n}{n} \times (1-2\mathrm{p})\, p^{n-1}(1-p)^{n-1} \qquad (6)$$

$$\begin{array}{ll} f_{n+1}(p) \le f_n(p) & 0 \le p \le 1/2 \\ f_{n+1}(p) \ge f_n(p) & 1/2 \le p \le 1 \end{array} \qquad (7)$$

（１）～（６）より，$f_n(p)$ は，p＝０を零点とし，０≦p≦1 で単調増加，p＝1/2 で点対称，p＝1/2 を変曲点，０≦p＜1/2 で下に凸，1/2＜p≦1 で上に凸，なグラフであることが分かる.

（７）より，０≦p≦1/2 では，$f_n(p)$ はｎの増加に対し単調減少し，1/2≦p≦１では，$f_n(p)$ はｎの増加に対し単調増加することが分かる.

4. 考察

4.1. 個人の正答率と集団の正答率の関連

人数を固定した場合，正答率を変動させると次のことが分かる.

①　正しい判断をすることが多い（正答率が１／２以上）個人から成り立つ集団の正答率は，個人の正答率より高くなる.
②　常に正しい判断をする（正答率１）個人からのみ成り立つ集団は，常に正しい判断をする（正答率１）.
③　当たるも八卦当たらぬも八卦（正答率１／２）の個人からのみ成り立つ集団は，当たるも八卦当たらぬも八卦の判断をする.
④　①②は正しい→誤った，以上→以下，高く→低くに置き換えたものも成り立つ.

†　熊本県立大学
‡　筑波大学

4.2.　集団の大きさと集団の正答率の関連

①　人数の異なる集団を比較すると，“正しい判断をすることが多い（正答率が１／２以上）個人が大勢いる集団の正答率は，少ない人数の集団に比べて正答率は高くなる”ことが分かる．

②　式（５）　$\frac{d}{dp}f_n\left(\frac{1}{2}\right) = O(\mathrm{n}^{1/2})$より，ｎが大きければ，p=1/2 の近傍では，p の増加につれて $f_n(p)$は，n $^{1/2}$ のオーダで増加することが分かる．実際に，個人が正答率 0.6 の場合でも，多数決での正答率は，49 名の集団では，$f_{24}(0.6) \fallingdotseq 0.9224$　に，99 名の集団では，$f_{44}(0.6) \fallingdotseq 0.9781$　に，上昇する（計算には Wolfram Alpha を使用）．

③　①は正しい→誤った，以上→以下，高く→低く　に置き換えたものも成り立つ．

人数を１，３，５，７，９名と変動させた場合を図１に示す．集団が大きくなるにつれて，個人の正答率が同じでも集団の正答率が増加し，多数決が優れた決定方法であることを示している．

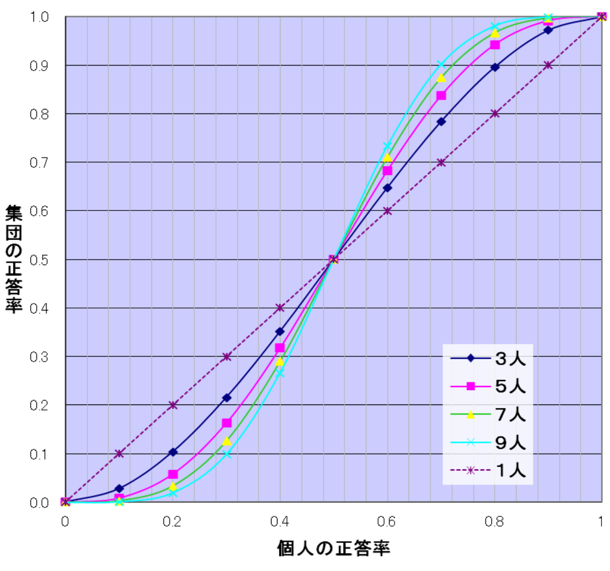

図1　集団の大きさと集団の正答率の関連

4.3.　集団の正答率を増す方策

正答率を増す方策としては，

（方策１）４．１①を踏まえ，個人の資質を向上させる（個人がより正しい判断をできるようにする），

（方策２）４．２①を踏まえ，集団構成人員（正しい判断のできる個人）数を増やす，

という 2 つが考えられる．

（方策１）は各種教育や啓発による対処であり，（方策２）は意思決定に関わる対象層を増やすことに対応する．これを踏まえると，現実社会においては（方策１）を行いつつ，制度見直しによる（方策２）を行うことが有効であるといえよう．

5.　おわりに

2010 年に女流名人と対戦し勝利した将棋ソフト「あから」の制御に多数決原理が用いられ，大きな成果が得られたことはよく知られている．本稿では，その数学的な背景を明らかにし，集団の構成員の正答率が１／２以上であると，構成員数が多いほど，単純過半数の場合，集団としての正答率が向上することを示した．

今後は，実際の多数決利用シーンを想定し，棄権者が存在する場合，集団内に複数の正答率のグループが存在する場合，３分岐以上の決定が求められる場合，単純過半数でない場合（たとえば日本国憲法改正等を考え，２／３過半数）等についての解析を進める．妥当性の検証には，マルチエージェントシミュレーション等を活用する．

参考文献

[1]　伊藤毅志：合議アルゴリズム「文殊」，情報処理，vol.50，No.9，pp.887～894，(Sep.2009)

[2]　伊藤毅志：コンピュータ将棋における合議アルゴリズム，人工知能学会誌，26 巻 5 号，pp.525～530，(2011.9)

[3]　瀧澤武信：ゲーム情報学　５．将棋，情報処理，vol.53，No.2，pp.126～132，(Feb.2012)

[4]　保木那仁他：あから 2010 のシステム設計と操作概要，情報処理，vol.52，No.2，pp.162～169，(Feb.2011)