

不動点法による非線形積分方程式の数値解法[†]

鈴木千里^{††}

Riemann 可積分関数空間上の Hammerstein 積分方程式の近似解について考察する：不動点法に基づき選点法の立場から近似解を構成し、 L_1 ノルムの位相において近似解の収束を示す。また一様収束については、空間を連続関数空間に制限して証明を与える。誤差解析としては、近似解の残差を Riemann 可積分関数の空間において評価し、さらに適当な滑らかさを仮定して近似解の誤差評価も与える。また十分な滑らかさを仮定し、近似解を自動算出するための数値計算スキームを与える。このスキームは複数個の解も容易に近似できる。本スキームに基づく数値例と共に、Riemann 可積分関数空間に属する不連続解に対する近似の有効性を検証するために若干の数値例を与える。

1. はじめに

非線形積分方程式である Urysohn 方程式

$$u(x) = \int_a^b K(x, s, u(s)) ds + h(x) \quad (1.1)$$

$$(x \in I = [a, b])$$

あるいは、Hammerstein 方程式

$$u(x) = \int_a^b K(x, s) f(s, u(s)) ds + h(x) \quad (1.2)$$

$$(x \in I)$$

に対する各種の数値解法は線形 Fredholm 方程式の解法と共に古くから研究され、Nyström 法^{1)~3)}や Galerkin 法^{4), 5)}あるいは両者のいずれかと適当な反復法とを組み合わせた関数方程式的な接近による解法^{6)~11)}などが知られている。特に、Nyström 法は近似の処方の単純さから、抽象化された作用素方程式に対する近似理論として、奇麗にまとめ上げられ collectively コンパクト作用素の概念が Anselone らにより確立されてきた²⁾。しかし、このような作用素の性質として相対コンパクト性のような位相的連続性が必要とされるため、積分核の連続性などが自然と要請される。したがって微分方程式ではうまく記述しきれない理工学的現象でも、積分方程式なら数学的にうまく記述できることがあるという、積分方程式の特性を考えるとき、不連続関数を含む広いクラスの関数空間において適用できる実際的な数値解法が望まれる。この観点からすると例えば、不連続核に対する Anselone の対応は必ずしも実際的ではない²⁾。

本論文では、不連続関数を含む Riemann 積分可能な関数の空間において Hammerstein 方程式(1.2)の数値解について考察する。すなわち不動点法に基づき選点法の立場から近似解を構成し、厳密解への収束性を L_2 ノルムの位相において論ずる。また空間を制限して、近似解の一様収束性についても示す。

誤差解析としては、残差を Riemann 可積分関数空間において評価し、解の連続性を仮定して近似解の誤差評価を与える。さらに滑らかさを仮定し、より精密な評価も与える。

また、(1.2)式の K, f, h が滑らかなとき、近似解を自動算出する数値計算スキームを述べる。このスキームは複数個の解をも近似できる。このスキームに基づく数値例を与えると共に、上述の近似の有効性を数値的に示すために不連続解をもつ方程式などの数値例も扱う。

本論文では、第 2 章を準備と問題の定式化にあて、第 3 章において近似の構図を述べる。第 4 章では近似解の収束性を議論し、第 5 章において近似解の誤差評価を行う。第 6 章では数値計算スキームを与え、幾つかの具体例を解く。第 7 章はまとめの章である。

2. 準備

本論文の議論に必要な記号および諸概念を与え、問題の定式化を図る。

区間 $I = [a, b] \subset R^1$ はコンパクトであることだけが本質的なので、本論文では区間を $I = [-1, 1]$ として考える。 I 上の二乗可積分関数の全体を $L_2(I)$ で表す。要素 $u, v \in L_2(I)$ に対して、内積を

$$\langle u, v \rangle = \int_{-1}^1 u(x)v(x) dx \quad (2.1)$$

と定義すれば、

$$\|u\| = (\langle u, u \rangle)^{1/2} \quad (u \in L_2(I)) \quad (2.2)$$

[†] Numerical Solutions of Nonlinear Integral Equations by Approximations of Fixed-Points by CHISATO SUZUKI (International Institute for Advanced Study of Social Information Science, Fujitsu Limited).

^{††} 富士通(株)国際情報社会科学院所

は L_2 ノルムである。このとき、 $L_2(I)$ は Hilbert 空間である。なお、関数や Euclid 空間のベクトルに対して一様ノルムを用いることがある。その場合にはノルムを $\|\cdot\|$ で表す。

$L_2(I)$ 空間に属する有界かつほとんど到る所で連続な関数の全体を $R(I)$ で表す。この空間は I 上の Riemann 積分可能な関数のクラスと等価である¹²⁾。

関数 $K(x, s)$, $f(x, z)$, $h(x)$ に対して

(A1) $K(x, s)$ は $I \times I$ 上の Riemann 可積分関数とし、

(A2) 関数 $f(x, z)$ は $I \times R^1$ 上のつぎを満たす連続関数とする：任意の $u, v \in L_2(I)$ に対して、 I 上で連続な正値関数 $g(x)$ が存在し、つぎが成立する；各 $s \in I$ に対して

$$|f(s, u(s)) - f(s, v(s))| \leq g(s) |u(s) - v(s)| \quad (2.3)$$

(A3) $h \in R(I)$

を仮定し、 $L_2(I)$ 空間から $L_2(I)$ の中への作用素 T を

$$T(u)(x) = \int_{-1}^1 K(x, s) f(s, u(s)) ds + h(x) \quad (2.4)$$

$(u \in L(I))$

のように定義する。このとき、作用素 T の不動点問題（不動点方程式）

$$u = T(u) \quad (u \in R(I)) \quad (2.5)$$

の解は（仮定 (A1)～(A3) のもとでの） Hammerstein 方程式(1.2)の解である。そこで、本論文では Hammerstein 方程式の代わりに不動点問題(2.5)の解を近似することを考える。

そのための準備を幾つか行う。集合 $A_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ は I 上の n 次 Legendre 多項式 $p_n(x)$ の n 個のゼロ点の集合とし、各要素を選点と呼ぶことにする。これらの選点は多項式の次数 n に依存するので、本来は x_i^n のように書き表すべきであろうが、記述の煩雑さを避けるために肩字の n をまた省略する。

関数 $u(x) \in R(I)$ に対する A_n 上の Lagrange 補間を

$$L_n(u)(x) = \sum_{i=1}^n l_i(x) u(x_i) \quad (2.6)$$

と書く。ここで、 $l_i(x) (i=1, 2, \dots, n)$ は Lagrange 補間の基本多項式である：

$$l_i(x) = p_n(x) / ((x - x_i) p_n'(x_i)) \quad (2.7)$$

この補間に對して、Erdős-Turán の定理「任意の Riemann 可積分関数 $u \in R(I)$ に対して、 $L_n(u)(x)$ は L_2 ノルムの位相で $u(x)$ に収束する。すなわち

$$\|L_n(u) - u\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成立する」が知られている^{13), 14)}。一方、滑らかな関数 u に対する補間誤差 $R_n(u)(x) = u(x) - L_n(u)(x)$ は

$$R_n(u)(x) = M_n p_n(x) u^{(n)}(\xi) \quad (|\xi| < 1) \quad (2.8)$$

である¹⁵⁾。ここで、 $M_n = 2^n n! / 2n!$ 。実数

$$W_i = \int_{-1}^1 l_i(x) dx = \frac{2(1-x_i^2)}{n^2 p_{n-1}(x_i)^2} > 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.9)$$

は A_n 上の Legendre-Gauss 積分則の (n に依存する) 重み係数で、 $W_1 + \dots + W_n = 2$ が成立する¹⁵⁾。この積分則において、「任意の $u \in R(I)$ に対し

$$\sum_{i=1}^n W_i u(x_i) \rightarrow \int_{-1}^1 u(x) dx \quad (n \rightarrow \infty) \quad (2.10)$$

が成立する¹⁶⁾。また I 上で十分滑らかな関数 u に対しては、誤差は

$$E_n(u) = \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) (2n!)^3} u^{(2n)}(\eta) \quad (2.11)$$

($|\eta| < 1$)

となる¹⁵⁾。なお、各 W_i は n に依存することから、 W_i^n のように表現すべきであろうが、記述の煩雑さを避けるため肩字の n をまた省略する。

つぎを計算しておくと便利である。

$$\int_{-1}^1 l_i(x) l_j(x) dx = \sum_{q=1}^n W_q \delta_{iq} \delta_{jq} \quad (2.12)$$

($1 \leq i, j \leq n$).

ここで δ_{iq} 等は Kronecker デルタである。

3. 近似の構図

不動点問題(2.5)の解を近似するために、積分作用素 T (2.4)を2種類の有限次元空間において近似する。すなわち、 T に対する2種類の近似写像（作用素）の導入を図る。

まず積分核 $K(x, s)$ に対する近似として、つぎの $K_n(x, s)$ を導入する。

$$K_n(x, s) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n l_i(x) l_j(s) K_{ij} \quad (3.1)$$

ここで、 $K_{ij} = K(x_i, x_j)$ 。この近似的ノルムは任意の $n \geq 1$ に対して有界である。実際、(2.12)式を用いて、つぎの評価が得られる。

$$\begin{aligned} \|K_n\| &= \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_i W_j K_{ij}^2 \right\}^{1/2} \\ &\leq 2 \|K\| \quad (\|K\| < \infty). \end{aligned} \quad (3.2)$$

さらに $K_n(x, s)$ は L_2 ノルムの位相で $K(x, s)$ に収束する。

補題1 $K(x, s)$ が $I \times I$ 上の Riemann 可積分関数

なら、 $K_n(x, s)$ は L_2 ノルムの位相で $K(x, s)$ に収束する（証明は付録A）。□

$I \times R(I)$ から $L_2(I)$ の中への写像 $F(u)(x)$ を
 $F(u)(x) = f(x, u(x))$

によって定義する。仮定(A2)により f が連続なので、任意の $u \in R(I)$ に対して、 $F(u)(x)$ も Riemann 可積分関数である¹²⁾。 $F(u)(x)(u \in R(I))$ に対する近似を

$$F_n(u)(x) = L_n(F(u))(x) \quad (3.3)$$

で与えれば、Erdős-Turán の定理により、この近似は L_2 ノルムの位相で $F(u)(x)$ に収束し、さらに $F_n(u)(x)(n \geq 1)$ の L_2 ノルムは有界である。実際

$$\|F_n(u)\| = \sum_{i=1}^n W_i F(u)(x_i)^2 \quad (3.4)$$

さて、積分作用素 T (2.4)を近似するための対の写像 $\{T_n^c, T_n^d\}$ を導入する。

R^n から $L_2(I)$ の中への埋め込み写像 $\Phi_n(n \geq 1)$ をつぎのように定義する。 $u^n = (u_1, \dots, u_n)^T \in R^n$ に対して

$$\Phi_n(u^n)(x) = \sum_{i=1}^n W_i g_{ni}(x) f_i \quad (3.5)$$

ここで、

$$f_i = f(x_i, u_i) \quad (x_i \in A_n)$$

$$g_{ni}(x) = \sum_{p=1}^n l_p(x) K_{pi} \quad (3.6)$$

さらに、 $L_2(I)$ から R^n 上への射影 π_n を

$$\pi_n u = (u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n))^T \quad (3.7)$$

によって定義する。このとき、 $R(I)$ から $L_2(I)$ の中への写像 $T_n^c(n \geq 1)$ を、つぎのように定める。

$$T_n^c(u) = \Phi_n(\pi_n u)(x) + h(x) \quad (u \in R(I)). \quad (3.8)$$

もう 1 つの近似写像として、 R^n から $L_2(I)$ の中への写像 $T_n^d(n \geq 1)$ を

$$T_n^d(u^n) = \pi_n(\Phi_n u^n + h) = \left(\sum_{j=1}^n K_{ij} W_j f_j + h_i \right) \quad (3.9)$$

のように定義する*。ただし、 $h_i = h(x_i)$ 。

なお、作用素 T と上で定義した $T_n^c, T_n^d, \Phi_n, \pi_n$ の間の関係を図 1 で示す。

* 近似写像 T_n^d (3.9) の不動点方程式は Nyström 法の離散方程式系^{13), 14)}と等価である。しかし、異なる選点を用いるとき、両者は必ずしも等価であるとは限らない。実際 Lobatto 積分則の分点 $A_n = \{y_i\}$ を選点とするとき、 T_n^d は $u^n \in R^n$ に対して

$$T_n^d(u^n) = \left(\sum_{j=1}^n K_{ij} W_j f_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n K_{ijk} e_{jk} f_k + h_i \right)$$

となり、Nyström 法とは異なる。ここで

$$f_j = f(y_j, u_j), \quad h_i = h(y_i)$$

$$e_{jk} = -\frac{2}{(2n-1)n(n-1)} p_{n-1}(y_j) p_{n-1}(y_k)$$

$p_{n-1}(y)$: $n-1$ 次 Legendre 多項式。

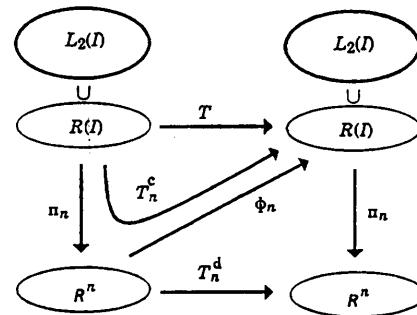


図 1 作用素、写像、射影の間の関係

Fig. 1 Relations among operator, mappings and projection.

写像 $\{T_n^c, T_n^d\}$ の間につきの関係が成立する。

定理 1 $n \geq 1$ を整数自然数として、つぎが成立する。

(i) $u^n = (u_1, \dots, u_n)^T \in R^n (\|u^n\|_2 < \infty)$ が T_n^d の不動点なら

$$u_n(x) = \Phi_n(u^n)(x) + h(x) \quad (3.10)$$

は写像 T_n^c の不動点である。

(ii) 逆に、 $u_n(x)$ が T_n^c の不動点なら、 $u^n = \pi_n u_n(x)$ は T_n^d の不動点である。

証明 (i)について: (3.10)式の $u_n(x)$ が T_n^c の不動点であることを示すために、 $x = x_i$ とおく。そのとき

$$\begin{aligned} u_n(x_i) &= \sum_{i=1}^n W_i K_{ji} f(x_i, u_i) + h(x_i) \\ &= (T_n^d u^n)_i = (u^n)_i \end{aligned}$$

ここで $(a)_j$ はベクトル $a \in R^n$ の第 j 成分を意味する。

ゆえに $\pi_n u_n(x) = u^n \in R^n$ を得る。したがって

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \Phi_n(\pi_n u_n)(x) + h(x) \\ &= T_n^c(u_n)(x). \end{aligned}$$

(ii)について: 逆に $u_n(x)$ を T_n^c の不動点として、 $u^n = \pi_n u_n(x)$ とすれば、 u^n は

$$u^n = \pi_n u_n(x) = \pi_n(\Phi_n(u^n)(x) + h(x)) = T_n^d u^n. \quad \square$$

この定理にもとづき、今後は T_n^d の不動点 $u^n \in R^n$ を T に対する離散近似解とよび、 T_n^c の不動点 u_n を連続近似解と呼ぶことにする。

本章の最後に、1 つの補題を述べておく。

補題 2 $\{u^n \in R^n\}$ を有界な列とすれば、すなわち $\|u^n\|_2 \leq B < \infty (n=1, 2, \dots)$ とすれば、埋め込み写像の列 $\{\Phi_n(u^n)(x)\}$ は L_2 ノルム有界である。ただし、 B は n に依存しない定数である。

証明 (2.12)式の関係を用いると $\Phi_n(u^n)$ の L_2 ノルムは

$$\|\Phi_n(u^n)\|^2 = \sum_{p=1}^n W_p \left(\sum_{i=1}^n W_i f(x_i, u_i) K_{pi} \right)^2$$

と計算され、Schwarz 不等式により

$$\|\Phi_n(u^n)\|^2 \leq \|K\|^2 \left\{ \sum_{i=1}^n W_i f(x_i, u_i)^2 \right\}$$

の評価を得る。このとき、 $f(x, z)$ の連続性により

$$|f(x, z)| \leq M < \infty \quad ((x, z) \in I \times [-B, B])$$

を満たす $M > 0$ が存在する。したがって、最後の項は $2M^2$ で上から評価できる。したがって仮定により、 $\|K\|$ は有界なので $\|\Phi_n(u^n)\|$ も有界である。□

4. 近似解の収束

近似解の収束性を議論するために、若干の用意を行い、その後で収束性を論ずる。

本章では、各 $n \geq 1$ に対して、 $u^n = T_n u^n$ を満たす離散近似解 $u^n \in R^n$ の存在とその有界性、すなわち、 $\|u^n\|_n \leq B < \infty$ ($n = 1, 2, \dots$)

を仮定する。ただし、 $B > 0$ は n に依存しない定数とする。このとき列 $\{u^n\}$ を用いて、つきの 2 つの関数列を構成することができる：

$$\{u_n \in L_2(I) | u_n = T_n u^n, n = 1, 2, \dots\}$$

$$\{F_n(u_n) \in L_2(I) | n = 1, 2, \dots\}$$

これらの関数列に対して、つきが成立する。

補題 3 関数列 $\{u_n\}$, $\{F_n(u_n)\}$ はいずれも L_2 ノルム有界である。

証明 $\{u_n\}$ の有界性は、各 u_n が

$$\|u_n\| \leq \|\Phi_n(u^n)\| + \|h\|$$

と評価されることから、補題 2 と仮定 (A3) から明らか。

一方、 $\{F_n(u_n)\}$ についても (3.4) 式より $F_n(u_n)$ が

$$\|F_n(u_n)\|^2 \leq 2 \max_{(x, z)} |f(x, z)|^2$$

$$((x, z) \in I \times [-B, B])$$

と評価されることから、その有界性は明らかである。□

列 $\{F_n(u_n)\}$ に対して、Banach-Steinhaus の定理¹⁷⁾を適用する。そのとき、弱収束部分列 $\{F_m(u_m)\} \subset \{F_n(u_n)\}$ とその極限 $\hat{F} \in L_2(I)$ の存在がいえる。すなわち、任意の $v \in L_2(I)$ に対し

$$\int_{-1}^1 v(x) (F_m(u_m)(x) - \hat{F}(x)) dx \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty) \quad (4.1)$$

が成立する。いま、この \hat{F} を用いて関数 $\hat{u} \in L_2(I)$ を

$$\hat{u}(x) = \int_{-1}^1 K(x, s) \hat{F}(s) ds \quad (4.2)$$

と定義し、さらに $\{F_m(u_m)\}$ と対応する $\{u_m\}$ の部分列を $\{u_m\}$ とする。そのとき $\hat{u}(x)$ に対して、つきが成立する。

定理 2 (i) $\hat{u} \in R(I)$

(ii) 部分列 $\{u_m\}$ は \hat{u} に L_2 収束する。

証明 (i) については Schwarz 不等式により評価

$$\|\hat{u}\| \leq \|K\| \|\hat{F}\|$$

が得られるので明らかである。(ii) について：

$$\|\hat{u} - u_m\| = \left\| \int_{-1}^1 (K(\cdot, s) \hat{F}(s) - K_m(\cdot, s) F_m(u_m)(s)) ds \right\|$$

$$- K_m(\cdot, s) F_m(u_m)(s) ds \right\|$$

の被積分関数の部分を

$$K(x, s) \hat{F}(s) - K_m(x, s) F_m(u_m)(s) = K(x, s) (\hat{F}(s)$$

$$- F_m(u_m)(s)) + (K(x, s) - K_m(x, s)) F_m(u_m)(s)$$

と変形し、三角不等式と Schwarz 不等式を適用すれば

$$\|\hat{u} - u_m\| \leq J_m + \|K - K_m\| \|F_m(u_m)\| \quad (4.3)$$

の評価が得られる。ここで

$$J_m^2 = \int_{-1}^1 \left\{ \int_{-1}^1 K(x, s) (\hat{F}(s) - F_m(u_m)(s)) ds \right\}^2 dx$$

このとき、(4.3) 式の右辺第 2 項は補題 1 により、 $m \rightarrow \infty$ のときゼロに収束するので、 J_m のゼロへの収束を示せば十分である。いま $\{F_m(u_m)\}$ は \hat{F} への弱収束部分列であることから、任意の $\epsilon > 0$ に対して、各点 $x \in I$ で適当な整数 $M(x) > 0$ が存在して、 $m \geq M(x)$ に対し

$$\left| \int_{-1}^1 K(x, s) (\hat{F}(s) - F_m(u_m)(s)) ds \right| \leq \epsilon$$

が成立する。したがって、 $M = \sup_{x \in I} M(x)$ とすれば、任意の $m \geq M$ に対して、 $J_m \leq \sqrt{2\epsilon}$ が成立する。□

さらに $\hat{u}(x)$ に対して、つきの定理が成り立つ。

定理 3 $\hat{u}(x)$ は I 上のほとんど到る所で T に対する不動点方程式を満足する。すなわち

$$\|\hat{u} - T(\hat{u})\| = 0. \quad \square \quad (4.4)$$

この定理を証明するために 1 つの補題を用意する。

補題 4 $\{u_m(x) \in R(I)\}$ を $\hat{u} \in R(I)$ に L_2 収束する部分列とすれば

$$\gamma_m = \|F_m(u_m) - F(\hat{u})\| \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

が成立する。

証明 三角不等式により

$$\begin{aligned} \gamma_m &\leq \|F_m(u_m) - F_m(\hat{u})\| + \|F_m(\hat{u}) - F(\hat{u})\| \\ &\quad + \|F(\hat{u}) - F(u_m)\| \end{aligned}$$

の評価を得る。このとき、第 2 項は Erdős-Turán の定理によりゼロを収束する。第 3 項は仮定 (A2) を用

いて評価を進めると

$$\|F(\hat{u}) - F(u_m)\| \leq \|g\| \cdot \|\hat{u} - u_m\|$$

が得られ、補題の仮定により収束性が保証される。したがって、残る第1項の収束性を示せばよい。第1項のノルムを(2.12)式の関係を用いて計算し、さらに、 $f(x, z)$ に対する仮定(A2)を用いると

$$\|F_m(u_m) - F_m(\hat{u})\| \leq \|g\| \cdot \|u_m - \hat{u}\|_w$$

の評価を得る。ここで

$$\|\hat{u} - u_m\|_w^2 = \sum_{i=1}^m W_i (\hat{u}(x_i) - u_m(x_i))^2$$

このとき、 $\|\hat{u} - u_m\|_w$ に対し

$$\begin{aligned} \|\hat{u} - u_m\|_w &\leq \|\hat{u} - u_k\|_w + \|u_k - u_m\| \\ &\leq \|\hat{u} - u_k\|_w + \|u_k - \hat{u}\| + \|\hat{u} - u_m\| \end{aligned}$$

が任意の $u_k \in \{u_m\}$ ($m \geq k$) に対して成立する。したがって、(2.10)式と定理2とにより

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\hat{u} - u_m\|_w \leq 2 \|\hat{u} - u_k\|_w$$

がいえ、ふたたび定理2により、 $k \rightarrow \infty$ とすれば、右辺はゼロに収束する。□

定理3の証明 $\|\hat{u} - T(\hat{u})\| \leq \|\hat{u} - u_m\| + \|u_m - T(u_m)\| + \|T(u_m) - T(\hat{u})\|$ と評価できる。このとき、 $m \rightarrow \infty$ とすれば、右辺の第1項は定理2によりゼロに収束するので、結局

- (i) $\|T(u_m) - T(\hat{u})\| \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$)
- (ii) $\|u_m - T(u_m)\| \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$)

が成立することを示せば十分である。

(i)について：Schwarz 不等式を適用して

$$\|T(u_m) - T(\hat{u})\| \leq \|K\| \|F(u_m) - F(\hat{u})\|$$

の評価を得る。仮定により $\|K\| < \infty$ である。一方、第2項は $f(x, z)$ に対する仮定(A2)を用いて

$$\|F(u_m) - F(\hat{u})\| \leq \|g\| \cdot \|u_m - \hat{u}\| \quad (4.5)$$

と評価され、定理2により収束性が保証される。

(ii)について：三角不等式を用いて

$$\|u_m - T(\hat{u})\| \leq \|I_m\| + \|J_m\|$$

の評価を得る。ここで、

$$I_m(x) = \int_{-1}^1 (K_m(x, s) - K(x, s)) F_m(u_m)(s) ds \quad (4.6)$$

$$J_m(x) = \int_{-1}^1 K(x, s) (F_m(u_m)(s) - F(u_m)(s)) ds \quad (4.7)$$

このとき、 $\|I_m\|$ は Schwarz 不等式により

$$\|I_m\| \leq \|K_m - K\| \|F_m(u_m)\|$$

と評価され、補題1により $\|K_m - K\| \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$) が保証される。 $\|J_m\|$ の収束性については、Schwarz 不等式

式を用いて

$$\|J_m\| \leq \|K\| \|F_m(u_m) - F(u_m)\|$$

の評価が得られることから補題4により収束する。□

これまで、 $K(x, s), h(x)$ は単に Riemann 可積分関数であるとしてきたが、さらに K, h に連続性の仮定を加えると、(4.2)式で定義された $\hat{u}(x)$ に対してつぎが成立する。

定理4 K, h が連続であれば、弱収束するような部分列 $\{F_m(u_m)\}$ に対応する部分列 $\{u_m\} \subset \{u_n\}$ と式(4.2)の \hat{u} とに対して、つぎが成立する。

- (i) $\hat{u}(x)$ は I 上で連続である。
- (ii) \hat{u} は I 上の到る所で T に対する不動点方程式を満足する：すなわち

$$\|\hat{u} - T(\hat{u})\|_w = 0. \quad (4.8)$$

(iii) $\hat{u}_m = T(u_m)$ とすれば、列 $\{\hat{u}_m\}$ は I 上で \hat{u} に一様収束する。

証明 (i)について：任意の $x, y \in I$ ($|x - y| \leq \delta$) に対して

$$\begin{aligned} |\hat{u}(x) - \hat{u}(y)| &= \left| \int_{-1}^1 (K(x, s) - K(y, s)) \hat{F}(s) ds \right| \\ &\leq 2\omega(\delta) \|\hat{F}\| \end{aligned}$$

が成立する。ここで、 ω は $K(x, s)$ の連続率である：

$$\omega(\delta) = \max_{-1 \leq x, y, s \leq 1} |K(x, s) - K(y, s)|$$

ゆえに、連続である。

(ii)について：任意の $x \in I$ に対して

$$(a) |T(u_m)(x) - T(\hat{u})(x)| \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

$$(b) |\hat{u}(x) - T(u_m)(x)| \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

の成立を示せば十分である。

(a)については、

$$|T(u_m)(x) - T(\hat{u})(x)| \leq C_1 \|g\| \cdot \|u_m - \hat{u}\|$$

の評価が Schwarz 不等式と仮定(A2)を用いて得られる。したがって定理2により収束性が保証される。

ここで

$$C_1 = \max_{x \in I} \|K(x, \cdot)\| < \infty$$

また(b)については、評価

$$|\hat{u}(x) - T(u_m)(x)| \leq I_m + J_m \quad (4.9)$$

を用いて示すことができる。ここで

$$I_m = \left| \int_{-1}^1 K(x, s) (\hat{F}(s) - F_m(u_m)(s)) ds \right| \quad (4.10)$$

$$J_m = \left| \int_{-1}^1 K(x, s) (F_m(u_m)(s) - F(u_m)(s)) ds \right| \quad (4.11)$$

まず、 $\{F_m(u_m)\}$ の弱収束性の仮定により I_m の収束性は保証される。一方、 J_m の収束性は Schwarz 不等式

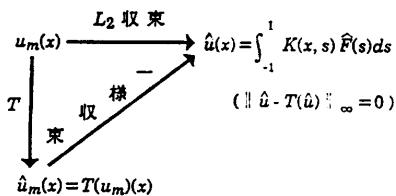


図 2 $K(x, s)$, $h(x)$ が連続なときの近似解列 $\{u_m\}$, $\{\hat{u}_m\}$ の \hat{u} への収束関係 (T は積分作用素)

Fig. 2 Convergences of $\{u_m\}$ and $\{\hat{u}_m\}$ to \hat{u} when $K(x, s)$ and $h(x)$ are continuous, where T is an integral operator.

の適用によって得られる評価

$$J_m \leq C_1 \|F_m(u_m) - F(u_m)\|$$

のもとで、補題 4 により保証される。

(iii) については、 $\hat{u}(x) - \hat{u}_m(x) = \hat{u}(x) - T(u_m)(x)$ であることから、(4.9)-(4.11)式により

$$\max_{x \in I} |\hat{u}(x) - \hat{u}_m(x)| \leq I_m + J_m \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

は明らかである。□

$K(x, s)$, $h(x)$ の連続性を仮定した場合の近似解の列 $\{u_m\}$, $\{\hat{u}_m\}$ とその極限 \hat{u} との間の関係を図 2 に示す。

5. 誤差評価

ここでは、不動点方程式(2.5)に近似解 u_n を代入したときに生ずる残差

$$r_n(u_n)(x) = u_n(x) - \int_{-1}^1 K(x, s) f(s, u_n(s)) ds - h(x) \quad (5.1)$$

と近似解の誤差

$$e_n(x) = u_n(x) - u(x), \quad (u = Tu) \quad (5.2)$$

を評価する。これは厳密解の連続性を仮定して行う。さらに、 K , f , h の十分な滑らかさを仮定して、より精密な評価も与える。

5.1 残差の評価

$U(x) = u_n(x)$, $U_i = U(x_i)$, $f_i = f(x_i, U_i)$ とおく。 $K(x, s)$ と $f(x, U(x))$ に対する補間誤差をそれぞれ

$$\begin{aligned} R_n(K)(x, s) &= K(x, s) - K_n(x, s) \\ R_n(F(U))(x) &= f(x, U(x)) - F_n(U)(x) \end{aligned} \quad (5.3)$$

とする。そのとき、これらの関係と(5.1)式から

$$r_n(U)(x) = -V_n(x) \quad (5.4)$$

を得る。ここで、 $V_n(x) = A_n(x) + B_n(x) + C_n(x)$,

$$A_n(x) = \int_{-1}^1 K_n(x, s) R_n(F(U))(s) ds$$

$$B_n(x) = \int_{-1}^1 R_n(K)(x, s) F_n(U)(s) ds$$

$$C_n(x) = \int_{-1}^1 R_n(F(U)) R_n(K)(x, s) ds$$

したがって、 $\|r_n(U)\| = \|V_n(x)\|$ 。 $V_n(x)$ の評価のために、 A_n , B_n , C_n を個別に評価する。これは Schwarz 不等式を用いて簡単にでき、下記のようになる。

$$\|A_n\| \leq 2 \|R_n(F(U))\| \|K\| \quad (5.5)$$

$$\|B_n\| \leq \sqrt{2} \|R_n(K)\| \|F(U)\| \quad (5.6)$$

$$\|C_n\| \leq \|R_n(F(U))\| \|R_n(K)\| \quad (5.7)$$

したがって、残差のノルムはつきのように評価される。

$$\begin{aligned} \|r_n(U)\| &\leq 2 \|R_n(F(U))\| \|K\| \\ &\quad + \sqrt{2} \|R_n(K)\| \|F(U)\| \\ &\quad + \|R_n(F(U))\| \|R_n(K)\| \end{aligned} \quad (5.8)$$

もし積分核 $K(x, s)$ や $f(x, z)$, $h(x)$ が十分滑らかな関数ならば、 $\|R_n(K)\|$ と $\|R_n(F(U))\|$ は具体的につきのように評価できる。

補題 5 $K(x, s)$, $f(x, z)$, $h(x)$ が十分滑らかであれば、 $\|R_n(K)\|$, $\|R_n(F(U))\|$ に対して、つぎが成り立つ。

- (i) $\sqrt{2} \|R_n(K)\| \leq 2 M_n \mu_n (\|D_x K\|_\infty + \|D_s K\|_\infty)$
- (ii) $\|R_n(F(U))\| \leq M_n \|F^{(n)}(U)\|_\infty$

ここで、 $M_n = 2^n n! / 2n!$, $\mu_n = (2/(2n+1))^{1/2}$ 。また、 D_x , D_s はそれぞれ x , s に関する偏微分作用素である（証明は付録B）。□

この補題により、 $K(x, s)$, $f(x, z)$, $h(x)$ が十分滑らかなとき、(5.8)式より $\|r_n(U)\|$ に対して近似的につきの評価が成立する。

$$\begin{aligned} \|r_n(U)\| &\leq 2 M_n \{ \|F^{(n)}(U)\|_\infty \|K\| \\ &\quad + \mu_n (\|D_x K\|_\infty + \|D_s K\|_\infty) \|F(U)\|_\infty \} \end{aligned} \quad (5.9)$$

一方、離散近似解に対する残差、すなわち A_n 上の残差は(5.1)式において $x = x_i \in A_n$ とおき、さらに積分を A_n 上の Legendre-Gauss 積分則とその誤差項で置き換えることにより、下記が得られる。各 $x_i \in A_n$ に対して

$$r_n(U)(x_i) = -d_n D_x^{2n} (K(x_i, \eta_i) F(U)(\eta_i)), \quad (|\eta_i| < 1). \quad (5.10)$$

ここで

$$d_n = 2^{2n+1} (n!)^4 / ((2n+1)(2n!)^3).$$

したがって、各 $x_i \in A_n$ 点上の離散近似解の残差の評価として、つぎを得る。

$$|r_n(U)(x_i)| \leq d_n \|D_x^{2n} (K(x_i, \cdot) F(U))\|_\infty \quad (5.11)$$

5.2 誤差の限界

残差の評価結果を用いて、連続近似解の誤差 $e_n(x)$ と離散近似解の誤差 $e_n(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を評価する。

定理 5 $u(s)$ を不動点問題(2.5)の連続な解とし、
 $u_n(s)$ は Δ_n 上のその連続近似解とする。さらに、 $f(x, z)$ は z に関して一階連続微分可能とし、

$$G(x, s) = K(x, s) - D_s f(s, z)|_{z=v(s)} \quad (5.12)$$

を積分核とする線形積分方程式の固有値 λ は 1 に等しくないとする。ただし、 $v(s)$ は

$$\begin{aligned} & f(s, u_n(s)) - f(s, u(s)) \\ &= D_s f(s, z)|_{z=v(s)} (u_n(s) - u(s)) \end{aligned}$$

が成立するような各 $s \in I$ で $u_n(s)$ と $u(s)$ の間の値をとる連続関数である。そのとき、近似解 $u_n(x)$ の誤差 $e_n(x)$ に対して、つぎの評価が成立する。

$$\|e_n\| \leq (1 + \|R\|) \|r_n(u_n)\| \quad (5.13)$$

ここで、 $R(x, s)$ はつぎのレゾルベント方程式を満たすような解である。

$$R(x, s) - \int_{-1}^1 G(x, t) R(t, s) dt = G(x, s) \quad (5.14)$$

$$R(x, s) - \int_{-1}^1 R(x, t) G(t, s) dt = G(x, s) \quad (5.15)$$

証明 誤差の定義式(5.2)を

$$e_n(x) = r_n(u_n)(x) + T(u_n)(x) - T(u)(x)$$

のように変形すれば

$$\begin{aligned} e_n(x) &= r_n(u_n)(x) + \int_{-1}^1 K(x, s) (F(u_n)(s) - F(u)(s)) ds \\ &= r_n(u_n)(x) + \int_{-1}^1 G(x, s) e_n(s) ds \end{aligned}$$

と整理できる。上式の作用素方程式表現を

$$(I - G)e_n = r_n(u_n) \quad (I: \text{恒等写像})$$

のように与える。仮定により、 $G(x, s)$ のレゾルベントが $R(x, s)$ であることから、 $(I - G)$ の逆作用素 L^{-1} は存在し、次式で与えられる： I 上の任意の連続関数 $v(x)$ に対して

$$L^{-1}v(x) = v(x) + \int_{-1}^1 R(x, s)v(s)ds \quad (5.16)$$

したがって

$$e_n = L^{-1}r_n(u_n) \quad (5.17)$$

が得られ、この式をもとに e_n のノルムを評価すれば、証明は終わる。実際

$$\|e_n\| \leq \|L^{-1}\| \|r_n(u_n)\|. \quad (5.18)$$

なお、 $\|L^{-1}\|$ は(5.16)式から、三角不等式と Schwarz 不等式を用いて、つぎのように評価できる。

$$\|L^{-1}v\| \leq (1 + \|R\|) \|v\|. \quad \square \quad (5.19)$$

この定理から連続近似解の誤差の限界はその残差に

比例していることがわかる。すなわち限界はほぼ $\|R_n(F(U))\|$ と $\|R_n(K)\|$ の線形和に比例している。

一方、離散近似解の各 $x_i \in \Delta_n$ 点での誤差の限界は(5.17)式から

$$|e_n(x_i)| \leq \|L^{-1}\| \sup_{1 \leq p \leq n} |r_n(U)(x_p)| \quad (5.20)$$

のように評価できる。ここで、 $\|L^{-1}\|$ は(5.16)式から評価できる。

$$\|L^{-1}\| \leq \left\{ 1 + 2 \sup_{x \in I} \int_{-1}^1 R(x, s)^2 ds \right\}. \quad (5.21)$$

したがって、評価(5.20)と残差の評価(5.11)と組み合わせることにより、つぎの評価を得る。

$$\begin{aligned} |e_n(x_i)| &\leq d_n \|L^{-1}\| \\ &\times \sup_{1 \leq p \leq n} \|D_s^{2n}(K(x_p, \cdot)F(U))\| \end{aligned} \quad (5.22)$$

最後に、連続近似解と離散近似解の精度の関係について述べる。関数 K, f, h が十分滑らかなとき、連続近似解の誤差は(5.9)式と(5.13)式とから分かるように Taylor 展開において第 n 項のオーダーである。一方、離散近似解の方は(5.22)式から第 $2n$ 項のオーダーの誤差である。この関係は、つぎの章で述べる数値計算スキームにおいて、数値解の精度判定に有用である。

6. 数値計算スキムと数値例

積分方程式(1.2)の積分核 $K(x, s)$, $f(x, z)$, $h(x)$ の滑らかさを仮定して、要求精度を満たす数値解を自動算出するための数値計算スキムを述べ、幾つかの具体例を解く。また、不連続問題に対しても本近似法の適用を試みる。

6.1 計算スキム

Δ_{n-1} 上の連続近似解 $u_{n-1}(x)$ がすでに得られていると仮定して、 Δ_n 上の連続近似解 $u_n(x)$ を計算するための手順について述べ、その後で初期手続きを述べる。

まず最初に予測子 $\hat{u}^n \in R^n$ を $u_{n-1}(x)$ から構成する；
 $\hat{u}^n = \pi_n u_{n-1}(x)$ (6.1)

によって定まる \hat{u}^n を Δ_n 上の離散近似解 $u^n \in R^n$ に対する予測子という。

つぎに予測子 \hat{u}^n を出発値として、不動点方程式
 $u^n - T_n u^n = 0$

を Newton 法で解く。このとき $V_0 = \hat{u}^n$ を出発値とする Newton 反復過程は

$$V_{k+1} = V_k + \delta_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.2)$$

で生成される。ここで

$$\delta_k = -J^{-1}(V_k)(V_k - T_n u^n(V_k)) \quad (6.3)$$

$$J(V_s) = I - K_s W_s F_s(V_s) \quad (6.4)$$

ただし

$$\begin{aligned} K_s &= (K_{ij}), \quad K_{ij} = K(x_i, x_j), \\ W_s &= \text{diag}(W_1, \dots, W_n), \\ F_s &= (f_s(x_1, v_1), \dots, f_s(x_n, v_n))^T, \\ f_s &= \partial f(x, z)/\partial z. \end{aligned}$$

Newton 反復の停止則は「収束判定パラメータ $\eta_s > 0$ に対して, δ_s が

$$\|\delta_s\| \leq \eta_s \|V_s\| \quad (6.5)$$

を満たすとき収束」とする. ここで

$$\eta_s = C_1 2^{2s+1} (n!)^4 / ((2n+1)(2n!)^2) \quad (C_1 > 0: \text{定数}) \quad (6.6)$$

上の反復停止則が満たされるとき, $u^n = V_{s+1}$ とする.

このとき A_s 上の連続近似解 $u_s(x)$ は埋め込み写像 ϕ_s を用いて

$$u_s(x) = \phi_s(u^n)(x) + h(x) \quad (6.7)$$

で与えられる. この時点で次数判定を行う. ここで, 次数判定とは A_{s+1} 上の近似解をさらに構成する必要があるか, 否かを精度的な観点から判定することである. これは予測子 \hat{u}^n と u^n とを比較してつぎのように判定する. 要求精度 $\varepsilon > 0$ に対して

$$\|\hat{u}^n - u^n\| \leq C_2 \varepsilon^{1/2} \|u^n\| \quad (C_2 > 0: \text{定数}) \quad (6.8)$$

が成立すれば, u^n は所望の精度を有するとみなし, 最終的な近似解 $u^*(x)$ を

$$u^*(x) = T(u^n)(x) \quad (6.9)$$

によって構成する. この近似解の精度は I 上の各点でほぼ u^n の精度と同じである.

一方もし, 次数判定が満たされなければ, $n = n+1$ として最初に戻り, 再び計算を繰り返せばよい.

上述のスキムにおいては, すべての計算始めとして, 最初の近似解を求める必要がある. これが初期手続きである. 初期手続きでは, $n=1$ あるいは $n=2$ のやさしい不動点方程式を適当な方法で解く. 具体的には, $n=1$ の場合には 1 变数 (u_1) の不動点方程式

$$u_1 - 2K(0, 0)f(0, u_1) - h(0) = 0$$

を, $n=2$ であれば, 2 变数 $(u_1, u_2)^T$ の不動点方程式

$$\begin{cases} u_1 - K(p, p)f(p, u_1) \\ - K(p, -p)f(-p, u_2) - h(p) = 0 \\ u_2 - K(-p, p)f(p, u_1) \\ - K(-p, -p)f(-p, u_2) - h(-p) = 0 \end{cases}$$

を適当な方法で解けばよい. ここで, $p = 1/\sqrt{3}$. なおその際必ずしも精度良く解く必要はない.

初期手続きで, 複数個の解が見つかれば, それらの

1つずつに上述した計算手続きを踏むことによって, 原理的に複数個の解が得られる. しかし, 近似次数の増加に伴い同一解に収斂することもある. これについては, 既に提案されている非線形二点境界値問題に対する数値計算スキム¹⁸⁾の特性とほぼ同じであることから, そちらを参照されたい.

停止則に関する注釈を述べる. Newton 反復の停止パラメータ η_s は, 残差の評価式 (5.11) をもとに $K(x, s)F(U)(s)$ が s に関して $2n$ 次多項式である場合を想定して定めた. また次数判定の規範の根拠はつぎのとおりである. 前章の最後に述べたように予測子に対する Newton 反復の収束値の精度の良さは (オーダ的に) 2 倍を越える. したがって, 収束値をもとに予測子の精度を見積ることができる. このとき, 収束値は控え目に見積っても予測子の (オーダ的に) 2 倍の精度を有している勘定になる.

6.2 数 値 例

下記の最初の 3 つは 6.1 節の計算スキムの有効性を, そして残りの 2 つは不連続問題における本近似解の収束性を見るための数値例である.

【数値例 1】 つぎの方程式は Amann の論文⁶⁾で扱われた数値例の問題と等価である.

$$u(x) = - \int_{-1}^1 \left(2 + (s-x) + \frac{5}{2}(x+1)(s+1) \right) \times f(s, u(s)) ds$$

ここで, $f(x, z) = (z + x + (8/5))^3/3$. この方程式の厳密解は $u(x) = -(1/2)x - (11/10)$ である. この方程式に $(-1.34, -0.784)$ を初期値, 要求精度 ε を $1.0E-15$ として上述のスキム ($C_1=1, C_2=1$) を適用した. そのとき, 次数判定のもとに $n=5$ で収斂し, 選点 A_5 上での数値解の一様ノルムは $2.22E-16$ である. なお収束するまでの各 n での Newton 法の反復数はすべて 1 回のみである.

【数値例 2】 つぎは Hochstadt の文献¹⁹⁾で解析されている 2 つの解を持つ非線形方程式と等価である.

$$u(x) = \int_{-1}^1 \sin\left(\frac{(x+1)}{2}\pi\right) u(s)^2 ds$$

この方程式の 1 つの解は $u(x) = \sin((x+1)\pi/2)$ で, 他の 1 つは自明なゼロ解である. 前者の解に対しては初期値を $u_a = (0.811, 0.811)^T$ とし, 要求精度を $\varepsilon = 1.0E-8$ として, 上述のスキム ($C_1=1, C_2=1$) を適用した. 次数判定のもとに $n=7$ で収斂した. そのときの相対誤差の一様ノルムは $8.317E-9$ であり, 所望の精度の数値解が得られた. なお収束するまでの各 n

での Newton 法の反復回数は $1(n=2)/3(n=3)/2(n=4 \sim 7)$ である。またゼロ解に対しては、初期値が $\bar{u}_0 = (c, -d)$ や $(-c, d)(c, d > 0)$ であれば直ちにゼロに収束する。

【数値例 3】 つぎは Shimasaki-Kiyono の論文⁵⁾において現れる非線形方程式である。

$$u(x) = \int_{-1}^1 \sin\left(\frac{x(s+1)}{4}\right) f(s, u(s)) ds + h(x)$$

ここで、 $f(x, z) = z^2$, $h(x) = (1/2) - (1/8)x$ とする。この方程式に要求精度 $\varepsilon = 1.0E-8$ で上述のスキム ($C_1 = 1$, $C_2 = 1$) を適用する。2つの初期値 $\bar{u}_0 = (3.41, -2.41)^T$, $\bar{u}_0 = (0.499, 0.501)^T$ に対して、次数判定のもとにいずれも $n=5$ で収束し、 Δ_5 上の数値解の誤差の一様ノルムはそれぞれ $5.284E-7$ (相対: $2.754E-8$), $6.096E-12$ (相対: $1.226E-11$) である。この評価は Δ_7 上の連続近似解 ($\varepsilon = 1.0E-16$) の結果をもとに計算した。

なお、Newton 法の反復数は収束するまでの各 n に対していずれも 1 回だけである。

【数値例 4】 つぎに不連続解をもつ積分方程式に対する本近似法の有効性を見るために、つぎで定まる非線形方程式(1.2)を解く。

$$K(x, s) = (x-s)^2, f(x, z) = z^2$$

$$h(x) = \begin{cases} a(x) + b(x) + (e^{z^2} - x)/2 & (x > 0) \\ a(x) + b(x) & (x \leq 0) \end{cases}$$

ここで、 $a(x) = -e^2(x^2 - x + (1/2))/8$, $b(x) = (5x^2 + 60x + (3/2))/120$ 。この方程式の厳密解は

$$u(x) = \begin{cases} \exp(x^2)/2 & (x > 0) \\ x/2 & (x \leq 0) \end{cases}$$

である。この方程式に対し、選点 Δ_n ($n=2, 4, \dots, 24$) 上の近似解を構成した。その近似解の誤差を表 1 に示す。誤差は L_2 ノルムと選点上の一様ノルムの両方で評価した。不連続解にしては比較的よい収束性を示している。なお誤差の L_2 ノルムは数値的に積分した。

【数値例 5】 つぎは不連続な積分核

$$K(x, s) = \begin{cases} x^3 \exp((x^2 + s^2 - 1)/2) & (x \geq 0) \\ s^3(x^2 + s^2 - 1)/2 & (x < 0) \end{cases}$$

をもつ積分方程式(1.2)を解く。ただし $f(x, z) = z^3$ とし、 $h(x)$ はつぎで与える。

$$h(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ (2+63x-9x^2)/63 & (x < 0) \end{cases}$$

そのとき、方程式の厳密解は $u(x) = x$ である。この方程式に対して、選点 Δ_n ($n=2, 3, 4, 5, 6$) 上の近似解を構成し、誤差を L_2 ノルムで評価した。そのとき、 $n=2 \sim 6$ に対する Δ_n 上の近似解の誤差ノルムは、そ

表 1 数値例 4 の数値解の誤差ノルム
Table 1 Norms for error of numerical solution in example 4.

選点の数 n	誤差 $\ e_n\ $	Δ_n 上の誤差 $\ e_n\ _\infty$
2	$3.965 E-1$	$1.389 E-1$
4	$4.447 E-3$	$4.224 E-3$
6	$2.064 E-3$	$1.900 E-3$
8	$1.203 E-3$	$1.114 E-3$
10	$7.871 E-4$	$6.714 E-4$
12	$5.550 E-4$	$4.640 E-4$
14	$4.124 E-4$	$3.924 E-4$
16	$3.184 E-4$	$2.600 E-4$
18	$2.532 E-4$	$2.385 E-4$
20	$2.062 E-4$	$1.962 E-4$
22	$1.712 E-4$	$1.624 E-4$
24	$1.446 E-4$	$1.374 E-4$

れぞれ、 $1.876E-2$, $1.912E-2$, $7.103E-3$, $5.162E-13$, $5.671E-17$ である。特に、 Δ_6 上の誤差は計算に用いた重み係数の精度とほぼ同じである。

上述のすべての数値計算は FACOM-9450 II (BASIC, 2 倍精度演算) により実施した。

7. おわりに

本論文では Riemann 可積分関数空間上で Hammerstein 方程式と等価な積分作用素 T の不動点問題選点法の立場から数値的に解く方法について考察した。すなわち、 T の不動点を近似するために、補間と射影を用いて、有限次元多項式空間と Euclid 空間のそれぞれに (T の近似を与えるような) 作用素を構成し、その 2 つの (近似) 作用素の不動点が等価であることを最初に示した (定理 1)。さらにそのもとで、多項式空間上の近似作用素の不動点を連続的な近似解とし、Euclid 空間上の近似作用素の不動点を離散的な近似解とした。特に、近似特性の議論には前者そして具体的な数値処理の議論には後者を用い、両者の使い分けを図った。近似解の収束特性としては、 L_2 収束を定理 2 と定理 3、また一様収束を定理 4 で示した。

誤差評価に関して、まず Riemann 可積分関数空間上で近似解の残差の評価を行い ((5.8)式)、つぎに連続条件を仮定して近似解の誤差評価を定理 5 で与えた。さらに十分な滑らかさを仮定し、誤差限界の詳細な評価を同じ第 5 章で与えた後、つづく章において実際的な数値計算スキムを与えた。このスキムの有効性を示すために複数個の解を持つような場合を含む二三の非線形方程式を具体的に解いた。また不連続問題に

に対する近似解の収束性を検証するための数値例も与えた。

本論文では、議論の展開の簡易化のために、選点 Δ_n は Legendre-Gauss 積分則の分点に限定してきた。しかし Riemann 可積分関数に対する補間式の (L_2 ノルムの位相で) 収束が保証されるような選点であれば、本論文の大筋はわずかな修正によりそのまま通用する。これに関連して、 $w(x) = (1-x)^p(1+x)^q$ ($p > -1$, $q > -1$) を重み関数とする Jacobi 直交多項式系 $P_n(x; p, q)$ のゼロ点からなる選点 Δ_n 上の Lagrange 補間は $[-1, 1]$ 上の任意の Riemann 可積分関数 $f(x)$ に対して、 $w(x)$ を重みとする L_2 ノルムの位相で収束することが保証されていることを指摘しておく¹³⁾。

最後に、残された課題は Euclid 空間上の近似作用素 T_n^{α} ($n \geq 1$) の不動点の存在条件に関する究明であるが、これについては Newton 法に依拠する存在定理の応用^{20)~22)} により、ある程度明らかにできるものと考えられる。

謝辞 本研究に際して、何かと議論していただいた当研究所の小藤俊幸氏に感謝する。

参考文献

- 1) Nyström, F. J.: Über die provotische Auflösung von Integralgleichungen mit Anwendungen auf Randwertaufgaben, *Acta Math.*, Vol. 54, pp. 185-204 (1930).
- 2) Anselone, P. M.: *Collectively Compact Operator Approximation Theory and Applications to Integral Equations*, Prentice-Hall Inc., 138 pp. (1971).
- 3) Sloan, I. H.: Analysis of General Quadrature Methods for Integral Equations of the Second Kind, *Numer. Math.*, Vol. 38, pp. 263-278 (1981).
- 4) Ikebe, Y.: The Galerkin Method for the Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the Second Kind, *SIAM Rev.*, Vol. 14, No. 3, pp. 465-491 (1972).
- 5) Shimasaki, M. and Kiyono, T.: Numerical Solution of Integral Equations in Chebyshev Series, *Numer. Math.*, Vol. 21, pp. 373-380 (1973).
- 6) Amann, H.: Über die näherungsweise Lösung nichtlinearer Integralgleichungen, *Numer. Math.*, Vol. 19, pp. 29-45 (1972).
- 7) Atkinson, K.: Iterative Variants of the Nyström Method for the Numerical Solution of Integral Equations, *Numer. Math.*, Vol. 22, pp. 17-31 (1973).
- 8) Evans, G. A., Forbes, R. C. and Hyslop, J.: Solution of Non-Linear Fredholm Integral Equations by a Variational Approach, *Int. J. Comput. Math.*, Vol. 22, pp. 149-159 (1987).
- 9) Kilberth, K.: Iterative Berechnung mehrfacher Lösungen von Hammersteinschen Integralgleichungen, *Numer. Mach.*, Vol. 29, pp. 195-207 (1978).
- 10) Kumar, S. and Sloan, I. H.: A New Collocation-Type Method for Hammerstein Equations, *Math. Comp.*, Vol. 48, No. 178, pp. 585-593 (1987).
- 11) Chan, P. P.: A Monotone Operator Method for the Solution of Fredholm Integral Equations, *Numer. Math.*, Vol. 22, pp. 403-408 (1974).
- 12) Dudin, W.: *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill (1964) (邦訳: 現代解析学, 近藤, 柳原共訳, 314 pp., 共立出版 (1971)).
- 13) Erdős, P. and Turán, P.: On Interpolation I, *Ann. of Math.*, Vol. 38, pp. 142-155 (1937).
- 14) Turán, P.: On Some Open Problems of Approximation Theory, *J. Approx. Theory*, Vol. 29, pp. 23-85 (1980).
- 15) Hildebrand, F. B.: *Introduction to Numerical Analysis*, McGraw-Hill, 511 pp. (1956).
- 16) Davis, P. J. and Rabinowitz, P.: *Numerical Integration*, Blaisdell Publishing Company, 230 pp. (1967).
- 17) Cryer, C. W.: *Numerical Functional Analysis*, Oxford University Press, New York, 568 pp. (1982).
- 18) 鈴木千里: 不動点近似による非線形 2 点境界値問題の数値解法, 情報処理学会論文誌, Vol. 26, No. 5, pp. 961-971 (1985).
- 19) Hochstadt, H.: *Integral Equations*, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, Toronto, 282 pp. (1973).
- 20) Rall, L. B.: A Comparison of the Existence Theorems of Kantorovich and Moore, *SIAM J. Num. Anal.*, Vol. 17, No. 1, pp. 148-161 (1980).
- 21) Weiss, R.: On the Approximation of Fixed Points of Nonlinear Compact Operators, *SIAM J. Num. Anal.*, Vol. 11, No. 3, pp. 550-553 (1974).
- 22) 鈴木千里: M クラスの非線形 2 点境界値問題における不動点法—ニュートン法の収束性一, 情報処理学会論文誌, Vol. 28, No. 2, pp. 139-146 (1987).

付録A (補題1の証明) 変形

$$K(x, s) - K_n(x, s)$$

$$\begin{aligned}
 &= (1/2) \{(K(x, s) - L_n(K(\cdot, s))(x)) \\
 &\quad + (K(x, s) - L_n(K(x, \cdot))(s)) + (L_n(K(\cdot, s))(x) \\
 &\quad - K(x, s)) + (L_n(K(x, \cdot))(s) - K_n(x, s))\}
 \end{aligned}$$

を行ってノルムを取り、三角不等式を適用して、つきの評価を得る。

$$\begin{aligned}
 2\|K - K_n\| &\leq \left\{ \int_{-1}^1 \|K(\cdot, s) - L_n(K(\cdot, s))\|^2 ds \right\}^{1/2} \\
 &\quad + \left\{ \int_{-1}^1 \|K(x, \cdot) - L_n(K(x, \cdot))\|^2 dx \right\}^{1/2} \\
 &\quad + \left\{ \int_{-1}^1 \|L_n(K(\cdot, s)) - K_n(\cdot, s)\|^2 ds \right\}^{1/2} \\
 &\quad + \left\{ \int_{-1}^1 \|L_n(K(x, \cdot)) - K_n(x, \cdot)\|^2 dx \right\}^{1/2}
 \end{aligned}$$

この不等式の右辺をさらに評価して、各項がゼロへ収束することを示す。いま

$$I_n = \sup_{s \in I} \|K(\cdot, s) - L_n(K(\cdot, s))\| \quad (\text{A. 1})$$

$$J_n = \sup_{x \in I} \|K(x, \cdot) - L_n(K(x, \cdot))\| \quad (\text{A. 2})$$

とおけば、第3項と第4項に対して

$$\begin{aligned}
 &\int_{-1}^1 \|L_n(K(\cdot, s)) - K_n(\cdot, s)\|^2 ds \\
 &= \sum_{i=1}^n W_i \|K(x_i, \cdot) - L_n(K(x_i, \cdot))\|^2 \leq 2(I_n)^2
 \end{aligned} \quad (\text{A. 3})$$

$$\begin{aligned}
 &\int_{-1}^1 \|L_n(K(x, \cdot)) - K_n(x, \cdot)\|^2 dx \\
 &= \sum_{j=1}^n W_j \|K(\cdot, x_j) - L_n(K(\cdot, x_j))\|^2 \leq 2(J_n)^2
 \end{aligned} \quad (\text{A. 4})$$

の不等関係が得られる。したがって、(A. 1)～(A. 4)式を用いて、つきの評価が得られる。

$$\sqrt{2} \|K - K_n\| \leq 2(I_n + J_n) \quad (\text{A. 5})$$

このとき Erdős-Turán の定理の適用により、 $n \rightarrow \infty$ のとき I_n, J_n はゼロに収束する。□

付録B (補題5の証明)

(i)について、(5.3)式により、 $\|R_n(K)\| = \|K - K_n\|$ である。したがって、付録 A の不等関係(A.5)により、 I_n と J_n を具体的に評価すればよい。まず(2.8)式から、各 $s \in I$ に対して

$$K(x, s) - L_n(K(\cdot, s))(x) = M_n p_n(x) D_x^n K(\eta_s, s) \quad (|\eta_s| < 1)$$

が成立する。したがって

$$I_n \leq M_n \mu_n \sup_{(x, s) \in I \times I} |D_x^n K(x, s)|$$

を得る。ここで、 $\mu_n = (2/(2n+1))^{1/2}$ 。なお、上の評価の過程で Schwarz 不等式と Legendre 多項式 $p_n(x)$ の L_2 ノルムが μ_n となることを用いた。

同様にして

$$J_n \leq M_n \sup_{(x, s) \in I \times I} |D_x^n K(x, s)|$$

の評価が得られ、つきの評価を得る。

$$\sqrt{2} \|R_n(K)\| \leq 2M_n \mu_n \{\|D_x^n K\|_\infty + \|D_z^n K\|_\infty\}.$$

(ii)については、(2.8)式から直ちに評価できる。□

(平成元年 12 月 25 日受付)
(平成 2 年 6 月 4 日採録)

鈴木 千里 (正会員)



昭和 21 年 2 月生。昭和 46 年名古屋工業大学大学院修士課程電子工学研究科修了。工学博士。同年(株)富士通研究所に入所。人工衛星の追跡管制システムにおける軌道計算や軌道決定などの数値計算アルゴリズムの研究を経て、昭和 54 年より富士通(株)国際情報社会科学研究所に勤務。現在、非線形関数方程式によって記述される数学モデルに対する大規模数値シミュレーション理論の構築に興味をもっている。日本数学会、日本応用数理学会各会員。