

非多様体位相の隣接関係の表現と操作†

山口 泰^{††} 木村 文彦^{†††}

3次元の形状処理技術では、従来、2次元多様体に基づくソリッドモデルが中心的存在であった。しかし、多様体立体が集合演算に関して閉じていないことや基本的に1つの空間しか表現できないことなどの理由から、非多様体モデルの必要性が認識されてきた。これまでに提案された非多様体位相の表現法では、複雑になった位相要素間の隣接関係を表現するために様々な位相要素やポイントが新たに導入された。しかし、それら付加的な位相要素やポイントは比較的アドホックに与えられており、表現力の必要十分性や効率性については議論されていなかった。一方、データ操作の点では、オイラー操作の拡張法がいくつか提案されている。しかし、これらの拡張法は、基本的な位相要素の個数についての制約を与えるオイラー式に基づいており、付加的な位相要素の増減に関しては何の指標も与えなかった。本研究では、以上の点を踏まえて、非多様体モデルの計算機内表現と操作法について検討する。‘隣接位相要素’という概念によって、表現法と操作法の両方の問題を整理することに成功した。

1. はじめに

計算機上で物体のモデル化を行う際、形状情報は多くの局面で非常に重要な情報となる。この形状情報の処理技術は、形状モデルとして研究されてきた。形状モデルには様々な表現法があるが、応用範囲の広さから境界表現が広く利用されている。境界表現は形状要素の境界に注目し、形状要素の隣接関係を記述する方法である。3次元の形状要素である‘Region (立体)’の境界を2次元形状要素である‘Face (面)’によって表現し、Faceの境界を1次元形状要素の‘Edge (稜線)’で表現し、さらにEdgeの境界を0次元形状要素である‘Vertex (頂点)’によって表現する。

一般に境界表現では、形状の幾何情報と位相情報を分離し、システムのモジュラリティ向上を図る。幾何情報とは曲面・曲線の形状や点の座標などの情報であり、位相情報とは形状要素間の隣接関係の情報である。たとえば、Faceの境界を構成するEdgeの組やEdgeに連なるFaceの組などの情報が位相情報にあたる。ソリッドモデルの場合には、2次元多様体を基本としており、境界上のすべての点の近傍が平面(円盤)に位相同型となる。この結果、1本のEdgeに隣接するFaceは常に左右2枚となり、1つのVertexに隣接するEdgeは円盤の中心から放射上に広がるの

で、Vertexの周りでEdgeを順序づけることができる。このようにソリッドモデルの位相情報における順序関係としては、Face境界を構成するEdgeのサイクルとVertex周りのEdgeのサイクルの2つの順序関係が存在する。Weilerは、2つの順序関係を表現しうる位相表現として、Vertex_Edge構造、Face_Edge構造、Winged_Edge構造、Modified_Winged_Edge構造があることを示した⁴⁾。

従来、現実世界の物体は常に体積を持つことから、ソリッドモデルは必要十分な表現力を持つものと考えられていた。しかし、最近ではソリッドモデルのみでは不十分であると考えられるようになってきている。その理由として2次元多様体立体が集合演算に関して閉じていないことが挙げられる⁷⁾。たとえば正規化集合演算の結果、図1のように非多様体形状が生成される場合がある。また、ソリッドモデルでは基本的に1つのRegionしか表現できないが、複合材のように複数のRegionを表現したい場合もあるし、応用によってはワイヤフレームやサーフェスとしてモデル化した方が良い形状もある。複数Regionの表現やソリッド/ワイヤフレーム/サーフェスの融合表現を実現するものとして、近年、非多様体モデルの必要性が認識されている。

非多様体モデルの表現法には様々な提案がなされている。それぞれの立場の違いは位相情報としての隣接関係、特に順序関係をいかに表現するかという点にある。Rossignacらの提案¹⁰⁾は、順序関係を一切表現しない代わりに、対象の次元には何の制約も課さずに任意の次元で位相表現を可能にするものである。これに対して、他の研究は対象を3次元形状に限定して、位

† Representation and Operations of Adjacency Relationships for Non-manifold Topology by YASUSHI YAMAGUCHI (Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Tokyo Denki University) and FUMIHIKO KIMURA (Research Center for Advanced Science and Technology, University of Tokyo).

†† 東京電機大学工学部機械工学科

††† 東京大学先端科学技術研究センター

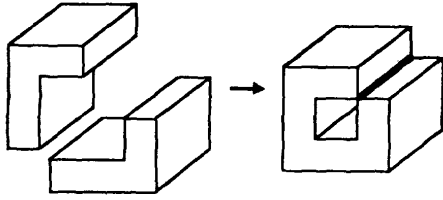


図1 正規化集合演算による非多様体形状の例
Fig. 1 A sample of non-manifold R-set geometry.

相における順序関係を表示する。たとえば、Weilerの提案した Radial-Edge 表現⁵⁾は稜線に関する隣接順序関係を表示するものであり、Gursoz の Vertex-Based 表現は頂点周りの隣接順序関係の表現を目的とするのであった¹¹⁾。これらの表現法では、ソリッドモデルの位相要素でもある、Region, Face, Edge, Vertex, Loop, Shell などに加えて、Faceuse (Wall), Loopuse, Edgeuse (Cusp), Vertexuse (Disk) などの位相要素が導入された。しかし、それら付加的な位相要素やそれらの間のポインタによる表現が、隣接順序関係の表現として必要十分なのか、あるいは効率的な表現なのかについては議論されていなかった。

一方、データ操作に関してみると、ソリッドモデルではデータ構造の完備性を保証するオイラー操作が知られている^{1), 3), 6)}。オイラー操作はオイラー式の変数の増減に対応して位相要素を生成・消去する。Wu⁸⁾や Masuda ら⁹⁾はオイラー式を非多様体位相に一般化し、非多様体モデルのオイラー操作を提案した。しかし、これらのオイラー式は基本的な位相要素 (Region, Face, Edge, Vertex, Loop, Shell) 間の制約式であり、付加的な位相要素に関する制約はない。つまり付加的な位相要素の生成・消去については何の指標も与えない。

以上の問題点を踏まえて、本研究では非多様体モデルのためのデータ構造と操作法を提案する。まず2章では、対象となる非多様体位相を定義するとともに、隣接関係を表示する位相要素について議論する。次に3章では、隣接順序関係の表現に適したポインタについて検討する。4章では非多様体モデルのためのデータ操作法について述べる。

2. 非多様体モデルの位相要素

非多様体モデルでは前に述べた様々な問題が依然として未解決である。ここでは、まず非多様体モデルの対象を明確にする。さらに位相要素間の関係を中心に、非多様体モデルの位相要素について考察する。

2.1 基本位相要素

本研究では、3次元ユークリッド空間を分割し、各部分空間(点集合)とその関係を表示する手段として非多様体モデルを位置づける。従来のソリッドモデルでは、基本的な位相要素として、Vertex, Edge, Face, Region などが用いられてきた。Vertex はユークリッド空間における0次元の点であり、Edge, Face, Region はそれぞれ1次元、2次元、3次元の点集合である。この n 次元点集合の概念は応用の観点から非常に有用で、これらを基本的な位相要素とするのが適当である。

この考え方に対応する位相幾何学の概念として‘胞体分割’がある²⁾。 n 胞体とは n 次元球の内部に位相同型な点集合であり、空間の胞体分割によって元の空間の点は必ずいずれか1つの胞体に属する。

ここではまず、非多様体モデルを3次元ユークリッド空間の胞体分割と胞体間の隣接順序関係を表示するものとする。したがって、各次元の胞体を非多様体モデルの‘基本位相要素’とする。

Vertex : 0 胞体
Edge : 1 胞体
Face : 2 胞体
Region : 3 胞体

図2に各基本位相要素を示す。

実際の応用を考えると通常の胞体分割の定義では、制限が厳しすぎる面がある。例えば、内部ループを持つような Face は対象外となる。これらの点に関しては2.3節ならびに3.4節で議論する。

2.2 隣接位相要素(1)

次に基本位相要素間の関係を考える。3次元の非多様体形状の場合、胞体間に図3のように‘Loop サイクル’、‘Radial サイクル’、‘Disk サイクル’の3種類の隣接順序関係がある¹¹⁾。Loop サイクルは Face の境界である Loop 周りでの Edge と Vertex のサイクル

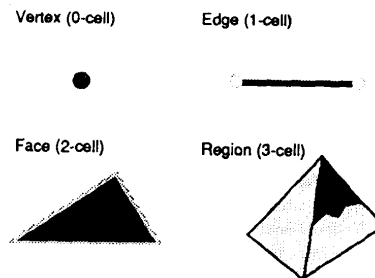


図2 基本位相要素
Fig. 2 Primitive entity.

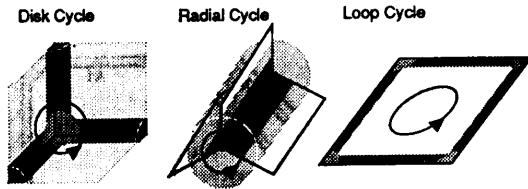


図 3 3種類のサイクル
Fig. 3 Three types of cycles.

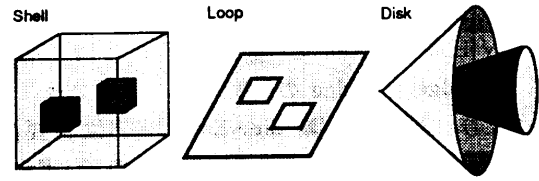


図 5 境界位相要素
Fig. 5 Bounding entity.

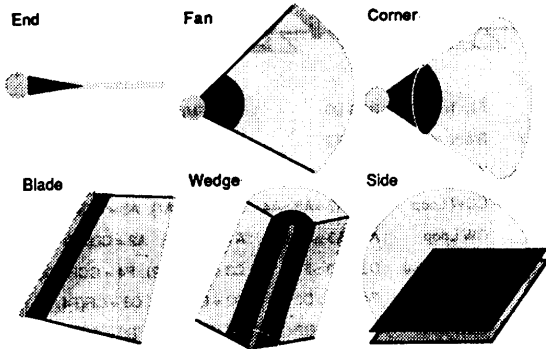


図 4 隣接位相要素
Fig. 4 Adjacent entity.

であり, Radial サイクルは Edge 周りの Face と Region, Disk サイクルは Vertex 周りの Edge と Face のサイクルである. 本研究では, これら3つのサイクルを表現するものとする. 3つのサイクルの並列な表現は, Weiler の位相充足性⁴⁾の観点からは冗長に思える(証明はされていない)が, 隣接関係を辿る操作の実現を考えた場合には3つのサイクルがあることが望ましい.

このサイクルの表現で問題となるのは, 1つのサイクルに同一の位相要素が複数回現れうることである. 図1の太線で示した Edge 周りの Radial サイクルでは, 2つの Region が2回ずつ現れる. つまり, 同じ基本位相要素同士であっても, 複数の隣接関係が存在しうる. 隣接順序の関係を正確に表現するためには, これらの隣接関係が区別できなくてはならない.

そこで基本位相要素間の隣接関係を表現する '隣接位相要素' を導入し, 各サイクルを隣接位相要素のサイクルとして表現する. 隣接位相要素は隣接する基本位相要素の種類ごとに定義する. 同一次元の胞体, つまり同じ種類の基本位相要素は隣接しないから, 図4の6種類の隣接位相要素が定義される.

- End : Vertex と Edge の隣接関係
- Fan : Vertex と Face の隣接関係
- Corner : Vertex と Region の隣接関係

- Blade : Edge と Face の隣接関係
- Wedge : Edge と Region の隣接関係
- Side : Face と Region の隣接関係

Loop サイクルは Fan と Blade のサイクル, Radial サイクルは Blade と Wedge のサイクル, Disk サイクルは Fan と Wedge のサイクルとして表現される. 図3は隣接位相要素によるサイクルの表現を示している. 図1の場合には, 太線の Edge の周りに2つの Region と4つの Face が隣接しているが, 隣接関係はそれぞれ4つの Wedge と Blade によって表現される.

2.3 境界位相要素

通常, 胞体は球に位相同型なものとして定義される. しかし, 現実の対象を考えると, 図5のように Face や Region が複数の不連続な境界を持つ場合がある. また隣接位相要素の Corner も複数の境界から構成されると考える方が便利である. そこで, 不連続な境界を表現するものとして, 次の3種類の '境界位相要素' を導入する.

- Loop : Fan と Blade からなる Face の境界
- Shell : Corner, Wedge, Side からなる Region の境界
- Disk : Fan と Wedge からなる Corner の境界

2.4 隣接位相要素(2)

前に隣接関係の表現として6種類の隣接位相要素を導入した. ここでは隣接関係の制約をもとに, 隣接位相要素について再度検討する.

Face と Region の隣接関係を示す Side は1枚の Face に関して2つ存在する. しかもこの関係は Face ごとに独立であるから, 次の恒等式が導ける.

$$N\{Side\} = 2 N\{Face\} \tag{1}$$

$N\{Side\}$: Side の個数

$N\{Face\}$: Face の個数

Edge に関しても1本の Edge に2つの End が存在するから, 以下の恒等式が得られる.

$$N\{\text{End}\} = 2 N\{\text{Edge}\} \quad (2)$$

$N\{\text{End}\}$: End の個数

$N\{\text{Edge}\}$: Edge の個数

つまり、隣接位相要素 Side/End は基本位相要素 Face/Edge に関して2つずつ存在するので、Face/Edge のデータ構造の一部に含めることができる。隣接位相要素の Side と End を陽に持つか否かは、応用側が Side/End の表現を必要とするか否かに依存する。

次に Loop サイクルに注目する。図3に示したように、Loop サイクルは隣接位相要素の Blade と Fan によって表現される。Loop サイクル上では、Blade と Fan が交互に現れるので、各 Face に関して Blade と Fan の個数は等しくなる。すべての Blade と Fan はいずれかの Face に属するので、非多様体モデル全体で考えても Blade と Fan の個数は等しくなる。つまり次式が成り立つ。

$$N\{\text{Blade}\} = N\{\text{Fan}\} \quad (3)$$

$N\{\text{Blade}\}$: Blade の個数

$N\{\text{Fan}\}$: Fan の個数

今度は Radial サイクルについて考える。Radial サイクルを辿ると、Wedge と Blade が交互に現れる。つまり、1本の Edge に関して Wedge と Blade の個数は等しくなる。すべての Wedge と Blade はいずれかの Edge に属するので、非多様体モデル全体でも Wedge と Blade の個数は等しくなり、次式が得られる。

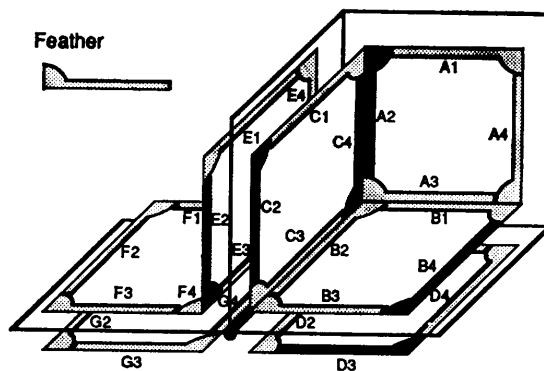
$$N\{\text{Wedge}\} = N\{\text{Blade}\} \quad (4)$$

$N\{\text{Wedge}\}$: Wedge の個数

$N\{\text{Blade}\}$: Blade の個数

(3)式と(4)式は、Fan, Blade, Wedge の数が常に等しく、これらの間になんらかの対応関係があることを示唆している。つまり、Fan, Blade, Wedge を1組にして表現できることを示している。

最後に Disk サイクルについて考える。Disk サイクルは、Fan の片面と Wedge の一端のサイクルとみなせる。したがって、すべての Disk サイクルを辿ると、Fan は裏と表、Wedge はその両端が2回ずつ数えられる。つまり、Fan, Wedge とともに2つの Disk サイクルに属している。これはソリッドモデル(多様体立体)における1本の Edge と左右の Loop の関係に対応する。Half-Edge 構造は、Half-Edge によって Edge を二重化することで、左右の Loop サイクルを自然に表現する。Half-Edge 構造と同じように、



Fan Mate	: B4 & D3	: D3 = FM(B4), B4 = FM(D3)
Blade Mate	: C2 & E2	: E2 = BM(C2), C2 = BM(E2)
Wedge Mate	: A2 & C4	: C4 = WM(A2), A2 = WM(C4)
CCW Loop	: A1->A2->A3->A4	: A2 = CCL(A1), A3 = CCL(A2)
CW Loop	: A4->A3->A2->A1	: A1 = CL(A2), A2 = CL(A3)
CCW Radial	: D2->C3->F4	: C3 = CCR(D2), F4 = CCR(C3)
CW Radial	: F4->C3->D2	: D2 = CR(C3), C3 = CR(F4)
CCW Disk	: A3->C4->B2	: C4 = CCD(A3), B2 = CCD(C4)
CW Disk	: B2->C4->A3	: A3 = CD(C4), C4 = CD(B2)

図6 Feather とその関係表現

Fig. 6 Feathers and their relations.

Fan, Wedge を二重化することで Disk サイクルの自然な表現が図れるはずである。

以上の考察から、隣接関係を表現する新たな隣接位相要素 'Feather' を定義する。

Feather : Fan の片面, Wedge の一端, Blade の片面に対応する隣接位相要素

つまり Feather 2つの組によって、1つの Fan, Blade, Wedge を表現する。これを示したものが図6である。Fan, Blade, Wedge は、Feather の組によって間接的に表現できるが、隣接位相要素として陽に持つか否かは、応用が直接的な表現を必要とするか否かに依存する。

図6を見てわかるように、Feather は従来の研究で提案された付加的な位相要素に類似している。つまり、Weiler の提案した Radial-Edge 表現における Edgeuse, Gursoz の提案した Vertex-Based 表現における Cusp に、それぞれ対応する。Weiler は Edgeuse を Edge の補助的位相要素として、Gursoz は Cusp を Vertex の補助的位相要素として位置づけていた。しかし、本研究では、Fan, Blade, Wedge という3つの隣接関係を表現するものとして位置づけられる。

隣接位相要素に関してまとめる。まず隣接する基本位相要素の種類から6種類の隣接位相要素 (End,

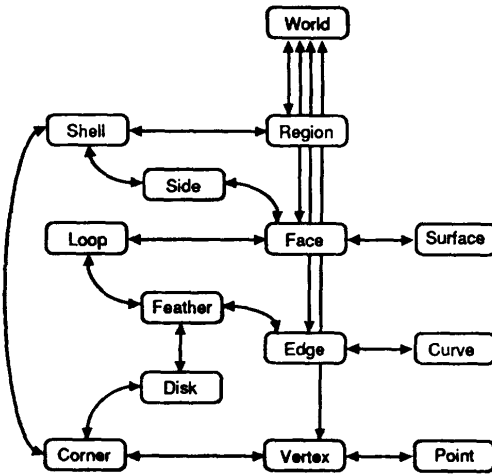


図 7 データ構造の例
Fig. 7 A sample of data structure.

Fan, Corner, Blade, Wodge, Side) を導入した。End と Edge, Side と Face が 2 対 1 の関係を持つことから、これらはそれぞれ Edge や Face に埋め込んで省略できる。また隣接位相要素 Feather によって、Fan, Blade, Wedge が表現でき、これらも省略可能である。実際にどの位相要素を属に持つかは応用に依存するが、図 7 に位相要素とそれらの関係の一例を示す。

3. 非多様体モデルのポイント

隣接位相要素によって基本位相要素間の隣接関係が表現可能となった。次に、Loop サイクル, Radial サイクル, Disk サイクルという隣接順序関係の表現を考える。隣接の順序を表現するためには、隣接位相要素を適当なポイントで結びつけばよい。そこで隣接位相要素 Feather のポイントについて検討する。

3.1 ポイントの種類

3 種類のサイクルは、隣接位相要素のサイクルとして表現される。つまり、Loop サイクルは Fan と Blade, Radial サイクルは Blade と Wedge, Disk サイクルは Fan と Wedge のサイクルとなる。したがって、Feather でこれらのサイクルを表現するためには、以下の 2 点が満たされなくてはならない。

① Fan, Blade, Wedge の表現。

② サイクル上の次の Fan, Blade, Wedge の表現。そこで、これらの関係を表現するポイントを出発点として考察を進める。

Fan, Blade, Wedge は Feather の組によって表現される。この各組の相手を指し示すポイントを 'Mate

ポイント' と呼ぶことにする。当然のことながら、Mate ポインタには以下の 3 種類がある。

FM : Fan_Mate
BM : Blade_Mate
WM : Wedge_Mate

'サイクルポイント' は、各サイクルの次の要素を示すポイントである。サイクルを回る向きが 2 通りあるので、以下の 6 種類がある。

CCL : Counter_Clockwise_Loop
CL : Clockwise_Loop
CCR : Counter_Clockwise_Radial
CR : Clockwise_Radial
CCD : Counter_Clockwise_Disk
CD : Clockwise_Disk

このように Feather の間の基本的なポイントは 9 種類となる。図 6 には各ポイント関係の例も示している。

3.2 ポイントの関係

FM(x), BM(x), WM(x) が、それぞれ Feather 'x' の Fan_Mate, Blade_Mate, Wedge_Mate となる Feather を表し、CCL(x), CL(x), CCR(x), CR(x), CCD(x), CD(x) も同様にサイクルの各ポイントの先の Feather を表すものとする。ここで、FM(x), BM(x), WM(x) は 2 つ 1 組の相手を表すから、以下の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} x &= FM(FM(x)) \\ x &= BM(BM(x)) \\ x &= WM(WM(x)) \end{aligned} \quad (5)$$

また、CCL(x) と CL(x), CCR(x) と CR(x), CCD(x) と CD(x) は各サイクルの逆向きの関係であるから、次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} x &= CCL(CL(x)) = CL(CCL(x)) \\ x &= CCR(CR(x)) = CR(CCR(x)) \\ x &= CCD(CD(x)) = CD(CCD(x)) \end{aligned} \quad (6)$$

さらに各ポイントの間に以下の関係が存在する。

$$\begin{aligned} CCL(x) &= FM(BM(x)) \\ CCR(x) &= WM(BM(x)) \\ CCD(x) &= CCR(FM(x)) \end{aligned} \quad (7)$$

3.3 基底ポイントの選択

(6) と (7) の 6 つの式は 9 種類のポイントの間の関係を表している。したがって、独立なポイントは 3 つであり、残りの 6 つのポイントは 3 つのポイントの組合せで表現できる。この基本となる 3 つのポイントを '基底ポイント' と名付ける。

基底ポイントの選び方について考える。9つのポイントから3つの基底ポイントを選ぶ組合せは、 $84(={}^9C_3)$ 通りである。基底ポイントを選択する際の条件として、以下の3点が挙げられる。

- ①充足性：3つのポイントは独立であり、他の6つの関係を導ける。
- ②効率性：残りの6つの関係を少ないステップで表現できる。
- ③有用性：プログラミングにあたって便利である。

この3つの条件に最も適した基底ポイントは、FMとBMとWMの組である。この3つのポイントは独立であり、他の6つの関係を次のように表せる(①充足性)。

$$\begin{aligned} \text{CCL}(x) &= \text{FM}(\text{BM}(x)) && (2 \text{ ステップ}) \\ \text{CL}(x) &= \text{BM}(\text{FM}(x)) && (2 \text{ ステップ}) \\ \text{CCR}(x) &= \text{WM}(\text{BM}(x)) && (2 \text{ ステップ}) \\ \text{CR}(x) &= \text{BM}(\text{WM}(x)) && (2 \text{ ステップ}) \\ \text{CCD}(x) &= \text{WM}(\text{BM}(\text{FM}(x))) && (3 \text{ ステップ}) \\ \text{CD}(x) &= \text{FM}(\text{BM}(\text{WM}(x))) && (3 \text{ ステップ}) \end{aligned}$$

残りの6つの関係を表すステップの総数が14と最少であり(②効率性)、CCLとCLのような逆向きのサイクルポイントが対称な表現になっている(③有用性)。また後に述べる隣接操作の実現にあたって、Fan, Blade, Wedgeという表現が有用となる(③有用性)。参考までに従来の研究と比較すると、WeilerのRadial-Edge表現はBMとWMとCCLとCLの4つのポイントを用いていた。また、GursozのVertex-Based表現ではCCLとCRとCCDを基底ポイントとしていた。

3.4 データ構造の表現対象と拡張法

前に述べたように表現対象を3次元ユークリッド空間の胞体分割とすると、実際の応用を考えた場合に制限が厳しすぎる。制限を緩める手段の1つとして境界位相要素を導入した。ここでは逆に、これまでに説明したデータ構造で表現可能な位相について考察する。さらに表現対象を拡張する方法を検討する。

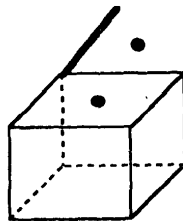


図8 懸垂 Edge と孤立 Vertex
Fig. 8 Dangling edge and isolated vertices.

位相要素と基底ポイントを決定するにあたっての前提条件は(1)~(7)式であった。これらは位相の局所的な性質であり、Regionがハンドルを持つことを妨げるものではない。このことと前に導入した境界位相要素により、Regionに関して位相的な制約はない。

次に‘懸垂 Edge’について考える。懸垂 Edgeとは、図8のようなワイヤフレーム状の Edgeで、ただ1つの Regionと隣接し、Faceとは隣接しない。この懸垂 Edgeと Regionとの隣接関係を Wedgeと考えると、Edge周りの Radial サイクルは

$$N\{\text{Wedge}\}=1, N\{\text{Blade}\}=0$$

となり(4)式を満たさなくなる。したがって懸垂 Edgeと Regionの隣接関係の表現に、Feather(Wedge)でなく、Edgeと Regionの1対1の関係を表す別の隣接位相要素を用いるべきである。

さらに図8に示した‘孤立 Vertex’についても、例外的な扱いが必要となる。Face上の孤立 Vertexは、その1つの VertexのみでFaceの境界、すなわち Loop、を成すと考えられる。この孤立 Vertexと Faceの隣接関係を Fanと考えると、Loop サイクルは

$$N\{\text{Fan}\}=1, N\{\text{Blade}\}=0$$

となり(3)式を満たさなくなる。また、Region内の孤立 Vertexは、(1)~(7)式に関しては問題ないが、次章で示す(12)式に抵触し、位相操作実現の際に問題が生じる。したがって、孤立 Vertexと Face/Regionの隣接関係は、通常の Feather/Cornerではなく、特別な隣接位相要素を用いて表現すべきである。

以上の議論をまとめると次のようになる。

- ①複数の境界(Shell)からなる Regionやハンドルを持つ Regionは表現可能である。
- ②懸垂 Edgeを扱うには、Regionとの隣接関係表現に、Featherではなく、別の位相要素を用いるべきである。
- ③孤立 Vertexを扱うには、Face/Regionとの隣接関係表現に、Feather/Cornerではなく、別の位相要素を用いるべきである。

つまり、懸垂 Edgeと孤立 Vertexを表現するためには、隣接位相要素を拡張すべきことがわかった。Weilerの提案した Radial-Edge表現でも、懸垂 Edgeや孤立 Vertexは例外的な扱いがなされていたが、なぜ例外的な扱いが必要なのかという議論は明らかではなかった。隣接位相要素の概念と隣接関係の条件式(1)~(7)、(12)によって、これら例外処理の必要性が説明できる。

4. 位相操作

非多様体モデルの表現が定まったところで、位相データの操作法について考える。まず、基本的位相要素を対象とするオイラー操作について述べ、次に隣接位相要素を主な対象とする隣接操作を提案する。その上でオイラー操作と隣接位相操作の関連について述べる。

4.1 オイラー操作

Wu や Masuda らがオイラー操作を非多様体モデルに拡張したことは前に述べた。いずれの研究においても n -胞複体の Euler-Poincare の式を基本にしている。本研究でも、この式をもとにオイラー操作を定義する。

$$\sum_{r=0}^n (-1)^r \alpha_r = \sum_{r=0}^n (-1)^r p_r \quad (8)$$

ここで α_r は r -胞体の個数、 p_r は r -ベッチ数である。

本研究の対象は3次元ユークリッド空間に存在する胞複体であるから、2-胞複体の Euler-Poincare の式、つまり、(8)式に $n=2$ を代入した式を用いる。

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = p_0 - p_1 + p_2 \quad (9)$$

α_0 は Vertex の個数、 α_1 は Edge の個数、 α_2 は Face の個数、 p_0 は連結な2-胞複体の個数、 p_1 はカットサイクルの個数、 p_2 は2-胞複体によって切り取られた空間の個数になる。カットサイクルとは2-胞複体上のサイクルで、1点に収縮できないサイクルのことである。したがって、(9)式は次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} N\{\text{Vertex}\} - N\{\text{Edge}\} + \\ (N\{\text{Face}\} - N\{\text{A. Loop}\}) = \\ N\{\text{A. Shell}\} - N\{\text{C. Cycle}\} + N\{\text{Region}\} \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、A. Loop とは、Face の2番目以降の Loop

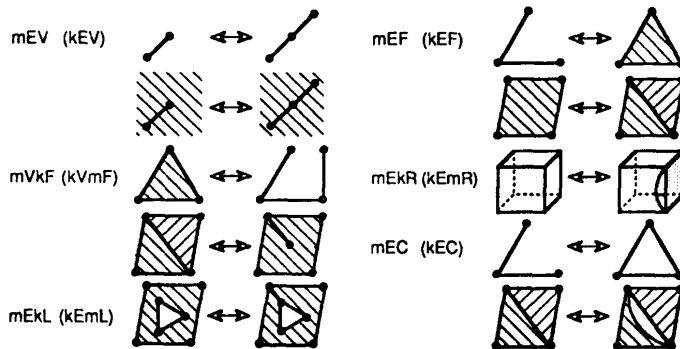


図9 オイラー操作の例
Fig. 9 Euler operations.

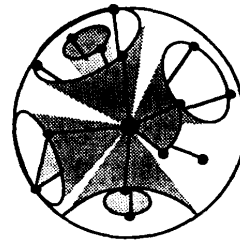


図10 Vertex 周りの隣接関係
Fig. 10 Adjacency relationship around a vertex.

のことで、 $N\{\text{A. Loop}\} = N\{\text{Loop}\} - N\{\text{Face}\}$ である。また、A. Shell も同様に Region の2番目以降の Shell を意味する。C. Cycle はカットサイクルのことである。(10)式を満たす位相操作が非多様体モデルのオイラー操作となる。オイラー操作の例を図9に示す。

4.2 隣接位相操作

オイラー操作の定義に用いた(10)式は基本位相要素と境界位相要素の Loop と Shell に関する式であり、隣接位相要素や境界位相要素の Disk には無関係である。したがって、隣接位相要素や Disk の増減に関しては、何の情報も与えない。

そこで、隣接位相要素の個数に関する制約を与える式として(1)式と(4)式に注目する。つまり、隣接位相要素 Side は Face の生成・消去にともなって2つずつ生成・消去し、Blade と Wedge は同時に1つずつ生成・消去すればよい。

残りは、End, Fan, Corner, Disk の4つであり、すべて Vertex 周りの隣接関係を表現する隣接位相要素である。そこで、Vertex 周りでの隣接関係について考える。図10のように、Vertex を中心とした微小な球を考え、球面との交差をとる。交差によって得られた表面上の頂点(交点)や稜線(交線)の個数には、次の式が成り立つ。

$$N\{\text{頂点}\} - N\{\text{稜線}\} + (N\{\text{面}\} - N\{\text{副ループ}\}) = 2 \quad (11)$$

ところで球面上の頂点は Vertex に隣接する End に対応し、稜線は Fan、面は Corner、ループは Disk に対応する。したがって(11)式は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} N\{\text{End}\} - N\{\text{Fan}\} + (N\{\text{Corner}\} \\ - N\{\text{A. Disk}\}) = 2 N\{\text{Vertex}\} \end{aligned} \quad (12)$$

(1), (4), (12)式は、隣接位相要素の個数に制約を与える。この3式を満たす

操作を‘隣接位相操作’と呼ぶ。隣接位相操作の例を図 11 に示す。

このように隣接位相操作は隣接位相要素間の制約を基本にしている。したがって、隣接位相操作の実現には、隣接位相要素の概念を反映したモデル表現が適している。つまり、FM, BM, WM の 3 つのポイントを基底ポイントとすることが有用である。

4.3 オイラー操作の実現

オイラー操作にともなって、隣接位相情報は必ず変更される。つまり、隣接位相操作はオイラー操作よりも低い水準の操作であり、これらを組み合わせることによってオイラー操作が実現できる。たとえば、図 12 はオイラー操作 ‘mEF (make_Edge_Face)’ の実現方法を示したものである。mEF は、2 つの ‘split_fan’ と ‘mbwE (make_blade_wedge_Edge)’、‘mbw (make_blade_wedge)’ ならびに ‘mssF (make_side_side_Face)’ の組合せによって実現できる。

非多様体モデルは隣接関係が複雑なため、ソリッドモデルに比べて、オイラー操作の種類が多く、個々の実現も困難である。しかし、隣接位相操作を用いることによって、オイラー操作を比較的簡単に実現することができる。

5. おわりに

本研究では、3次元非多様体の隣接順序関係に着目し、非多様体位相の計算機内表現と操作法について提案した。隣接位相要素という概念を用いることによって、以下のような結論が得られた。

- ①非多様体モデルにおける付加的な位相要素の意味を明確にした。
- ②位相要素間の隣接関係を表現する最適なポイントの組を示した。
- ③オイラー操作の対象外であった付加的な位相要素を扱う隣接位相操作を提案した。
- ④隣接位相操作に基づいたオイラー操作の簡単な実現法を示した。

謝辞 本研究の一部は精密工学会産学協同研究協議会“製品の機能や生産性の事前評価にもとづく機械生産の高精度化研究協力分科会”によるものである。

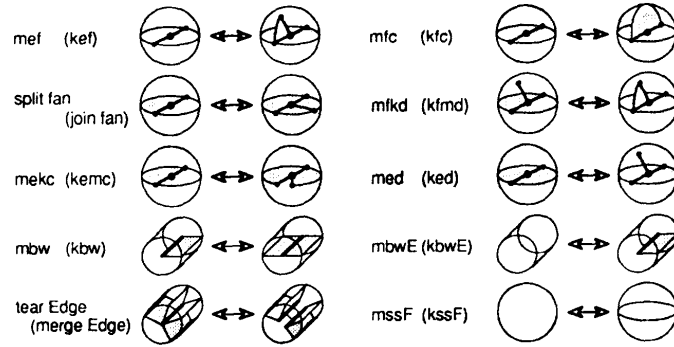


図 11 隣接位相操作の例
Fig. 11 Adjacency operations.

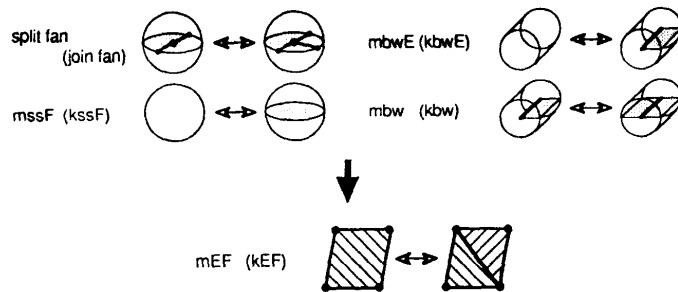


図 12 オイラー操作の実現法
Fig. 12 Implementation of an Euler operation.

参考文献

- 1) Baumgart, B.: Winged-edge Polyhedron Representation, Stanford A. I. Report No. CS-320 (1972).
- 2) 中岡 稔: 位相幾何学ホモロジー論, 共立講座現代の数学 15, 共立出版 (1976).
- 3) Braid, I. C., Hillyard, R. C. and Stroud, I. A.: Stepwise Construction of Polyhedra in Geometric Modelling, *Mathematical Method in Computer Graphics and Design*, pp. 123-141, Academic Press (1980).
- 4) Weiler, K.: Edge-Based Data Structures for Solid Modeling in Curved-Surface Environments, *IEEE CG & A*, Vol. 5, No. 1, pp. 21-40 (1985).
- 5) Weiler, K. J.: Topological Structures for Geometric Modeling, Ph. D. Thesis of Rensselaer Polytechnic Institute (1986).
- 6) Mantyla, M.: *An Introduction to Solid Modeling*, p. 401, Computer Science Press (1988).
- 7) Hoffmann, C. M.: *Geometric and Solid Modeling*, p. 338, Morgan Kaufmann Publishers, Inc. (1989).
- 8) Wu, S. T.: Towards a Unified Data Scheme for Geometrical Representations, *Computer*

Applications in Production and Engineering, Kimura, F. and Rolstadas, A. eds., pp. 259-266, North-Holland (1989).

- 9) Masuda, H., Shimada, K. Numao, M. and Kawabe, S.: A Mathematical Theory and Applications of Non-Manifold Geometric Modeling, *Advanced Geometric Modelling for Engineering Applications*, Krause, F.-L. and Jansen, H. eds., pp. 89-103, North-Holland (1990).
- 10) Rossignac, J.R. and O' Connor, M. A.: SGC: A Dimension-independent Model for Pointsets with Internal Structures and Incomplete Boundaries, *Geometric Modeling for Product Engineering*, Wozny, M. J., Turner, J. U. and Preiss, K. eds., pp. 145-180, North-Holland (1990).
- 11) GURSOZ, L., Choi, Y. and Prinz, F. B.: Vertex-based Representation of Non-manifold Boundaries, *Geometric Modeling for Product Engineering*, Wozny, M. J., Turner, J. U. and Preiss, K. eds., pp. 107-130, North-Holland (1990).



山口 泰 (正会員)

1961年生。1988年東京大学大学院博士課程(情報工学専攻)修了。工学博士。同年東京大学教養学部助手。1988年より東京電機大学工学部機械工学科講師。機械系 CAD/CAM, 形状モデリング, コンピュータ・グラフィックス, ユーザインタフェース, 知識工学などの研究に従事。精密工学会, ACM, 日本ソフトウェア科学会などの会員。



木村 文彦 (正会員)

昭和20年生。昭和49年東京大学大学院博士課程修了。同年電子技術総合研究所パターン情報部入所。昭和54年より東京大学工学部精密機械工学科助教授。昭和62年より同教授。マン・マシン・システム, コンピュータ・グラフィックス, 形状モデリング, CAD/CAM などの研究に従事。工学博士。IFIP-WG 5.2-5.2-5.3 委員。精密工学会, 日本機械学会などの各会員。