Newton-Raphson 系解法の収束の次数と反復回数の関係[†]

五十嵐 正夫[††] 永 坂 秀 子[†††]

ここではある仮定のもとに高次 Newton-Raphson 系解法の大域的振舞を定量的に考察する．そのために次のことを示す．［1］任意に収束次数を選べるプログラムを示す．［2］n 次代数方程式に k 次収束する Newton-Raphson 法を適用した場合，収束の状態に入るまでの近似解の減少率は $1-(k-1)/(n+k-2)$ となることを示す．［3］［2］の関係式を利用して局所的解法の収束次数と収束に至るまでの反復回数の間には一定の関係があることを示す．さらに［3］を数値的に確かめ，局所的解法の効率について考察を行う．

1. はじめに

代数方程式の近似解を数値的に一つずつ求める Newton-Raphson 系の反復解法を総称してここでは局所的解法と呼ぶことにする．2次収束する Newton-Raphson 法，3次収束する Halley 法，4次収束する Kiss 法等はこの解法に属する．

本論文ではある種の仮定のもとに局所的解法における収束次数と収束に至るまでの反復回数には一定の関係があることを示す．それをもとにして代数方程式の次数に適した局所的解法の収束次数について考察し，旧来の方法と比較し新たに得られた結果を示す．その目的のために次のことを示す．

［1］ 任意に収束次数を選べるプログラムを示す．

［2］ n 次代数方程式に k 次収束する局所的解法を適用した場合，収束の状態に入るまでの近似解の減少率は $1-(k-1)/(n+k-2)$ となることを示す．

［3］ ［2］の関係式を利用して局所的解法の収束次数と収束に至るまでの反復回数の間には一定の関係があることを示す．

［4］ ［3］を数値的に確かめ，局所的解法の効率について旧来の方法と比較し考察を行う．

2. 高次局所的解法

局所的解法は二つの型に分類される．一つは König 型と呼ばれる公式で Halley 法や Kiss 法等がこの型に属する．今一つは Euler 型（Schröder 型とも言われる）と言われる公式である．局所的解法の任意収束次数の公式は Euler[1]，Snyder[2]，Householder[3]，Pomentale[4]，最近では桜井，鳥居，杉浦[5] らによって導かれている．ただそのアルゴリズムを実現するとなると，例えば連立一次方程式を解いたり，Padé 展開を行ったりする必要がある．ところが最近五十嵐[6] が提案した局所的解法を再帰的に用いると 25 ステップ程度のプログラムで n 次代数方程式に対する $n+1$ 次収束までの反復公式が導かれる．ここではその方法を簡単に紹介する．

与えられた代数方程式を

$$f(z)=c_1z^n+c_2z^{n-1}+\cdots+c_nz+c_{n+1} \qquad (1)$$

とする．$f^{(k)}(z)$ は $f(z)$ の k 階の導関数を表し，z_i，$i=0,1,2,3\cdots$ は z_0 を初期値とし反復解法によって逐次得られる近似解とする．厳密解は α で表し誤差は $\varepsilon_k=\alpha-z_k$，$k=1,2,3,\cdots n$ とおくことにする．さらに式を簡単に表すために

$$u(z)\equiv\frac{f(z)}{f'(z)},\quad A_k(z)\equiv\frac{f^{(k)}(z)}{k!f'(z)} \qquad k=1,2,3\cdots \qquad (2)$$

の記号を導入し，混乱がない場合は変数 z は省略する．また例えば $z'=z-f(z)/f'(z)$ において $-f(z)/f'(z)$ の項を Newton-Raphson 法の補正項とよぶことにし，h_1 とおくことにする．すると $m+1$ 次収束する局所的解法の補正値 h_m は再帰的に次のように表せる[6]．

$$h_m=\frac{-u}{(\cdots(A_mh_1+A_{m-1})h_2+\cdots+A_2)h_{m-1}+A_1} \qquad (3)$$

このようにして非常に容易に高次収束する Newton-Raphson 系解法の König 型と呼ばれる解法が再帰的に導出される．この解法のプログラムを**表1**に示す．$C(101)$ は代数方程式の係数，N はその次数，K は収束の次数，Zold，Znew はそれぞれ旧，新の近似解を

† The Relationship between the Iteration Times and the Convergence Order for Newton-Raphson Like Methods by MASAO IGARASHI (Mathematical Laboratory, College of Agriculture and Veterinary Medicine, Nihon University) and HIDEKO NAGASAKA (Department of Mathematics, College of Science and Technology, Nihon University).

†† 日本大学農獣医学部数学研究室
††† 日本大学理工学部数学教室

表す．また $F(101)$ は関数値とその高階微分値，$A(101)$ は補助関数値で定義した $A_k(z)$ に対応し，$H(101)$ は各解法の補正値を表している．

3. 近似解の減少率

$f(z)$ は z が十分大きいとき通常 z^n で近似される．すると良く知られれているように十分大きな初期値 z_0 をとると Newton-Raphson 法と Halley 法の近似解の減少率はそれぞれ $1-1/n$ と $1-2/(n+1)$ となる[7]．このことより n 次代数方程式に k 次収束の解法をもちいた場合のその減少率は $1-(k-1)/(n+k-2)$ となることが予想される．$f(z)=z^n$ としてそのことを示す．

補題　n，m を $n \geq m+1$ を満たす自然数とする．

$$X_t = \frac{(-1)^t(n-1)(n-2)\cdots(n-t)}{(m-t)!(t+1)!(n+m-1)(n+m-2)\cdots(n+m-t)}$$

とすると $X_1+X_2+\cdots+X_m=m(1-n)/[n(m+1)!]$ となる．

証明　逆方向から加えていくと，

表 1　N 次代数方程式に対する K 次収束の Newton-Raphson 系反復解法

Table 1　K-th order Newton-Raphson like method for algebraic equations of N-th degree.

```
      SUBROUTINE LOCAL(C,N,K,Zold,Znew)
      COMPLEX*16 A(101),C(101),F(101),H(101),Zold,Znew,W
      DO 10 I=1,N+1
      F(I)=1.0D00
10    CONTINUE
      DO 20 I=2,N
      F(1)=C(I)+F(1)・Zold
      DO 25 J=2,N+2-I
      IF(J.LE.K) F(J)=F(J-1)+F(J)・Zold
25    CONTINUE
20    CONTINUE
      F(1)=C(N+1)+F(1)・Zold
      A(1)=(1.0D00,0.0D00)
      DO 30 I=2,K-1
      A(I)=F(I+1)/F(2)
30    CONTINUE
      H(1)=-F(1)/F(2)
      DO 40 I=2,K-1
      W=A(I)
      DO 50 J=2,I
      W=W・H(J-1)+A(I-J+1)
50    CONTINUE
      H(I)=H(1)/W
40    CONTINUE
      Znew=Zold+H(K-1)
      RETURN
```

$$X_m+X_{m-1}=\frac{(-1)^{m-1}(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{n(m+1)(m-1)!1!(n+m-1)(n+m-2)\cdots(n+2)},$$

$$X_m+X_{m-1}+X_{m-2}=\frac{(-1)^{m-2}(n-1)(n-2)\cdots(n-m+2)}{n(m+1)(m-2)!2!(n+m-1)(n+m-2)\cdots(n+3)},$$

$$\cdots\cdots,$$

$$\cdots\cdots,$$

$$\cdots\cdots,$$

$$X_m+X_{m-1}+\cdots+X_2=\frac{(-1)^2(n-1)(n-2)}{n(m+1)2!(m-2)!(n+m-1)}.$$

よって

$$X_m+X_{m-1}+\cdots+X_1=\frac{(-1)^2(n-1)(n-2)}{n(m+1)2!(m-2)!(n+m-1)}+\frac{(-1)^1(n-1)}{2!(m-1)!(n+m-1)}$$

$$=\frac{m(1-n)}{n(m+1)!}.$$

定理

$f(z)=z^n$ のとき，(3)式の h_m は $h_m=-mz/(n+m-1)$ と書ける．

証明　$m=1$ の時 $h_1=-z/n$ は成立する．$t \leqq m$ に対して $h_t=-tz/(n+t-1)$ が成立すると仮定する．

$$h_{t+1}=\frac{-z/n}{((\cdots(A_{t+1}h_1+A_t)h_2+A_{t-1})h_3+\cdots+A_2)h_t+A_1}$$

であるから，$A_1=1$ と帰納法の仮定および補題より↗

↘ h_{t+1}

$$=\frac{-z/n}{((\cdots(A_{t+1}h_1+A_t)h_2+A_{t-1})h_3+\cdots+A_2)h_t+1}$$

$$=\frac{-z/n}{A_{t+1}h_1h_2\cdots h_t+A_th_2h_3\cdots h_t+\cdots+A_2h_t+1}$$

$$=\frac{-z/n}{X_tt!+X_{t-1}t!+\cdots+X_2t!+X_1t!+1}$$

$$=\frac{-z/n}{\dfrac{t(1-n)}{n(t+1)!}t!+1}$$

$$=\frac{-z(t+1)}{t+n}.$$

初期値 z_0 が十分に大きいとき，n 次代数方程式に k 次局所的解法を適用したときの近似解 z_1 は前の定理より

$$z_1=z_0+h_{k-1}\approx z_0-\frac{(k-1)}{(n+k-2)}z_0$$

とできるから初期値の減少率は

$$1-\frac{(k-1)}{(n+k-2)} \qquad (4)$$

で評価できる．そのことより m 回反復した後の近似解 z_m が厳密解より遠く離れているとすれば，近似解はほぼ $[1-(k-1)/(n+k-2)]^m z_0$ で評価できる．以後われわれは近似解が厳密解から遠く離れているとは近似解と厳密解が一桁も一致していないときのことを言い，近似解が厳密解と一桁程度でも一致すれば近似解が収束の状態に入ったと言うことにする．良く知られているように近似解が十分孤立している厳密解に近づいた時，例えば2次の局所的解法の場合，近似解の精度桁数は2倍ずつ増える．そこでわれわれははじめに k，n と m を動かした場合の $V(n,k,m)=[1-(k-1)/(n+k-2)]^m$ の表を作っておくことにする．さらに当面の厳密解は十分孤立しているとする．例えば 10 進 16 桁計算で同一の初期値を与え9次の代数方程式を2次から 10 次までの解法で求めたら同一の厳密解に収束し，その反復回数がそれぞれ 34, 19, 14, 11, 10, 9, 8, 8, 7 であったとする（表2参照）．すると近似解が厳密解に近づいた後収束するまでの反復回数は2次の解法の場合は4回，3次の解法は3回，4次以上の解法2回と評価できる．よって近似解が収束の状態に入るまでの反復回数はそれぞれ 30, 16, 12, 9, 8, 7, 6, 6, 5 と評価できる．先ほどの表から対応する値を拾うと次のようになる．

$V(9,2,30)=0.029$, $V(9,3,16)=0.028$,
$V(9,4,12)=0.021$, $V(9,5,9)=0.026$,
$V(9,6,8)=0.020$, $V(9,7,7)=0.019$,
$V(9,8,6)=0.023$, $V(9,9,6)=0.015$,
$V(9,10,5)=0.023$.

これらの値がほぼ同じ程度の大きさになっていることが分かる．このことは逆に言うと2次の解法で 34 回で収束すれば，$V(n,k,m)$ の表を利用すれば3次の解法では 19 回程度で収束するとの推定ができることを意味する．参考のため $V(9,k,m)$ の近辺の値を表3に示す．

表 2 9次の代数方程式の係数と数値結果
Table 2 Coefficients and numerical results for 9-th degree algebraic equation.

$C(1)=$	$.1000000000000000D+01$	$+.0000000000000000D+00i$
$C(2)=$	$-.7984375000000000D+01$	$-.7984375000000000D+01i$
$C(3)=$	$.0000000000000000D+00$	$+.4241699218750000D+02i$
$C(4)=$	$.4809783935546875D+02$	$-.4809783935546875D+02i$
$C(5)=$	$-.5050273132324219D+02$	$+.0000000000000000D+00i$
$C(6)=$	$.1262568283081055D+02$	$+.1262568283081055D+02i$
$C(7)=$	$.0000000000000000D+00$	$-.3006114959716797D+01i$
$C(8)=$	$-.1656913757324219D+00$	$+.1656913757324219D+00i$
$C(9)=$	$.7797241210937500D-02$	$+.0000000000000000D+00i$
$C(10)=$	$-.6103515625000000D-04$	$-.6103515625000000D-04i$

初期値	$=.1114290842437885D+02$	$-.9350006150957253D+01i$
厳密解	$=.2500000000000000D+00$	$+.2500000000000000D+00i$

反復回数	収束次数	近似解		関数値
34	2	.2500000000000024D+00	+.2500000000000026D+00i	.19D-16
19	3	.2500000000000022D+00	+.2500000000000018D+00i	.10D-15
14	4	.2500000000000032D+00	+.2500000000000022D+00i	.57D-16
11	5	.2500000000000028D+00	+.2500000000000028D+00i	.76D-16
10	6	.2500000000000023D+00	+.2500000000000028D+00i	.18D-16
9	7	.2500000000000024D+00	+.2500000000000020D+00i	.54D-16
8	8	.2500000000000029D+00	+.2500000000000029D+00i	.15D-15
8	9	.2500000000000023D+00	+.2500000000000023D+00i	.11D-15
7	10	.2500000000000024D+00	+.2500000000000023D+00i	.94D-17

表 3 $V(n, k, m)$ の値
Table 3 Values of $V(n, k, m)$.

V(9,2,29)=.3285E-01	V(9,2,30)=.2920E-01	V(9,2,31)=.2596E-01
V(9,3,15)=.3518E-01	V(9,3,16)=.2815E-01	V(9,3,17)=.2252E-01
V(9,4,12)=.3011E-01	V(9,4,13)=.2190E-01	V(9,4,14)=.1592E-01
V(9,5,8)=.3902E-01	V(9,5,9)=.2601E-01	V(9,5,10)=:1734E-01
V(9,6,7)=.3342E-01	V(9,6,8)=.2057E-01	V(9,6,9)=.1266E-01
V(9,7,6)=.3482E-01	V(9,.7,7)=.1989E-01	V(9,7,8)=.1137E-01
V(9,8,5)=.4315E-01	V(9,8,6)=.2301E-01	V(9,8,7)=.1227E-01
V(9,9,5)=.3125E-01	V(9,9,6)=.1563E-01	V(9,9,7)=.7813E-02
V(9,10,4)=.4904E-01	V(9,10,5)=.2308E-01	V(9,10,6)=.1086E-01

4. 解法の効率

Pomentale[4] は改良型 Newton-Raphson 法を出発点として再帰的に高次局所解法を導き出す方法を示している．そこにおいて彼は解法の効率を計る関数として

$$E(k,\theta)=\frac{\log k}{n(k+1)(1+s)+(d-s)k-1+s} \qquad (5)$$

を導入している．ここで k は公式の収束次数，n は方

程式の次数，s，dは積の計算時間を単位としたときの和，商の計算時間を表しθはそれら変数の総称である．具体的には $E(k,\theta)$ の分母は一回の反復における総計算量である．その関数の極値を求めることにより4次の代数方程式までは3次収束の解法，それ以上は4次の解法が適しているとの結論を導き出している．

解法の効率を議論するには上記の計算手間の要因以外に反復の停止則，計算桁数，近似解の性質を考慮に入れる必要がある．話を分かりやすくするために20次の代数方程式20例に対して2次から21次までの反復公式を適用して得られた収束するまでの反復回数と所用時間およびそれらの平均を表4に示す．反復回数は収束の次数の増加とともに減少し，収束にいたるまでの所用時間は12次まで単調に減少しその後ややふらつきが見られる．所用計算時間のふらつきであるがそれは次のように解釈できる．例えば13次の解法で近似解 z_5 は1桁の精度を持ち，z_6 は13桁の精度桁を持ったとする．すると倍精度計算における精度桁限界の近似解 z_7 を得るには次の反復においては2次解法で計算すれば十分である．にも関わらず13次の解法を用いるために不必要な高階微分値を計算していることによると考えられる．

ところでこれらの結果は高次代数方程式にはそれに応じた高次解法，例えば $n/2$ 次程度の反復解法が適していることを示している．明らかに前述の Pomentale の主張，あるいは5次の代数方程式までは Newton-Raphson 法，それ以上の次数に対しては Halley 法が適しているとの Ehrmann の結果にも矛盾する(文献 8) 参照)．その原因について考えてみる．

表4　20次代数方程式20題に対する収束次数，反復回数，所用時間の比較

Table 4　Comparison between the convergence order, the iteration times and the used time for 20-algebraic equations of 20-th degree.

収束次数	総反復回数(平均)	(6)の評価回数	総所用秒(平均秒)
2	2930(147)	(143+4)	122(6)
3	1565(78)	(73+3)	74(4)
4	1017(51)	(50+2)	48(2)
5	778(39)	(38+2)	46(2)
6	640(32)	(31+2)	38(2)
7	546(27)	(26+2)	36(2)
8	485(24)	(23+2)	34(2)
9	429(21)	(20+2)	32(2)
10	398(20)	(18+2)	32(2)
11	350(18)	(17+2)	31(2)
12	332(17)	(16+2)	28(1)
13	305(15)	(14+2)	31(2)
14	297(15)	(14+1)	28(1)
15	281(14)	(13+1)	29(1)
16	271(14)	(12+1)	33(2)
17	257(13)	(12+1)	30(2)
18	239(12)	(11+1)	29(1)
19	232(12)	(11+1)	30(2)
20	223(11)	(10+1)	31(2)
21	218(11)	(10+1)	33(2)

(a) 近似解の厳密解に接近する早さは必ずしも演算回数に比例しないから(5)で解法の効率を計るには無理な点がある．例えば20次代数方程式に対して $z_0=1$ として2次の解法で(4)の評価式を適用し30回の反復を行うと $z_{30}=0.214$ となる．より高次の解法でその程度まで初期値が減少するに要する反復回数は15回（3次），10回（4次），8回（5次），6回（6次），…となるからである．

(b) 解法の効率は計算桁数にも依存するがその要因が(5)式には含まれていない．例えば3次解法は一旦収束が始まると精度桁は通常3倍ずつ増加するから収束が始まれば，演算桁数が多い時は高次解法が有利，となるがそのことが(5)式では考慮されてない．

(c) 計算の効率は収束判定にも依存するがその要因が(5)式には含まれていない．例えば2次の解法で100回で収束すれば，3次の解法ではおよそ50回の反復で収束するから単純に比較すると2次の解法では100回必要であった収束判定が3次の解法では50回に減少する．収束判定には通常関数値 $f(z_n)$ の誤差評価が必要であり，そのために要する計算手間は2次の解法の計算手間以上であるから解法の効率を考える場合この要因は無視できない．

5. おわりに

ここでは任意に収束次数を選べる局所的解法を再帰的に導くプログラムを示した．さらにn次代数方程式に k-次収束する局所的解法を適用した場合，収束の状態に入るまでの近似解の減少率は $1-(k-1)/(n+k-2)$ となることを示し，この関係式を利用して局所的解法の収束次数と収束に至るまでの反復回数の間には一定の関係があることを示した．すなわち p次解法で p' 回で収束の状態に入れば q次解法では q' 回，

$$q'=p'\frac{\log(1-(p-1)/(n+p-2))}{\log(1-(q-1)/(n+q-2))} \qquad (6)$$

で収束の状態に入る．この評価式は(5)を事前評価式とすれば事後評価式と言える．表4に2次の解法を基

表 5 2次収束から50次収束までの数値結果
Table 5 Numeical results obtained from 2-nd to 50-th order convergence methods.

収束次数	数値例	総反復回数 (平均)	総所用秒 (平均秒)
2	50	3635(73)	266(5)
3	50	1916(38)	152(3)
4	49	1323(27)	118(2)
5	46	999(22)	96(2)
6	44	806(18)	81(2)
7	42	671(16)	78(2)
8	39	579(15)	75(2)
9	37	505(14)	69(2)
10	35	443(13)	65(2)
11	34	402(12)	65(2)
12	31	366(12)	63(2)
13	30	328(11)	58(2)
14	29	302(10)	58(2)
15	28	285(10)	57(2)
16	27	258(10)	57(2)
17	25	234(9)	53(2)
18	24	214(9)	52(2)
19	23	200(9)	51(2)
20	22	185(8)	50(2)
21	20	164(8)	51(3)
22	15	129(9)	47(3)
23	15	127(8)	46(3)
24	15	120(8)	43(3)
25	14	115(8)	46(3)
26	14	108(8)	48(3)
27	13	97(7)	38(3)
28	13	98(8)	47(4)
29	13	96(7)	43(3)
30	12	82(7)	43(4)
31	12	87(7)	42(4)
32	10	70(7)	41(4)
33	10	66(7)	39(4)
34	10	67(7)	39(4)
35	10	63(6)	40(4)
36	10	65(7)	39(4)
37	9	58(6)	37(4)
38	9	55(6)	36(4)
39	9	59(7)	40(4)
40	8	47(6)	37(5)
41	8	46(6)	36(5)
42	7	50(7)	43(6)
43	7	49(7)	44(6)
44	7	53(8)	49(7)
45	7	55(8)	52(7)
46	7	57(8)	52(7)
47	6	51(9)	50(8)
48	6	52(9)	53(9)
49	6	54(9)	55(9)
50	6	53(9)	54(9)

準とした場合の(6)による評価式での収束に至るまでの反復回数を示す．すなわち，2次の解法で143回で収束の状態に入りさらに4回の反復で収束すると仮定しこれを基準とし高次の反復回数を(6)により計算してみた．この数値実験において，初期値は厳密解の外部に与えた（通常 Aberth の初期値と呼ばれる）．また例えば収束次数2のときの総反復回数 2930 回は 20 個のそのような初期値に対する収束に至るまでの反復回数の総和を表す．さらにわれわれは2次から 100 次までの方程式 50 題に対して初期値を変え，収束判定条件を変え解法の次数と計算の効率について数値実験を行った．初期値により厳密解に収束するまでの反復回数は各解法とも大きく異なるが，初期値を固定した場合，各解法間の反復回数比はほぼ一定で(6)の評価式の妥当性を示している．収束次数2次から 50 次までの数値結果を**表5**に示す．

最後にここでは $f(z)$ を z^n で近似したわけであるから，収束の状態に入るまでは重解や近接解をもつ方程式に対してもここでの結果が適用できることをつけ加えておく．なお数値例はすべて PC 98 上の MS-DOS Fortran Ver. 4.1 の倍精度計算による．

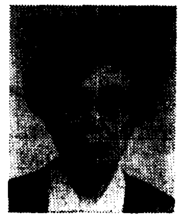
参考文献

1) Euler, L.: *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, (Kowalewski, G. ed.), pp. 422-445, Academiae Imperialis Scientiarum, St. Petersbourg (1913).
2) Snyder, R. W.: One More Correction Formula, *Amer. Math. Monthly*, Vol. 62, pp. 722-725 (1955).
3) Householder, A. S.: Polynomial Iterations to Roots of Algebraic Equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 2, pp. 718-719 (1951).
4) Pomentale, T.: A Class of Iterative Methods for Holomorphic Functions, *Numer. Math.*, Vol. 18, pp. 193-203 (1971).
5) 櫻井鉄也，鳥居達生，杉浦 洋：Padé 近似による代数方程式の反復解法，情報処理学会論文誌，Vol. 31, No. 4, pp. 517-522 (1990).
6) 五十嵐正夫：代数方程式に対する高次大域的解法と数値的非収束性，情報処理学会論文誌，Vol. 31, No. 5, pp. 677-682 (1990).
7) 山本哲朗，古金卯太郎，野倉久美：代数方程式を解く Durand-Kerner 法と Aberth 法，情報処理，Vol. 18, No. 6, pp. 566-571 (1977).
8) Collatz, L.: *Functional Analysis and Numerical Mathematics*, p. 298, Academic Press, New York (1966).

(平成3年2月14日受付)
(平成3年9月12日採録)

五十嵐正夫（正会員）

1945年生．日本大学理工学部数学科卒業．同大学院博士課程中退，現在日本大学農獣医学部助教授．理学博士．数値計算における誤差に興味，現在は代数方程式の解法にも興味をもつ．AMS, SIAM, 日本数学会，日本応用数理学会各会員．



永坂　秀子（正会員）

1922年生．1949年都立女子専門学校数学科卒業．現在日本大学理・工学部数学科教授．数値計算の誤差解析．著書「計算機と数値解析（朝倉書店）」．日本数学会，日本応用数理学会各会員．