ノイマン問題を拘束条件とする領域最適化問題における ポテンシャル法の利点と欠点[†]

藤井信夫[††] 後藤義人[†††]

本論文では，境界値問題（楕円形偏微分方程式と境界条件の組，ここではNeumann問題）の解の汎関数を評価関数とする最適化問題（領域最適化問題，非線形数理計画問題の一）において有用な役割を演じるポテンシャル表現について考察しその利点と欠点を明らかにした．最適化問題を扱う最初は必要条件を求めることであるが，そのためには常道にしたがって評価関数の変分を求めなければならない．ところが，この変分の計算に不可欠なのが境界値問題の解の（第1）変分である．従来この変分を特徴づける境界値問題の導出にはテイラー展開の方法が用いられてきた．この方法によると，解の変分について高階の導関数についての仮定を置かなければならない．境界値問題がDirichlet問題である場合にはポテンシャル表現を使ってこの仮定を避けることができる．境界値問題がNeumann問題の場合にもポテンシャル表現による方法がどこまで使えるか興味のあることである．そこで，ポテンシャル表現からNeumannデータを得るための補題を使って解の(第1)変分の従う境界値問題の導き方および1次の必要条件の導き方の概略を説明した．ポテンシャル法によれば導関数についての仮定が緩やかなものですむ．ついで，境界値問題が定義されている空間の次元が3以上の場合にこの補題を証明した．しかしながら，空間次元が2である，つまり平面の場合には対応する命題が成り立たないことを示す反例を与えた．これらのことよりポテルシャル法の有用な点と限界を明らかにすることができた．

1. まえがき

境界値問題の解の汎関数で表される評価関数を，その境界値問題の定義されている領域に関して最小（最大）にするような（非線形）数理計画問題を領域最適化問題と呼んでいる[1)~5)]．これは形状最適化問題の一種であると言ってよい．このような問題は10年くらい前[6)]から活発に研究されるようになってきた[7)~12)]が，いまだ完全に解かれているわけではない．最適化問題の研究で最初に着手されるのが必要条件の導出であろう．そのためには評価関数の第1変分，第2変分などを求めなくてはならない．領域最適化問題では，後で示すようにこれらの変分を求めるために境界値問題の解の変分がどのようなものであるかを知る必要がある．境界値問題がDirichlet問題である場合[1)~5)]には，解のポテンシャル表現[13)]を用いて解の変分の従うべき境界値問題が導かれた．いっぽう，境界値問題がNeumann問題である場合には，解の3階までの導関数に関する仮定を置いて，テイラー展開によって解の変分の従うべき境界値問題が導かれている[10),12)]．このテイラー展開による方法は直観的であるが，より高階の導関数に関する仮定を要するという点でポテンシャル表現による方法より劣っている．本論文では境界値問題がNeumann問題である場合に，その解の変分を特徴づける境界値問題をポテンシャル表現によって導出する方法を示し，その限界をも明らかにすることを目的とする．

次章では領域最適化問題を境界値問題がNeumann問題である場合について定式化し，1次の必要条件を導く概略を説明する．3章では，その際に基礎となった補題の証明と2次元空間ではその補題が成り立たないことを示す反例を与える．これらによって領域最適化問題におけるポテンシャル表現法の利点と限界が明らかとなろう．本論文では楕円形偏微分方程式(1)式とその境界条件(2)式で定義される境界値問題(Neumann問題)に話を限る．

2. 領域最適化問題と1次の必要条件

これより後$\boldsymbol{R}$を1次元ユークリッド空間とする．たとえば，$\boldsymbol{R}^3$は3次元ユークリッド空間を表す．Ωを$\boldsymbol{R}^n (n\geq 3)$における領域，$\Gamma\equiv\partial\Omega$をその十分滑らかな境界とする．$k(x)$, $f(x)$, $h(x)$, $\tau(x)$を$\boldsymbol{R}^n$で定義された十分滑らかな関数，$g(x,u)$を$\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}$で定義された十分滑らかな関数とする．次の楕円形境界値問題(Neumann問題)を考えよう．ただし，$k(x)\geq 0$, $(k(x)\neq 0)$とする．

$$\Delta u(x)-k(x)u(x)=f(x) \quad (x\in\Omega), \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x)=\tau(x) \quad (x\in\Gamma). \tag{2}$$

ここでΔはラプラシアン(Laplacian)とよばれ

† Advantages and a Defect of a Potential Method in Domain Optimization Problems with a Neumann Problem as a Constraint by NOBUO FUJII (Department of Information Systems Engineering, Faculty of Engineering, Osaka Sangyo University) and YOSHITO GOTO (Chiba Works, Kawasaki Steel Corporation).

†† 大阪産業大学工学部情報システム工学科
††† 川崎製鉄(株)千葉製鉄所

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

で定義され，$\partial/\partial n$ は法線微分（外向き）を表す．この境界値問題は一意の解を持つことが知られている[13]．

評価関数としてこの境界値問題の解 u の汎関数

$$J(\Omega\,;\,u)=\int_\Omega g(x,u)dx \qquad (3)$$

を考えよう．さらに，領域に対する制約条件として

$$\int_\Omega h(x)dx=\kappa \text{ (const.)} \qquad (4)$$

を考える．これは $h(x)=\text{const.}$ とすれば領域の(超)体積が一定であることを要請する条件となる．われわれの問題は次のとおりである．

問題　境界値問題(1)，(2)の解の汎関数(3)を(4)の制約条件のもとで最小にする領域Ωを見いだせ．

以下ではこの領域最適化問題に解Ωがあったとしよう．Ωは（また対応するuは）どのような条件を満たさねばならないであろうか．これに答えるために汎関数 $J(\Omega\,;\,u)$ の第1変分 $\delta^{(1)}J$ を求めなければならない．まずこの第1変分の定義から始めよう．境界Γ上で定義された十分滑らかな関数 $\rho(x)$，$(x\in\Gamma)$ が与えられたとする．εを十分小さな正数とし，Γ上の各点xから法線をたて，この上に線分$\varepsilon\rho(x)$をとる．このとき，$\varepsilon\rho(x)$ が正なら外向き法線上に，負なら内向き法線上にとる．これらの端点をつらねるとεが十分小さいときには滑らかな閉曲面Γ_εが得られる．このΓ_εに囲まれた領域を Ω_ε で表そう．境界値問題(1)，(2)においてΩ，ΓをそれぞれΩ_ε，Γ_εで置き換えた境界値問題の解を $u_\varepsilon(x)$ で表そう．このようにして新しく得られた領域 Ω_ε と解 u_ε に対応する評価関数は

$$J(\Omega_\varepsilon\,;\,u)=\int_{\Omega_\varepsilon} g(x,u_\varepsilon)dx \qquad (5)$$

となる．$o(\varepsilon)$ を $o(\varepsilon)/\varepsilon\to 0(\varepsilon\to 0)$ となる量を表すものとし，評価関数の第1変分 $\delta^{(1)}J$ を

$$J(\Omega_\varepsilon\,;\,u_\varepsilon)-J(\Omega\,;\,u)=\varepsilon\delta^{(1)}J+o(\varepsilon) \qquad (6)$$

で定義する．この $\delta^{(1)}J$ を計算するには

$$u_\varepsilon-u=\varepsilon\phi+o(\varepsilon) \qquad (7)$$

で定義される解uの第1変分ϕがどのようなものであるかを明らかにしなければならない．

さて，n 次元空間 $\boldsymbol{R}^n$ $(n\geq 2)$ の滑らかな境界Γを持つ有界な領域Ωの中で2回連続微分可能かつ$\Omega\cup\Gamma$上で連続な関数 $u(x)$（つまり $u\in C(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$）はいわゆるポテンシャル表現

$$\begin{aligned}u(x)=&-\int_\Gamma u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}U(x,y)d\Gamma_y\\&+\int_\Gamma \frac{\partial u(y)}{\partial n_y}U(x,y)d\Gamma_y\\&-\int_\Omega \Delta_y u(y)U(x,y)dy \quad (x\in\Omega) \qquad (8)\end{aligned}$$

が可能である[13]．ここで，添字 y は変数 y についての作用であることを示す．$U(x,y)$ はラプラシアンの基本解であり，ω_n を n 次元空間の単位球の表面積として，とくに次のように与えられたものとする：

$$U(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\log\dfrac{1}{|x-y|} & (n=2),\\[2ex] \dfrac{1}{(n-2)\omega_n|x-y|^{n-2}} & (n\geq 3).\end{cases} \qquad (9)$$

(8)式の右辺第2項の形をした量を密度 $\partial u/\partial n$ の1重層ポテンシャルと呼ぶ[13]．以後 $\alpha(x)$ を密度とする1重層ポテンシャルを $F(x)$ と書く．この $F(x)$ は全空間 $\boldsymbol{R}^n$ で連続である．また，境界 Γ を除いて調和である．つまり，

$$\Delta F(x)=0 \qquad (x\notin\Gamma) \qquad (10)$$

が成り立つ．ところが，その導関数は Γ 上で不連続である．とくに法線微分については，$(\partial F/\partial n)_+$ を Ω の外部から，$(\partial F/\delta n)_-$ を内部から $x\in\Gamma$ に近づいたときの極限を表すことにすると

$$\frac{\partial F}{\partial n_+}-\frac{\partial F}{\partial n_-}=\omega_n\alpha(x) \qquad (11)$$

が成り立つ[13]．

慣習にしたがって，$u(x)$ $(x\in\Gamma)$ を Dirichlet データ，$\partial u/\partial n(x)$，$(x\in\Gamma)$ を Neumann データと呼ぶ．いま，Neumann データが未知である $u(x)$ のポテンシャル表現

$$\begin{aligned}u(x)=&-\int_\Gamma u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}U(x,y)d\Gamma_y\\&+\int_\Gamma \alpha(y)U(x,y)d\Gamma_y\\&-\int_\Omega \Delta_y u(y)U(x,y)dy \quad (x\in\Omega) \qquad (12)\end{aligned}$$

が与えられたとき，$u(x)$ の Neumann データは $\alpha(x)$ である，つまり $\partial u(x)/\partial n=\alpha(x)$ $(x\in\Gamma)$ が成り立つと言えるかという疑問が起こる．これについては次の補題が得られる．その証明は後述の反例とともに次章にゆずる．

補題 1.　$n\geq 3$ であるとき $u(x)$ が(12)式で表現されれば

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x)=\alpha(x) \qquad (x\in\Gamma) \qquad (13)$$

が成り立つ．

注意 1. $n=2$ のときこの補題に対応する命題は成り立たない．その反例を次章に示す．

補題1を用いると u, u_ε の導関数についてのより緩やかな仮定のもとで u の第1変分 ϕ の特徴づけができる．以後この章の終りまで $n=3$ の場合に話を限定する．次のことを仮定しよう．

仮定 1. u と u_ε に対して次の関係を満たす ϕ が存在する：

$$u_\varepsilon(x)-u(x)=\varepsilon\phi(x)+o(\varepsilon) \quad (x\in\Omega\cap\Omega_\varepsilon), \quad (14)$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}-\frac{\partial u}{\partial x_i}=\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial x_i}+o(\varepsilon) \qquad (x\in\Omega\cap\Omega_\varepsilon). \quad (15)$$

ここで(14)式は(7)式と同じである．この仮定により，ϕ のポテンシャル表現と補題1を使って文献3)あるいは4)と同様の議論をすれば（ここでは繁雑になるので省略する）ϕ は次の境界値問題の解であることがわかる：

$$\Delta\phi(x)-k(x)\phi(k)=0 \qquad (x\in\Omega), \qquad (16)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}(x)=\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}(x)+\frac{\partial\tau}{\partial n}(x)\right)\rho(x) + \mathrm{grad}_\Gamma\,\rho(x)\cdot\mathrm{grad}_\Gamma\,u(x) \quad (x\in\Gamma). \qquad (17)$$

ここで，grad_Γ は境界 Γ 上での勾配作用素を表す．補題1は ϕ の Neumann データが(17)式右辺になることを示すために用いられた．これらの式を使うと，文献3)あるいは4)などと同様の議論をすれば(6)式で定義された評価関数の第1変分 $\delta^{(1)}J$ は

$$\delta^{(1)}J=\int_\Gamma\rho\left[g(x,u)+p(x)\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}-\frac{\delta\tau}{\partial n}\right\} + \mathrm{div}_\Gamma(p(x)\mathrm{grad}_\Gamma u)\right]d\Gamma \qquad (18)$$

と求められる．ここで，div_Γ は境界上での発散作用素を表し，$p(x)$ は随伴変数と呼ばれ次の境界値問題の解である：

$$\Delta p(x)-k(x)p(x)=\frac{\partial g}{\partial u}(x) \quad (x\in\Omega), \qquad (19)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n}(x)=0 \qquad (x\in\Gamma). \qquad (20)$$

一方，Ω_ε と Ω は(4)式を満たさねばならないので，

$$\int_\Gamma\rho(x)h(x)d\Gamma=0 \qquad (21)$$

を $\rho(x)$ は満たさねばならない．Ω が最適化問題の解であったので(21)式を満たすすべての $\rho(x)$ に対して(18)式で表された $\delta^{(1)}J$ が0（停留条件）でなければならない．このことから Lagrange の未定乗数法により次の1次の必要条件が得られる（文献10)，12)を参照）．

定理 1. 領域 Ω が最適領域であるならば，対応する(1)，(2)式の解 u と(19)，(20)式の解 p に対して

$$g(x,u)+p(x)\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}(x)-\frac{\partial\tau}{\partial n}\right\} + \mathrm{div}_\Gamma(p(x)\mathrm{grad}_\Gamma\,u(x))=\lambda h(x) \quad (x\in\Gamma) \qquad (22)$$

が成り立つような定数 λ が存在する．

以上が1次の必要条件の導出のあらましである．

3. 補題の証明と反例

前章で重要な役割を果たしたのが補題1である．補題1は古典的な結果であるがその証明はもちろんその記述さえ記載したものを知らない．この章ではこの補題の証明と $n=2$ の場合の反例を与えよう．

当面 $n\geq 3$ とし，Ω を滑らかな境界 Γ を持つ $\boldsymbol{R}^n$ の有界な領域としよう．

補助定理 1. 関数 $F(x)$ $(x\in\boldsymbol{R}^n)$ が次式で定義されているとしよう：

$$F(x)\equiv\int_\Gamma a(u)U(x,y)d\Gamma_y. \qquad (23)$$

このとき

$$F(x)=0 \qquad (x\in\Omega) \qquad (24)$$

が成り立つならば

$$F(x)=0 \qquad (x\in\boldsymbol{R}^n) \qquad (25)$$

が成り立つ．

証明 (23)式は $F(x)$ が Γ で密度 $a(x)$ を持つ1重層ポテンシャルであることを意味している．前章で述べたように $F(x)$ は全空間で連続であるから，(24)式より

$$F(x)=0 \qquad (x\in\Gamma) \qquad (26)$$

が言える．一方，Ω 内部の任意の点 x_0 を選んで固定する．x_0 を中心として半径 R_0 の(超)球を Ω をその内部に含むようにとる．さらに，ε を任意の正数として R を $R>R_0$ かつ

$$(R-R_0)^{n-2}>\frac{1}{\varepsilon(n-2)\omega_n}\int_\Gamma|a(x)|d\Gamma \qquad (27)$$

を満たすようにとり，半径 R の球 S をえがく．球面 S と Γ とで囲まれた領域を Ω' で表す．S 上の任意の点 x における $F(x)$ の評価をしてみよう．基本解 $U(x,y)$ の表現(9)式より，$|x-y|\geq(R-R_0)$ に注意すれば

$$|F(x)|=\left|\int_\Gamma a(y)U(x,y)d\Gamma_y\right|$$

$$\leq \int_{\Gamma} |a(y)| \frac{1}{(n-2)\omega_n |x-y|^{n-2}} d\Gamma_y$$

$$\leq \frac{1}{(n-2)\omega_n (R-R_0)^{n-2}} \int_{\Gamma} |a(y)| d\Gamma_y \quad (28)$$

なる評価が得られる．ここで(27)式を考慮すれば

$$|F(x)| < \varepsilon \qquad (x \in S) \qquad (29)$$

が得られる．前章でも述べたように $F(x)$ は Ω' で調和であるから最大値の原理[13]が成り立つ．つまり，$F(x)$ は $\Omega' \cup \Gamma \cup S$ における絶対値の最大値を Γ か S 上でとる．したがって，(26)，(29)式より

$$|F(x)| < \varepsilon \qquad (x \in \Omega') \qquad (30)$$

の正しいことがわかる．ε は任意であったし，R も十分大きければ任意であったので結局

$$F(x) = 0 \qquad (x \in \boldsymbol{R}^n - \Omega) \qquad (31)$$

が成り立つ．したがって，(24)，(26)，(31)式から(25)式の成り立つことが言える． (証明終)

補助定理 2. 恒等式

$$F(x) \equiv \int_{\Gamma} \alpha(y) U(x, y) d\Gamma_y = 0 \quad (x \in \Omega) \qquad (32)$$

が成り立てば，

$$\alpha(x) = 0 \qquad (x \in \Gamma). \qquad (33)$$

証明 (32)式と補助定理1より

$$F(x) = 0 \qquad (x \in \boldsymbol{R}^n) \qquad (34)$$

であるから特に

$$\frac{\partial F}{\partial n_+} = \frac{\partial F}{\partial n_-} = \frac{\partial F}{\partial n} \equiv 0 \qquad (x \in \Gamma)$$

が成り立っている．ところが，$F(x)$ は密度 $\alpha(x)$ を持つ1重層ポテンシャルであるので(11)式より(33)式の成り立つことがわかる． (証明終)

以上で補題1の証明の準備はできた．

補題1の証明 $u(x)$ には(8)式と(12)式の2通りの表現がある．これら両式の辺々を引算すると

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n_y}(y) - \alpha(y) \right) U(x, y) d\Gamma_y \equiv 0 \quad (x \in \Omega) \qquad (35)$$

が得られる．これに補助定理2を適用すると

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \alpha(x) \qquad (x \in \Gamma) \qquad (36)$$

が得られ，これは補題1の結論(13)式にほかならない． (証明終)

空間が2次元であるときにはこの補題1に対応する命題は成り立たない．これを示す反例を以下に与えよう．2次元空間 $\boldsymbol{R}^2$ の原点を中心とする半径1の円周を Γ とし，Γ で囲まれた領域を Ω とする．k を定数として関数 $G(x)$ を

$$G(x) \equiv \int_{\Gamma} k U(x, y) d\Gamma_y = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} k \log \frac{1}{|x-y|} d\Gamma_y \qquad (37)$$

で定義する．$G(x) = 0$ $(x \in \Omega)$ を示そう．$|y| = 1$ $(y \in \Gamma)$ だから

$$G(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} k \log \frac{1}{|y|} d\Gamma_y = 0 \qquad (38)$$

である．一方，$G(x)$ はその定義から点対称なので $r = |x|$ だけの関数 $G(r)$ となり，Ω で調和関数なので平均値の定理[13]が成り立つ．すなわち，半径 R $(0 \leq R \leq 1)$ の円 S_R について

$$0 = G(0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{S_R} G(R) dS_R = G(R) \qquad (39)$$

であり，R が任意であったので

$$G(x) = \int_{\Gamma} k U(x, y) d\Gamma_y = 0 \qquad (x \in \Omega) \qquad (40)$$

が示せた．さて，十分滑らかな関数 $u(x)$ をポテンシャル表現しよう．

$$u(x) = -\int_{\Gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} U(x, y) d\Gamma_y + \int_{\Gamma} \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} U(x, y) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} \Delta_y u(y) U(x, y) dy \qquad (x \in \Omega). \quad (41)$$

この両辺に(40)式の両辺を加えると

$$u(x) = -\int_{\Gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} U(x, y) d\Gamma_y + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} + k \right) U(x, y) d\Gamma_y - \int_{\Omega} \Delta_y u(y) U(x, y) dy \quad (x \in \Omega) \qquad (42)$$

となり，補題1に対応する命題を適用すると任意の k に対して

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} + k \qquad (x \in \Gamma) \qquad (43)$$

となって矛盾である．したがって，$n = 2$ の場合には補題1は成り立たない．

4. あ と が き

本論文では Neumann 問題を制約条件の一とする領域最適化問題について1次の必要条件を導くあらましと，その際重要な役割を果たすポテンシャル表現とそれについてのある補題について述べた．3章の反例があるために文献10)，12)ではポテンシャル表現を使わなかった．そのかわり，境界値問題の解ならびに解の変分に関する仮定をより高階の導関数についてまで

置かねばならなかった．ポテンシャル表現を使えば，これらの仮定はより低階の導関数でことたりる．積分はおおざっぱに言って関数の性質を良く（滑らかに）するからである．このことは理論的基礎を構築する上で有利である．すなわち，解の変分やその導関数などの性質の証明の努力が軽減される．しかし，$n=2$ の場合に3章で与えた反例があるのはこのポテンシャル法が万能でないことを示す．この反例の存在は境界値問題がその型だけでなく空間の次元にも依存するという多様性を示すものであろう．

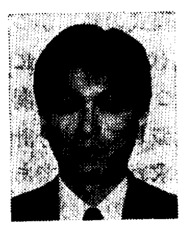
本論文で扱った問題は（無限次元の）非線形数理計画問題である．したがって，当然完全な答えを与えるのは至難のことである．1次の必要条件を求める問題は副産物として感度解析を与える．これに基づく数値解法の研究などが実際の工学的問題を解決するために期待される．

参考文献

1) 藤井，市川，香西：境界値問題を制約条件とする領域最適化問題の必要条件，計画自動制御学会論文集，Vol. 21, No. 8, pp. 800-806 (1985).
2) Fujii, N.: Second Variation and Its Application in a Domain Optimization Problem, *Proceedings of the 4th IFAC Symposium on Control of Distributed Parameter Systems*, Los Angeles, pp. 431-436 (1986).
3) Fujii, N.: Domain Optimization Problems with a Boundary Value Problem as a Constraint, ibid, pp. 5-9 (1986).
4) Fujii, N.: Necessary Conditions for a Domain Optimization Problem in Elliptic Boundary Value Problems, *SIAM J. Control and Optimization*, Vol. 24, No. 3, pp. 346-360 (1986).
5) Fujii, N.: Second-Order Necessary Conditions in a Domain Optimization Problem, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 65, No. 2, pp. 223-244 (1990).
6) Zolesio, J.P.: The Material Derivative (or Speed) Method for Shape Optimization, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, Vol. 2, pp. 1152-1194, Sijthoff and Nordhoff, Alphen aan den Rijn, Holland (1981).
7) Pironneau, O.: On Optimal Problems in Stokes Flow, *J. Fluid Mechanics*, Vol. 59, pp. 117-128 (1973).
8) Pironneau, O.: On Optimum Design in Fluid Mechanics, *J. Fluid Mechanics*, Vol. 64, pp. 97-110 (1974).
9) Sokolowski, J. and Zolesio, J.P.: Shape Sensitivity Analysis of an Elastic-Plastic Torsion Problem, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences*, Vol. 33, pp. 579-586 (1985).
10) Goto, Y., Fujii, N. and Muramatsu, Y.: Second Order Necessary Optimality Conditions for Domain Optimization Problem with a Neumann Problem, *Proceedings of the 13th IFIP Conference on System Modelling and Optimization*, Tokyo, Japan, pp. 259-268 (1987).
11) Fujii, N.: Lower Semicontinuity in Domain Optimization Problems, *J. Optimization Theory and Applications*, Vol. 59, No. 3, pp. 407-422 (1988).
12) Goto, Y., Fujii, N. and Muramatsu, Y.: Second-Order Necessary Optimality Conditions for Domain Optimization Problems of the Neumann Type, *J. Optimization Theory and Applications*, Vol. 65, No. 3, pp. 431-445 (1990).
13) 伊藤：偏微分方程式，pp. 98-100，培風館，東京 (1966).

（平成3年7月 9 日受付）
（平成4年1月 17 日採録）

藤井　信夫（正会員）
昭和 49 年大阪大学大学院基礎工学研究科博士課程修了．工学博士．現在，大阪産業大学助教授（工学部）．昭和49年より平成2年まで大阪大学に勤務．分布定数系の制御，トカマクプラズマの制御，形状（領域）最適化問題などの理論的研究に従事．Control and Computers 誌編集委員(1988-)．日本物理学会，IEEE, IASTED, 計測自動制御学会各会員．



後藤　義人
昭和 63 年大阪大学大学院基礎工学研究科物理系専攻博士前期課程修了．現在，川崎製鉄(株)千葉製鉄所に勤務．形状（領域）最適化問題の研究，鉄鋼プラントの計装・制御システムの設計業務に従事．計測自動制御学会会員．