ファジイシステム構造行列の推移的結合†

若林高明†† 大内 東††

本論文では，ファジイ ISM (Fuzzy Interpretive Structural Modeling) における推移的結合を提案する．この問題は，ファジイ行列によるシステムモデルを用いれば，既知のファジイ可到達行列A，Bを結合して，一つのファジイ可到達行列Mを求める問題となる．このときのMの未知の部分行列X，Yを相互連関行列という．サブシステムAの構成要素とBの構成要素の相互間の二項関係への帰属度を求める．すなわち，XとYの各要素を区間 [0,1] 内の値で埋めることがファジイ推移的結合の目的である．本論文で提案する未知要素の決定アルゴリズムは，未知要素集合上に存在する含意関係に注目し，含意行列モデルを用いて行うものである．これは，未知要素の含意を自己含意 ($X\to X$, $Y\to Y$) と相互含意 ($X\to Y$, $Y\to X$) とに分け，それぞれ，既知の行列A，Bから自己含意行列Pと相互含意行列Fを生成し，PまたはFの要素を含むファジイ論理方程式，またはファジイ論理不等式によって未知要素の値を含意するものである．さらに，推移的結合の$B=1$ の特殊な場合である推移的拡大等についても言及する．

1. はじめに

大規模かつ複雑なシステムの構造を同定する手法として構造モデリングがある．構造モデリングとは，システムの構成要素集合とその上に定義される二項関係に注目し，システムの構造を有向グラフ等を用いて解析する方法であり，代表的なものに J. N. Warfield によって提案された ISM (Interpretive Structural Modeling) 法がある[1]．著者らは ISM を改良した FISM (Flexible ISM) を開発している．一方，Ragade は要素間の関係の強さ，曖昧さを考慮するために二項関係の有無をファジイ化したファジイ ISM を提案している[2]．現在，著者らはこれらを融合した F^2 ISM (Fuzzy Flexible ISM) を開発中である．本論文ではその一環としてファジイ推移的結合を提案する．

この問題は二つのサブファジイシステムをファジイ可到達行列（定義は後述）AとBで表し，結合したファジイシステムをMで表すと，ファジイ可到達行列

$$M=\begin{bmatrix} A & X \\ Y & B \end{bmatrix} \qquad (1)$$

を求める問題となる．ここで，AとBは既知の反射的ファジイ行列であり，次数をそれぞれsとtとする．XとYは未知のファジイ行列であり，相互連関行列という．XとYの要素の値をMがファジイ可到達行列となるように決める，すなわち，サブシステムAとBの構成要素相互間の二項関係Rへの帰属度を求めることがファジイ推移的結合の目的である．

推移的結合は以下のような状況に相当し，複雑なシステムの構造化を行う場合において重要である[3]．

1. 構造化の対象となるシステムの構成要素が多く一度に全要素を対象として構造化を行うのが困難である．
2. いくつかの専門の異なるグループがそれぞれ自分の関係する要素集合について構造化を行う．

等の理由でシステム構成要素を部分集合に分割して部分構造化を行い，結果をまとめる場合である．

本論文では相互連関行列の要素の値の決定を含意行列モデルを用いて行う．未知要素の含意を自己含意 ($X\to X, Y\to Y$)，相互含意 ($X\to Y, Y\to X$) に分け，それぞれの場合について含意行列を生成し，これらを用いて未知要素の値を含意する．含意行列とは，未知要素間の含意の情報を行列の形に表したものであり，既知の行列A，Bから簡潔に生成できるという結果が得られている．

2. 諸定義

本論文で使用する諸定義について述べる．

- $S=\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$：システム要素集合．
- N：システム要素集合Sに対応する添字集合．
- ファジイ行列M：$s_i, s_j\in S$ の二項関係Rへの帰属度を表す数値を要素とする行列．
  $0\leq m_{ij}\leq 1, \quad {}^\forall(i, j).$
- ファジイ行列 M に対して反射性，推移性を次のように定義する．
  反射性：$m_{ii}=1, {}^\forall i.$
  推移性：$m_{ij}=\max\limits_k [\min (m_{ik}, m_{kj})]. \quad {}^\forall(i, j).$

† Transitive Coupling for Fuzzy System Matrices by TAKAAKI WAKABAYASHI and AZUMA OHUCHI (Laboratory of Systems Engineering, Department of Information Engineering, Faculty of Engineering, Hokkaido University).

†† 北海道大学工学部情報工学科システム工学講座

- ファジイ行列A，Bに対して次の演算を定義する．

$$(A+B)_{ij}=\max(a_{ij}, b_{ij}), \tag{2}$$

$$(AB)_{ij}=\max_k[\min(a_{ik}, b_{kj})], \tag{3}$$

$$(A@B)_{ij}=\min_k(a_{ik}\alpha b_{kj}), \tag{4}$$

ただし，$a\alpha b=\begin{cases}1 : a\leqq b\\ b : a>b,\end{cases}$

$$(\bar{A})_{ij}=1-a_{ij}. \tag{5}$$

- 可到達行列：ファジイ行列Mが（ファジイ）可到達行列であるための条件は

$$M=M+I, \tag{6 a}$$

$$M^2=M. \tag{6 b}$$

3. 含意行列モデル

3.1 部分行列に対する制約条件

(1)式において，行列Mは可到達行列でなければならないから，部分行列A，B，X，Yは以下の条件を満たさなければならない．

$$A^2+XY=A, \tag{7 a}$$

$$AX+XB=X, \tag{7 b}$$

$$YA+BY=Y, \tag{7 c}$$

$$YX+B^2=B. \tag{7 d}$$

仮定より，Aは可到達であるから$A^2=A$である．これと，(7 a)式より$XY\leqq A$を得る．また，Aの反射性より，$AX\geqq X$を得るが，これと(7 b)式より$AX=X$を得る．同様にして，(7)式の条件は以下で置き換えられる．

$$XY\leqq A, \tag{8 a}$$

$$AX=X, \tag{8 b}$$

$$XB=X, \tag{8 c}$$

$$YA=Y, \tag{8 d}$$

$$BY=Y, \tag{8 e}$$

$$YX\leqq B. \tag{8 f}$$

3.2 自己含意行列

(8 b)式の両辺に右側から(3)式の意味でBを乗じて右辺に(8 c)式を適用すると

$$AXB=X \tag{9 a}$$

を得る．同様に，(8 d)，(8 e)両式より

$$BYA=Y \tag{9 b}$$

を得る．行列の列展開，行展開，クロネッカー積⊗を用いると(9)式はそれぞれ

$$x=(B^{\mathrm{T}}\otimes A)x, \tag{10 a}$$

$$y=(B\otimes A^{\mathrm{T}})y \tag{10 b}$$

とかける[4]．ただし，xはXの列を縦に並べた列ベクトル，yはYの行を横に並べて転置をとった列ベクトルである．すなわち，Xの第i列をc_iとかくと，

$$x=(c_1^{\mathrm{T}}, c_2^{\mathrm{T}}, \cdots, c_t^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}},$$

Yの第i行をr_iとかけば，

$$y=(r_1, r_2, \cdots, r_t)^{\mathrm{T}}$$

である．$P=(B^{\mathrm{T}}\otimes A)$とおけば，$P^{\mathrm{T}}=(B\otimes A^{\mathrm{T}})$となるので，(10 a)，(10 b)をそれぞれ

$$x=Px, \tag{11 a}$$

$$y=P^{\mathrm{T}}y \tag{11 b}$$

とかく．

これらの式は，ある$x(y)$の要素から他の$x(y)$の要素の値を含意する式である．ゆえに，$P(P^{\mathrm{T}})$を$X(Y)$の自己含意行列という．

例えば，(11 a)式の左辺のx_iに対応する式を書き下すと

$$x_i=\sum_k p_{ik}x_k, \tag{12}$$

p_{ik} $(k=1, \cdots, c,\ c=st)$を大きい順に並べて

$$1(=p_{ii})\geqq p_{ik_1}\geqq\cdots\geqq p_{ik_{c-1}}\geqq 0$$

とする．このとき，

1. $x_i\geqq p_{ik_1}$ならばx_{k_j} $(j=1, \cdots, c-1)$は任意．
2. $p_{ik_1}\geqq x_i\geqq p_{ik_2}$ならば$x_i\geqq x_{k_1}$かつ$x_{k_j}$ $(j=2, \cdots, c-1)$は任意．

あるx_iの値が決定したとき，x_j, $i\neq j$は，x_iの値によって上記のとおり(12)式を満たすように決まらなければならない．すなわち，x_iの値が与えられることによってx_jの値の取り得る範囲が含意される．

ここで，Xの自己含意行列Pの添字(c_i, c_j^{T})に対応する部分ブロック$P^{i,j}$は，A，Bが可到達行列であることから以下のように求められる．

$$P^{i,j}=\delta(i,j)A+\bar{\delta}(i,j)b_{ji}A. \tag{13}$$

P^2を実際に計算することにより，Pは可到達行列となることが分かる．Pは以下のアルゴリズムにより生成できる．

- {Pの生成アルゴリズム}
  1. 行列Bの転置行列B^{T}を求める．
  2. B^{T}の対角要素にAを代入する．
  3. B^{T}の非対角要素には，その要素とAとの積を代入する．

3.3 相互含意行列

(8 a)，(8 f)両式を行展開，列展開，演算子@を用いてまとめると(14 a)を得る．（付録参照）

$$y^{\mathrm{T}}\leqq x^{\mathrm{T}}@F. \tag{14 a}$$

この式は，xの要素からyの要素を含意する式である．ゆえに，Fを相互含意行列という．同様に，(8 a)，(8 f)両式からは，yの要素からxの要素を含

意する式

$$x^{\mathrm{T}} \leqq y^{\mathrm{T}} @ F^{\mathrm{T}} \tag{14 b}$$

も得られる．

ただし F は添字 (c_i, r_j) に対応する部分ブロック $F^{i,j}$ が以下で表される st 次の正方行列である．

$$F^{i,j}=\delta(i,j)A+\bar{\delta}(i,j)(b_{ji}I+\bar{I}). \tag{15}$$

例えば，(14 a)式の左辺の y_i に対応する式を書き下すと

$$y_i \leqq \min_k (x_k \alpha f_{ki}). \tag{16}$$

右辺の x_k の値が与えられることにより，左辺の y_i の値が含意される．

行列Fは以下のアルゴリズムにより生成することができる．

● {F の生成アルゴリズム}

1. 行列 B の転置行列 B^{T} を求める．
2. B^{T} の対角要素にAを代入する．
3. B^{T} の非対角要素には，その要素を対角成分とし，非対角成分が1の行列（その要素をIに乗じたものと $\bar{I}$ との和）を代入する．

以上をまとめると，自己含意と相互含意の式は以下のようになる．

$x \to x$ 含意：$x=Px$,

$y \to y$ 含意：$y=P^{\mathrm{T}}y$,

$x \to y$ 含意：$y^{\mathrm{T}} \leqq x^{\mathrm{T}} @ F$,

$y \to x$ 含意：$x^{\mathrm{T}} \leqq y^{\mathrm{T}} @ F^{\mathrm{T}}$.

4. 未知要素の値の決定

本章では，未知要素に関する三通りの決定方法を提案する．これらの決定法はいずれも，モデル生成者がある未知要素の値を与え，その値から(11)式または(14)式により他の要素の値を含意するという手続きをすべての未知要素の値が決定するまで繰り返すというものである．

未知要素の値を決定する際，最初に決定する要素はモデル生成者にとってわかりやすいものを選べばよい．しかし積極的に選ぶことのできない場合の戦略としてマックスミニ戦略がある[2]．

これは，自己含意行列において，第k行の非零要素数を n_k，第k列の非零要素数を m_k とし，

$$i^* = \{i : n_i = \max_k n_k\}$$

$$j^* = \{j : m_j = \min_k m_k\}$$

となる添字 i^*, j^* をもつ要素の値を最初に決定するというものである．これは，他の要素に与える影響が最も多くのかつ他の要素からうける影響の最も少ない要素の値を最初に決定することを意味する．多くの場合 $i^*=j^*$ となる．以下では，マックスミニ戦略を用いた決定法を記す．

4.1 X 優 先 法

この方法は，(11 a)式によりxの要素をすべて決定し，このxに対し，(14 a)式によりyの各要素の取り得る範囲を限定し，(11 b)式によりこの範囲内でyの各要素の値を決定する方法である．

● {X優先法のアルゴリズム}

1. ① (11 a)式のPにマックスミニ戦略を適用し最初の x_{i^*} の値を決める．
   ② ①で値を決めた x_{i^*} から(11 a)式を用いて他のxの要素の値を含意する．
2. 以上で含意された要素に対応する行と列を削除した小行列でPを置き換え，1の①，②と同様に他のxの要素を含意する．
3. xのすべての要素の値が決定するまで2と同様の含意を繰り返す．
4. (14 a)式を用いてyの各要素の値の取り得る範囲を決める．
5. 4で決めた範囲内で(11 b)式を満たすように1-3と同様にしてyの各要素の値を決定する．

4.2 Y 優 先 法

この方法は，(11 b)式によりyの要素をすべて決定し，このxに対し，(14 b)式によりxの各要素の取り得る範囲を限定し，(11 a)式によりこの範囲内でyの各要素の値を決定する方法である．

● {Y優先法のアルゴリズム}

1. ① (11 b)式の P^{T} にマックスミニ戦略を適用し最初の y_{i^*} の値を決める．
   ② ①で値を決めた y_{i^*} から(11 b)式を用いて他のxの要素の値を含意する．
2. 以上で含意された要素に対応する行と列を削除した小行列で P^{T} を置き換え，1の①，②と同様に他のxの要素を含意する．
3. yのすべての要素の値が決定するまで2と同様の含意を繰り返す．
4. (14 b)式を用いてyの各要素の値の取り得る範囲を決める．
5. 4で決めた範囲内で1-3と同様にして(11a)式を満たすようにyの各要素の値を決定する．

4.3 混 合 戦 略

この方法は，(11 a)（(11 b)）式による自己含意，

(14 a)((14 b))式に相互含意，(11 b)((11 a))による自己含意という一連の手続きを繰り返して未知要素を決定する方法である．

● {混合戦略のアルゴリズム}

1. ① (11 a)式の P ((11 b)式の P^{T}) にマックスミニ戦略を適用し最初の $x_{i^*}(y_{i^*})$ の要素の値 p を決める．
   ② (11 a)((11 b)) 式を用い，$x_{i^*}(y_{i^*})$ から $x^-(i^*)_p(y^-(i^*)_p)$ の要素を含意する．
   ③ ①②において含意された要素に(14 a)((14 b)) 式を用いて $y(x)$ の要素を含意する．
   ④ ③において含意された $y(x)$ の要素から(11 b)((11 a)) 式を用いて他の $y(x)$ の要素を含意する．
2. 以上で含意された要素に対応する行と列を削除した小行列で P, P^{T} を置き換え，1と同様の含意を行う．
3. すべての x，y の要素が決定するまで2と同様の含意を繰り返す．

以上のアルゴリズムにより，部分行列に対するすべての制約条件を満たす x，y が決定される．

4.4 決定における留意点

以上の手続きにおいては，必ずしも各要素の値が一意に決まるわけではない．各要素はその取り得る値の範囲のうち任意の値をとることができるので，仮にある値を代入することにより，決定の効率化を図ることができる．

また，X または Y 優先法の手続き 1-②では $x_{i^*}=p$ としたとき(X 優先法の場合)の x_{i^*} から含意される x の要素集合を $x^-(i^*)_p$ とすると，$x_j\in x^-(i^*)_p$ は $x_j\leqq p$ と含意されるが，すべての $x_j\in x^-(i^*)_p$ に対し，$x_j=p$ とする場合は可到達行列の性質により，それらの要素から他の x の要素を含意することはできない．しかし，ある x_j に $x_j<p$ なる値を代入する場合は，その x_j から他の x の要素が含意されることがあるので，この場合はさらに x_j からの含意を行う必要がある．これは，混合戦略の手続き 1-②，1-④についてもいえる．

また，$x=y=0$ は自明の解であるから x，y の組は，必ず解を持つ．

未知要素の値は原則的にモデル生成者によって決定されるべきであるが，決定しかねる場合は，P, P^{T} において非零要素の多い行に対応する要素にはなるべく大きい値を与え，非零要素の多い列に対応する要素にはなるべく小さい値を与えることが望ましい．さもなければ，それらの要素が他の要素に及ぼす制約が大きくなり，極端な解が得られるからである．

5. 特殊な場合

本章では，二つの特殊な場合について言及する．

5.1 $X=\phi$ の場合

(1)式で $X=\phi$ の場合は，ファジイ ISM の具象化過程の第2フェーズに相当する[5]．

(7)式の制約条件は(7 c)式のみとなるので，含意の式は(11 b)のみとなる．よって未知要素の決定は容易である．

5.2 推移的拡大

(1)式で $B=1$ の場合を推移的拡大 (Transitive bordering) という．これは，構造化の過程を要素が一つの場合から始めて，一つずつ要素を付加する場合や，構造化が終了した後にさらに一つの要素を付加する必要が生じた場合に相当する．

この場合 X，Y はそれぞれ s 次の列ベクトル，行ベクトルとなるので，これらを x，y^{T} とかく．(8)式の条件は

$$xy^{\mathrm{T}}\leqq A \tag{17 a}$$

$$Ax=x \tag{17 b}$$

$$A^{\mathrm{T}}y=y \tag{17 c}$$

となる．($B=1$ であるから(8 c)(8 e)(8 f)は恒等的に成立する)(17 a)式を演算@を用いて書き換えると

$$y^{\mathrm{T}}\leqq x^{\mathrm{T}}@A \tag{18 a}$$

または

$$x^{\mathrm{T}}\leqq y^{\mathrm{T}}@A^{\mathrm{T}} \tag{18 b}$$

の形となる．

よって，この場合は自己含意行列 P，相互含意行列 F は共に A に等しくなる．

6. 例 題

M が以下のように与えられているとする．

$$M=\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0.4 & 0.8 & x_1 & x_4 & x_7 \\ 0 & 1 & 0.2 & x_2 & x_5 & x_8 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 & x_6 & x_9 \\ \hdashline y_1 & y_2 & y_3 & 1 & 0.3 & 0.7 \\ y_4 & y_5 & y_6 & 0 & 1 & 0.5 \\ y_7 & y_8 & y_9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

このとき，3章に示したアルゴリズムにより P，F を生成すると

$$P=\left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc} 1 & 0.4 & 0.8 & & & & & & \\ 0 & 1 & 0.2 & & \phi & & & \phi & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & & \\ \hdashline 0.3 & 0.3 & 0.3 & 1 & 0.4 & 0.8 & & & \\ 0 & 0.3 & 0.2 & 0 & 1 & 0.2 & & \phi & \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.3 & & & \\ \hdashline 0.7 & 0.4 & 0.7 & 0.5 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.4 & 0.8 \\ 0 & 0.7 & 0.2 & 0 & 0.5 & 0.2 & 0 & 1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$F=\left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc} 1 & 0.4 & 0.8 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0.2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hdashline 0.3 & 1 & 1 & 1 & 0.4 & 0.8 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0.3 & 1 & 0 & 1 & 0.2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0.3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hdashline 0.7 & 1 & 1 & 0.5 & 1 & 1 & 1 & 0.4 & 0.8 \\ 1 & 0.7 & 1 & 1 & 0.5 & 1 & 0 & 1 & 0.2 \\ 1 & 1 & 0.7 & 1 & 1 & 0.5 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

ただし，上式中の ϕ は零行列を表す．

これらの転置をとると，それぞれ P^T，F^T を得る．(11)，(14)式を用いて，未知要素の値を決定する．

P，P^T にマックスミニ戦略を適用すると最初に値を決定する要素としてそれぞれ x_7，y_3 が選ばれる．

以下では，初期値として $x_7=0.6$ を与えたとして X優先法と混合戦略により相互連関行列を決定する．

一つの要素について二つの値が含意された場合，すなわち，$x_i=\gamma$ となっている要素に対し，後から $x_i \leqq \delta$ と含意された場合は，$\delta<\gamma$ ならば $x_i \leqq \delta$ となる値に書き換え，$\delta \geqq \gamma$ ならば書き換えないものとする．また，マックスミニ戦略によって選ばれた要素の値は書き換えない．マックスミニ戦略の解が複数存在する場合は添字の若いものを選ぶ．

● X優先法

(ステップ1)　$x_7=0.6$ と (11 a) 式より $x_1 \leqq x_7$，$x_3 \leqq x_7$，$x_9 \leqq x_7$ が含意される．$x_1=x_3=x_9=0.6$ とする．

(ステップ2)　Pからステップ1で値を決定した要素に対応する行と列を削除すると以下の小行列を得る．

$$\begin{array}{c} \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_8 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_2 & x_4 & x_5 & x_6 & x_8 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0.4 & 0.8 & 0 \\ 0.3 & 0 & 1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0.5 & 0.2 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

これにマックスミニ戦略を適用すると値を与えるべき要素として x_4 が選ばれる．$x_4=0.2$ とすると，これと(11 a)式より，$x_1 \leqq x_4$，$x_2 \leqq x_4$，$x_3 \leqq x_4$，$x_5 \leqq x_4$，$x_6 \leqq x_4$ が含意される．x_1，x_3 はステップ1の値を更新して $x_1=0.2$，$x_3=0$ とする．さらに $x_5=x_6=0$ とすると，$x_5=0$ と(11 a)式より $x_2=0$ が含意される．

(ステップ3)　残る x_8 は，$x_8=0.7$ とする．他の要素に及ぼす影響はない．

以上のように各要素の値を決定した

$$x^*=[0.2, 0, 0, 0.2, 0, 0, 0.6, 0.7, 0.6]^T$$

は(11 a)式を満たす．

(ステップ4)　x^* を(14 a)式に代入すると y の各要素の値の取り得る範囲として，

$$y \leqq y^*=[1, 1, 1, 0, 0.5, 0.5, 0, 0, 0.2]^T$$

を得る．

(ステップ5)　y^* を(11 b)式に代入すれば y^* はこれを満たすことがわかる．よって x, y^* の組は解である．このときの含意構造を図示すると**図1**のようになる．図中の下線を付した要素は，前の値を更新した要素を示す．

● 混合戦略

(ステップ1)　$x_7=0.6$ と (11 a) 式より $x_1 \leqq x_7$，$x_3 \leqq x_7$，$x_9 \leqq x_7$ が含意される．$x_1=x_9=0.6$，$x_3=0$ とする．$x_3=0$ から新たに含意できる x の要素はない．

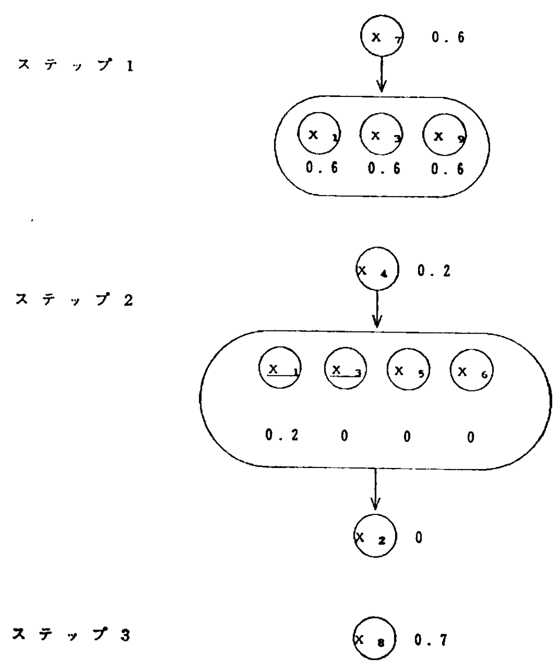


図 1　X 優先法のステップ 1-3 における含意構造
Fig. 1　Implication structures in step 1-step 3 in case of X-first method.

(ステップ2) 以上の要素の値を(11 a)式に代入すると，$y_2 \leqq 0.4$, $y_4=0$, $y_6 \leqq 0.5$, $y_7=y_8=0$ が含意される．$y_2=0.4$, $y_6=0.5$ とする．

(ステップ3) 以上で含意された要素の値を(11 b)式に代入すると，$y_5 \leqq 0.3$ が含意される．$y_5=0.3$ とする．

(ステップ4) 以上で含意された要素に対応する行と列を P, P^T から削除した小行列にマックスミニ戦略を適用すると，次に値を与える要素として，x_4 が選ばれる．$x_4=0.4$ とすれば，これと(11 a)式より，$x_6 \leqq 0.4$ が含意される．$x_6=0$ とする．$x_6=0$ から新たに含意できる x の要素はない．

(ステップ5) ステップ4で含意された要素の値を(14 a)式に代入すると，$y_1 \leqq 0.3$ が新たに含意される．$y_1=0.3$ とする．y_1 から新たに含意される y の要素はない．

(ステップ6) 残る要素のうちマックスミニ戦略によって選ばれるのは，x_8 である．$x_8=0.3$ とすれば，これと(11 a)式より $x_2 \leqq 0.3$, $x_5 \leqq 0.3$ が含意される．$x_2=x_5=0.3$ とする．

(ステップ7) ステップ6で含意された要素の値を(14 a)式に代入すれば，$y_1=0$, $y_3 \leqq 0.2$, $y_5=0$, $y_6 \leqq 0.2$, $y_9 \leqq 0.2$ が含意される．$y_3=y_9=0.2$ とし，y_1, y_5, y_6 については前に含意された値を更新し，それぞれ 0, 0, 0.2 とする．これらと(11 b)式より $y_2 \leqq 0.2$ が新たに含意される．$y_2=0.2$ とする．

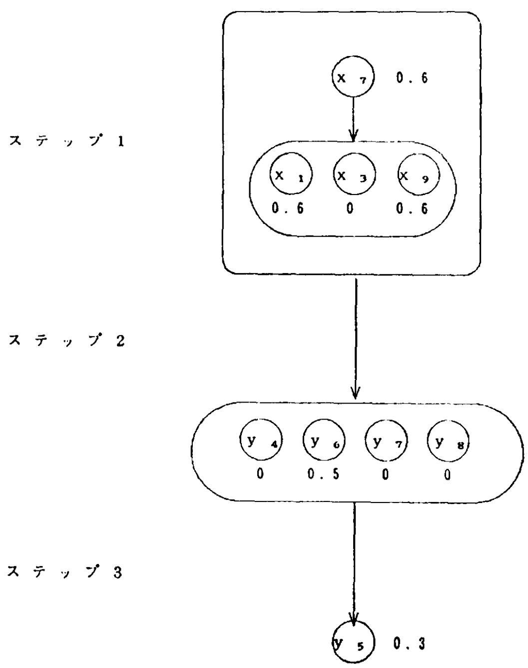


図 2 混合戦略のステップ 1-3 における含意構造
Fig. 2 Implication structures in step 1-step 3 in case of mixed strategy.

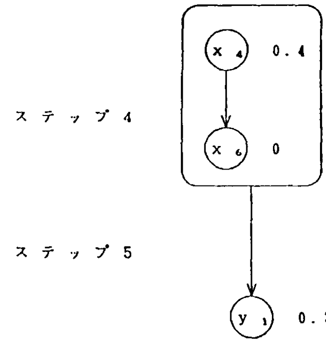


図 3 混合戦略のステップ4，5における含意構造
Fig. 3 Implication structure in step 4 and step 5 in case of mixed strategy.

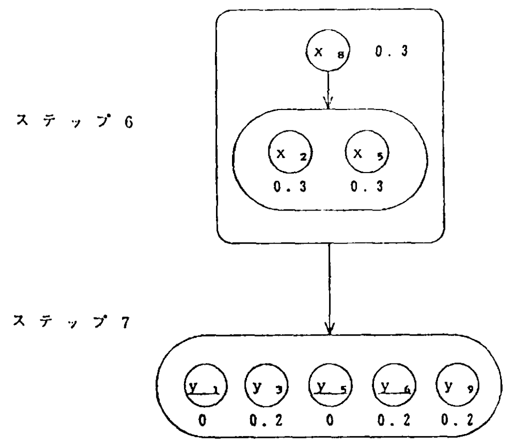


図 4 混合戦略のステップ6，7における含意構造
Fig. 4 Implication structure in step 6 and step 7 in case of mixed strategy.

以上ですべての要素の値が決定し，手続きが終了する．

$$x=[0.6, 0.3, 0, 0.4, 0.3, 0.4, 0.6, 0.3, 0.6]^T$$
$$y=[0, 0.4, 0.2, 0, 0, 0.2, 0, 0, 0.2]^T$$

となる．

このときの含意構造を図示すると**図 2～4** のようになる．以上のように未知要素の値を決定した M が可到達行列であることは，容易に確かめられる．

7. おわりに

ファジイ ISM における推移的結合の過程における相互連関行列の含意構造について考察した．含意行列モデルを用いた相互連関行列の決定法として，X優先法，Y優先法，混合戦略の3通りの方法を提案した．

いずれの方法においても未知要素の決定に当たっては，未知要素自体の階層構造を考慮し，柔軟な値の決定を行わなければ，モデル生成者にとって満足のいくモデルは得られないと思われる．

今後の研究課題としては，さらに効率的かつ柔軟な未知要素の決定法の考察，ファジイ推移的結合をツールとして用いた F^2 ISM システムの開発などが挙げられる．

参考文献

1) Warfield, J. N.: Implication Structures for System Interconnection Matrices, *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, Vol. SMC-6, pp. 18-24 (1976).
2) Ragade, R. K.: Fuzzy Interpretive Structural Modeling, *J. Cybern.*, Vol. 6, pp. 189-211 (1976).
3) 大内，栗原，加地：ISM の推移的結合における完全推論行列の考察，電子論C，Vol. 104, No. 5, pp. 123-130 (1984).
4) 児玉，須田：システム制御のためのマトリクス理論，計測自動制御学会 (1978).
5) 大内，加地：ファジイ ISM の具象化フェーズにおける相互連関行列の効率的生成アルゴリズム，電学論C，Vol. 109, No. 10, pp. 747-752 (1989).
6) Sanchez, E.: Resolution of Composite Fuzzy Relation Equations, *Inf. Control*, Vol. 30, pp. 38-48 (1976).

付録

● (14 a) 式 ($y^T \leqq x^T \textcircled{\alpha} F$) の導出

(a) $XY \leqq A$ を$\textcircled{\alpha}$演算を用いて書けば，

$$Y \leqq X^T \textcircled{\alpha} A$$

となる[6]．

この式は，以下のように書き換えられる．

$$y^T \leqq x^T \textcircled{\alpha} \begin{bmatrix} A & 1 \cdots 1 \\ 1 & A \cdots 1 \\ & \cdots \\ 1 & 1 \cdots A \end{bmatrix} \qquad (\text{付-1})$$

なぜなら，$Y \leqq X^T \textcircled{\alpha} A$ を成分で書けば，

$$\begin{bmatrix} y_{11} \cdots y_{1s} \\ \cdots \\ \cdots \\ y_{t1} \cdots y_{ts} \end{bmatrix}.$$

$$\leqq \begin{bmatrix} x_{11} \cdots x_{1t} \\ x_{s1} \cdots x_{st} \end{bmatrix}^T \textcircled{\alpha} \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1s} \\ a_{s1} \cdots a_{ss} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_{11} \cdots x_{s1} \\ x_{1t} \cdots x_{st} \end{bmatrix} \textcircled{\alpha} \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1s} \\ a_{s1} \cdots a_{ss} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (X_{11}\alpha a_{11}) \wedge \cdots \wedge (X_{s1}\alpha a_{s1}) \cdots (X_{11}\alpha a_{1s}) \wedge \cdots \wedge (X_{s1}\alpha a_{ss}) \\ (X_{1t}\alpha a_{11}) \wedge \cdots \wedge (X_{st}\alpha a_{s1}) \cdots (X_{1t}\alpha a_{1s}) \wedge \cdots \wedge (X_{st}\alpha a_{ss}) \end{bmatrix}.$$

例えば

$$\begin{aligned} y_{11} &\leqq (X_{11}\alpha a_{11}) \wedge \cdots \wedge (X_{s1}\alpha a_{s1}) \\ &= (X_{11}\alpha a_{11}) \wedge \cdots \wedge (X_{s1}\alpha a_{s1}) \wedge \cdots \wedge (X_{12}\alpha 1) \wedge \\ &\quad \cdots \wedge (X_{s2}\alpha 1) \wedge \cdots \wedge (X_{1t}\alpha 1) \wedge \cdots \wedge (X_{st}\alpha 1). \end{aligned}$$

上のように ($x_{**}\alpha 1$) となる項を付け加えても，α 演算の性質により全体の min には影響を与えない．他の y_{ij} についても同様に書いたものをまとめると

$$[y_{11}, y_{12}, \cdots, y_{1s}, y_{21}, \cdots, y_{2s}, \cdots, y_{t1}, \cdots, y_{ts}]$$
$$\leqq [x_{11}, x_{21}, \cdots, x_{s1}, x_{12}, \cdots, x_{s2}, \cdots, x_{1t}, \cdots, x_{st}]$$
$$\textcircled{\alpha} \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1s} & 1 \cdots 1 & \cdots & 1 \cdots 1 \\ \cdots & & & \\ a_{s1} \cdots a_{ss} & 1 \cdots 1 & \cdots & 1 \cdots 1 \\ 1 \cdots 1 & a_{11} \cdots a_{1s} & 1 \cdots & 1 \cdots 1 \\ & \cdots & & \\ 1 \cdots 1 & a_{s1} \cdots a_{ss} & 1 \cdots & 1 \cdots 1 \\ & \cdots & & \\ & \cdots & & \\ 1 \cdots 1 & \cdots & 1 & a_{11} \cdots a_{1s} \\ & & & \cdots \\ 1 \cdots 1 & \cdots & 1 & a_{s1} \cdots a_{ss} \end{bmatrix}.$$

すなわち

$$y^T \leqq x^T \textcircled{\alpha} \begin{bmatrix} A & 1 \cdots 1 \\ 1 & A \cdots 1 \\ & \cdots \\ 1 & 1 \cdots A \end{bmatrix}. \qquad (\text{付-1})$$

ただし上式中の 1 は A と同じ次数の全行列（成分がことごとく 1 の行列）を表す．

(b) $YX \leqq B$ を$\textcircled{\alpha}$演算を用いてかけば，

$$Y \leqq (X \textcircled{\alpha} B^T)^T$$

となる．この式は，以下のように書き換えられる．

$$y^T \leqq x^T \textcircled{\alpha} \begin{bmatrix} b_{11}I + \bar{I} \cdots b_{t1}I + \bar{I} \\ \cdots \\ b_{1t}I + \bar{I} \cdots b_{tt}I + \bar{I} \end{bmatrix}. \qquad (\text{付-2})$$

これを成分で書けば

$$\begin{bmatrix} y_{11} \cdots y_{1s} \\ \cdots \\ y_{t1} \cdots y_{ts} \end{bmatrix} \leqq \begin{bmatrix} x_{11} \cdots x_{1t} \\ \cdots \\ x_{s1} \cdots x_{st} \end{bmatrix} \textcircled{\alpha} \begin{bmatrix} b_{11} \cdots b_{t1} \\ \cdots \\ b_{1t} \cdots b_{tt} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} (x_{11}\alpha b_{11}) \wedge \cdots \wedge (x_{1t}\alpha b_{1t}) \\ \\ (x_{11}\alpha b_{t1}) \wedge \cdots \wedge (x_{1t}\alpha b_{tt}) \end{bmatrix}$$

$$
\left.\begin{matrix}\cdots(x_{s1}\alpha b_{11})\wedge\cdots\wedge(x_{st}\alpha b_{1t}) \\ \cdots \\ \cdots(x_{s1}\alpha b_{t1})\wedge\cdots\wedge(x_{st}\alpha b_{tt})\end{matrix}\right].
$$

例えば

$$
\begin{aligned}
y_{11}&=(x_{11}\alpha b_{11})\wedge\cdots\wedge(x_{1t}\alpha b_{1t}) \\
&=(x_{11}\alpha b_{11})\wedge(x_{21}\alpha 1)\wedge\cdots\wedge(x_{s1}\alpha 1) \\
&\quad\wedge(x_{12}\alpha b_{12})\wedge\cdots\wedge(x_{s2}\alpha 1)\wedge\cdots \\
&\quad\wedge(x_{1t}\alpha b_{1t})\wedge\cdots\wedge(x_{st}\alpha 1). \\
y_{12}&=(x_{11}\alpha 1)\wedge(x_{21}\alpha b_{11})\wedge\cdots\wedge(x_{s1}\alpha 1) \\
&\quad\wedge(x_{12}\alpha 1)\wedge(x_{22}\alpha b_{12})\wedge\cdots\wedge(x_{s2}\alpha 1)\wedge\cdots \\
&\quad\wedge(x_{1t}\alpha 1)\wedge(x_{2t}\alpha b_{1t})\wedge\cdots\wedge(x_{st}\alpha 1).
\end{aligned}
$$

というようにしても全体の min には影響を与えない．他の y_{ij} についても同様に書いたものをまとめると

$$
y^{\mathrm{T}}\leqq x^{\mathrm{T}}@\begin{bmatrix} b_{11}I+\bar{I}\cdots b_{t1}I+\bar{I} \\ \cdots \\ b_{1t}I+\bar{I}\cdots b_{tt}I+\bar{I}\end{bmatrix}. \qquad (付\text{-}2)
$$

次に(付-1)，(付-2)の両方を満たす Y を求める．(付-1)，(付-2)の右辺の各要素の min を取ると，A，B の反射性より，例えば，

$$
\begin{aligned}
y_{11}\leqq&(x_{11}\alpha a_{11})\wedge\cdots\wedge(x_{s1}\alpha a_{s1})\wedge(x_{12}\alpha b_{12})\wedge\cdots \\
&\wedge(x_{s2}\alpha 1)\wedge\cdots\wedge(x_{1t}\alpha b_{1t})\wedge\cdots\wedge(x_{st}\alpha 1)
\end{aligned}
$$

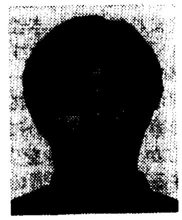
と書ける．他の y_{ij} についても同様に書いたものをまとめると

$$
y^{\mathrm{T}}\leqq x^{\mathrm{T}}@\begin{bmatrix} A & b_{21}I+\bar{I}\cdots & b_{t1}I+\bar{I} \\ b_{12}I+\bar{I} & A & \cdots b_{t2}I+\bar{I} \\ & \cdots & \\ b_{1t}I+\bar{I} & b_{2t}I+\bar{I}\cdots & A \end{bmatrix}
$$

となる．

(14 b)式 ($x^{\mathrm{T}}\leqq y^{\mathrm{T}}@F^{\mathrm{T}}$) についても同様に導くことができる．

(平成3年7月18日受付)
(平成4年3月12日採録)



若林　高明（正会員）
1965年生．1989年北海道大学理学部数学科卒業．1991年同大学大学院工学研究科情報工学専攻修士課程修了．現在，同博士課程在学中．システム工学の研究に従事．日本ファジイ学会会員．

大内　　東（正会員）
昭和20年生．昭和49年北海道大学工学部大学院工学研究科博士課程修了．工学博士．北海道大学工学部情報工学科教授．システム情報工学，応用人工知能システム，医療システムの研究に従事．人工知能学会，電気学会，電子情報通信学会，計測自動制御学会，日本OR学会，医療情報学会，病院管理学会，IEEE-SMC各会員．