

トーラス盤面における一般化三並べの解析

石黒 裕也¹ ディプタラマ¹ 成澤 和志¹ 篠原 歩¹

概要：一般化三並べは、Frank Harary によって定義された二人完全情報ゲームであり、基盤目状の盤面に先手と後手が交互に石を置き、あらかじめ定められた動物（連結した石の配置）を先に完成させたプレイヤーが勝ちとなるゲームである。本論文では、上下、左右がそれぞれつながったトーラス盤面を定義し、一般化三並べの盤面を $m \times n$ のトーラス盤面に拡張したゲーム $\text{TorusGTTT}(m, n)$ を提案する。そして、このゲームにおける性質を解析し、様々な盤面の大きさにおける各動物に対して先手必勝型、後手必勝型、引き分け型の分類を行う。

Analysis of generalized tic-tac-toe in torus board

YUYA ISHIGURO¹ DIPTARAMA¹ KAZUYUKI NARISAWA¹ AYUMI SHINOHARA¹

Abstract: Generalized Tic-Tac-Toe is an achievement game for polyominoes introduced by Frank Harary. Two players alternately mark cells on a board, and the player who first achieves a given polyomino wins. In this paper, we propose a new game $\text{TorusGTTT}(m, n)$, where the board is a torus of size $m \times n$ instead of a plain of infinite size. We analyze the properties of the games and decide whether the polyomino is a *winner*, *loser* or *draw* for each game.

1. はじめに

三並べは、 $\bigcirc \times$ ゲームや Tic-Tac-Toe という名前でも知られる、古くから遊ばれているゲームである。三並べは、先手と後手が 3×3 の大きさの基盤目状の盤面に黒と白の石を交互に置き、縦横斜めの直線状いずれかに 3 つの石を並べることが勝利条件としたゲームである。

この三並べを一般化したゲームとして、一般化三並べが Harary により定義されている [1][2][7]。一般化三並べが、三並べと異なる点は以下の 2 点である。

- 三並べの盤面サイズは 3×3 だが、一般化三並べは無限大の大きさの基盤目状の盤面である。
- 三並べの勝利条件は縦横斜めのいずれかに 3 つの石を連続して並べることだが、一般化三並べはあらかじめ定められた形を 90° ごとの回転・反転を許して完成させることである。

これらを踏まえると、一般化三並べは以下のように定義

できる。

定義 1 (一般化三並べ) 無限大の大きさの基盤目状の盤面に、先手後手が交互に石を置き、あらかじめ決められた動物と呼ばれる配置を、 90° ごとの回転と反転を許して、先に完成させた方が勝ちとなるゲームを一般化三並べという。

ここで、動物を構成する石の個数を細胞数と呼ぶ。また、便宜上先手が置く石を黒石、後手が置く石を白石といい、それぞれ●、○で表す。一般化三並べでは主にポリオミノを動物として扱う。また、 90° ごとの回転・反転を行うことで重なる形は同じ動物とみなす。動物は、細胞数や連結方法によって、図 1 に示すように様々なものが考えられるが、先手後手が最善手を打ち続けた場合に先手後手のどちらが必勝となるのか、または引き分けとなるのかによって分類することができる。お互い最善手を打ち続けたときに先手が必ず勝つ動物を先手必勝型、後手が必ず勝つ動物を後手必勝型、先手後手ともに作ることができない動物を引き分け型という。

¹ 東北大学情報科学研究科
Graduate School of Information Science, Tohoku University

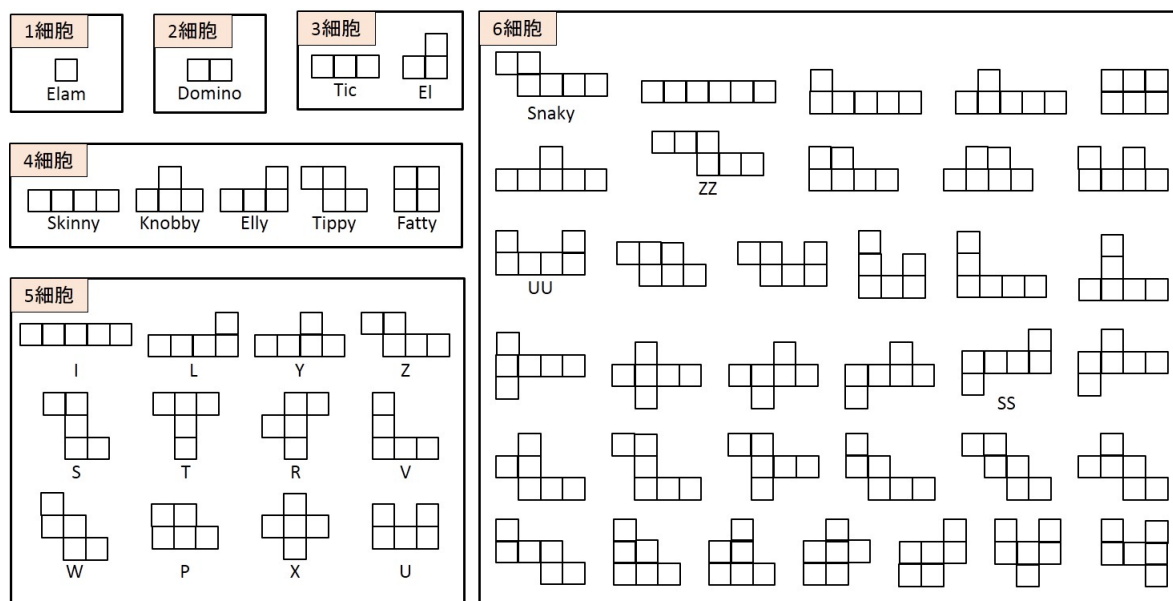


図 1 動物の例.

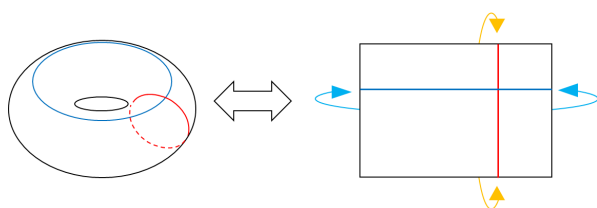


図 2 トーラス (左) と展開図 (右).

これまで、一般化三並べに対して様々な拡張が行われてきた [3]. 例えば、勝利条件となる動物を同時に 2 つ定めるようにしたゲーム [8] や、1 つの手番で置くことのできる石の数を複数にしたゲーム [6] などが研究されている. これらの研究は、勝利判定に関する部分や、石を置く個数に対する拡張が行われている. 本論文では盤面に対する拡張として、トーラス盤面での一般化三並べを新たに提案する. トーラスとは、図 2 の左側に示すようなドーナツ型のような穴が一つ空いた図形を指し、ある長方形の上下の辺をつなげて円柱を作り、その左右をつなげることで作ることができる. ただし、円柱からドーナツ型のトーラスを作るには曲率を考えなければならない. この曲率を 0 のまま、トーラスにしたものを平坦トーラスという. 平坦トーラスを作るには 4 次元空間が必要となるが、図 2 の右側に示すような長方形を上下左右に貼り合わせた平面も平坦トーラスと合同であるとみなすことができる. トーラスの表面は、上下方向、左右方向のどちらもループ状になるという特徴をもっている. 一般に、有限盤面を用いたこの種のゲームは、四隅の攻防が勝敗を決する重要な鍵となる. しかし、盤面をトーラスにすることで、四隅がなくなるため、通常とは異なる結果が得られる可能性がある. 本研究では、上下の辺、左右の辺がつながるトーラス盤面を定義し、様々な大きさのトーラス盤面における一般化三並べに

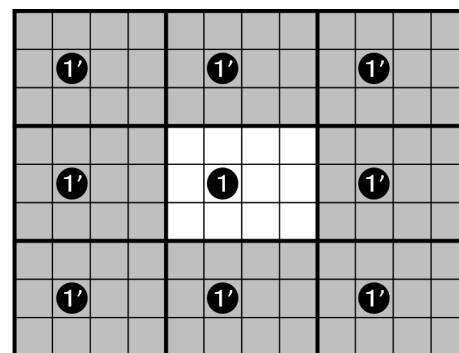


図 3 4×3 トーラス盤面. 石を置けるのは中央領域のみで、中央領域に石を置くと残りの領域の対応する場所にも石が置かれる.

において各動物の型を解析することを目的とする.

ゲームの盤面を平坦トーラスにしたものとして、RPG ゲームのマップやパックマンの盤面などが古くから存在している. また、トーラスを盤面として用いた五目並べやビリヤード、クロスワードパズル、迷路などが、Android や iOS 向けアプリケーションとしてもプレイすることができる [4]. 研究としては、トーラス盤面を用いた囲碁 [9] や、トーラスやメビウスの環、クラインの壺の上で行う三並べについての解析がなされている [5].

2. トーラス一般化三並べ

まず、トーラス盤面を以下のように定義する.

定義 2 (トーラス盤面) $m \times n$ ($m \geq n$) の大きさの盤面の上下左右斜めの 8 方向に同じ盤面を張り合わせた盤面を **トーラス盤面** と呼ぶ. トーラス盤面では、プレイヤーが石を置くことができるのは、中央の $m \times n$ の領域のみであるが、この領域内に石を置くと残りの 8 領域の対応する部分

にも石が置かれる．このとき，プレイヤーが中央領域に置いた石を置き石，残りの 8 領域に自動的に置かれる石を写し石という．

図 3 に 4×3 のトーラス盤面を示す．中央の領域にある①は置き石であり，残りの 8 領域にある石はすべて①の写し石である．トーラス盤面は，中央の領域だけを考えて，トーラスの表面を疑似的に再現したものと見なすことができる．

定義 3 (トーラス一般化三並べ) 中央領域が $m \times n$ ($m \geq n$) の大きさのトーラス盤面に先手後手が交互に石を置き，あらかじめ決められた動物を完成させた方が勝ちとするゲームを $\text{TorusGTTT}(m, n)$ という． $\text{TorusGTTT}(m, n)$ において，目標となる動物 A は以下の条件を満たすとする．

- (1) ポリオミノ^{*1}である．
 - (2) 動物 A が収まる最小の長方形の長辺のマスを m' ，短辺のマスを n' としたとき， $m' \leq m$ かつ $n' \leq n$ である．
 - (3) 動物 A の細胞数 c は， $c \leq \lceil \frac{mn}{2} \rceil$ を満たす．
- ただし，動物 A は対応する置き石と写し石を同時に含んではいけないものとする．

3. トーラス一般化三並べの性質

無限大の大きさの盤面での一般化三並べは，後手必勝となる動物は存在しないことが分かっており，同様にトーラス一般化三並べにおいても以下の定理を示すことができる．

定理 1 任意の m, n における $\text{TorusGTTT}(m, n)$ には，後手必勝型の動物は存在しない．

証明 $\text{TorusGTTT}(m, n)$ において，動物 A が後手必勝型であると仮定する．このとき，後手の必勝戦略 S が存在し，後手はその戦略にしたがって石を置くことで，必ず勝つことができる．ここで，先手側の戦略として以下のような戦略 S' を考える．

(戦略 S') 先手側の 1 手目は任意の位置に石を置く．2 手目以降は戦略 S により定まる位置に石を置く．ただし，石を置くはずの位置にすでに石が置かれている場合は，任意の位置に置く．

先手が戦略 S' を用いると，後手が戦略 S を用いたときとほぼ同様にゲームが進行するが，自分の石が一つ多いという点で異なる．つまり， S' は後手が必勝戦略 S を用いる際に石 1 つ分のハンデを与えられたものとみなすことができるため， S' は必勝戦略である．動物 A は後手必勝型であ

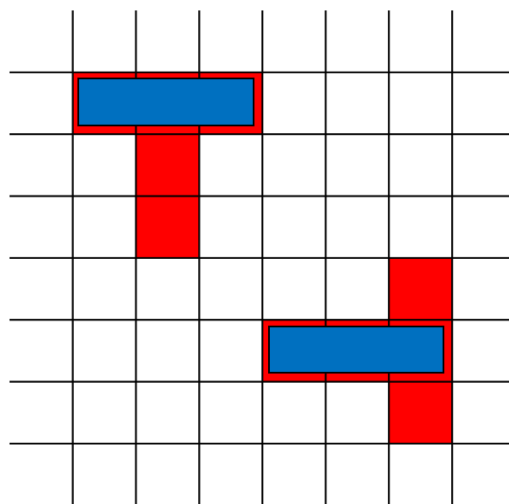


図 4 縦横ともに連続した 3 マスを含む動物．

るが，先手の必勝戦略 S' が存在することとなり矛盾する．よって，このような後手必勝型の動物は存在しない．□

3.1 引き分け型の証明

ある性質をもった特殊な動物は，その性質から型を解析することができる場合がある．ここでは，トーラス一般化三並べにおいて引き分け型を証明するための方法を 2 つ提案する．

3.1.1 縦横ともに連続した 3 マスを含む動物

1 つ目は，5 細胞動物の T や V，X などのように，動物が連続した 3 マスを縦方向と横方向の両方に含む場合である．

図 4 に示すように，縦横ともに連続した 3 マスを含む動物はどのように回転・反転を行っても横方向に 3 マスの部分を含むこととなる．この性質を利用するため，以下に補題を示す．

補題 1 $1 \times n$ の有限盤面上で，連続した 3 マスに石を置くことを目的としたとき，先手後手が最善手を打ち続けたとしても， n の大きさに関わらず，先手後手ともに連続した 3 マスに石を置くことができない．

証明 後手が先手よりも先に連続した 3 マスに石を置くことができないことは，定理 1 と同様の手順によって証明できる．そのため，ここでは先手が連続した 3 マスに石を置くことができないことを示す．

後手が以下に示す戦略をとることによって，先手が連続した 3 マスに石を置けないことを証明する．

- (1) 先手が石を置いた右隣が空きマスの場合．後手は，直前に先手が置いた石の右隣に石を置く．
- (2) 先手が石を置いた右隣が黒石，かつ左隣が空きマスの場合．後手は，直前に先手が置いた石の左隣に石を置く．

^{*1} 正方形の辺と辺が連結した図形であり，角同士で連結したものは除く．

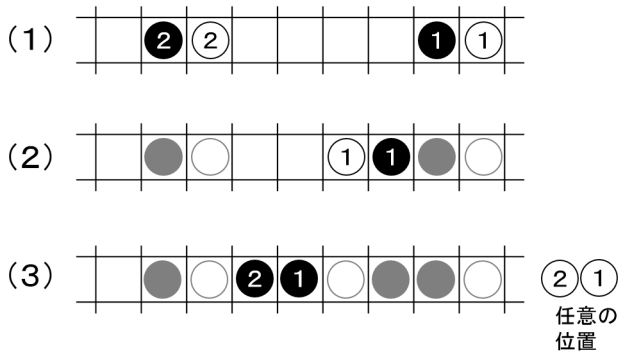


図 5 補題 1 の戦略を用いた例。(1) は先手の石の右隣に後手が置く例、(2) は先手の石の左隣に置く例、(3) は任意の位置に置く例。

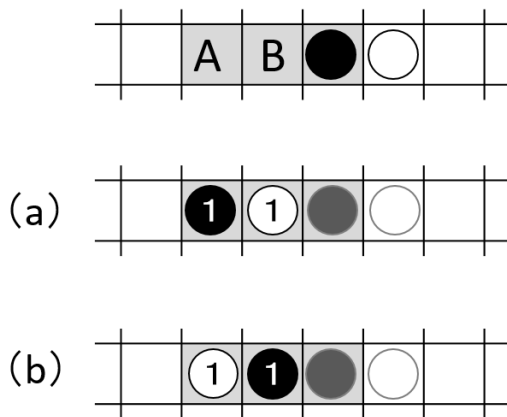


図 6 $1 \times n$ 盤面の一部分。先手が 3 連を作るには空きマス A と B の両方に黒石を置く必要があるが、どちらかに置いた段階で後手にもう一方を埋められてしまう。

(3) (1),(2) 以外の場合。後手は、任意のマスに石を置く。

図 5 に、示した戦略を後手がとったときの途中経過を示す。(1) より、両端が空きマスとなる位置に黒石が置かれたときはその右隣に後手が石を置くため、後手番終了時点で右隣が空きマスの黒石は存在しない。先手が連続した 3 マスに石を並べるには、図 6 の A または B の位置に石を置き、もう一方の位置に後手が白石を置く前に黒石を置く必要がある。A の位置に先手が黒石を置いた場合、(1) より後手が B の位置に白石を置くため、この位置で先手が連続した 3 マスに石を置くことはできない (図 6(a))。B の位置に先手が黒石を置いた場合、(2) より後手が A の位置に白石を置くため、この位置で先手が連続した 3 マスに石を置くことはできない (図 6(b))。そのため、先手が A と B 両方に黒石を置くことはできず、連続した 3 マスに石を並べることはできない。□

補題 1 を用いることで、以下の定理を導くことができる。

定理 2 連続した 3 マスの領域を縦方向、横方向ともに含む動物は、盤面の大きさにかかわらず引き分け型である。

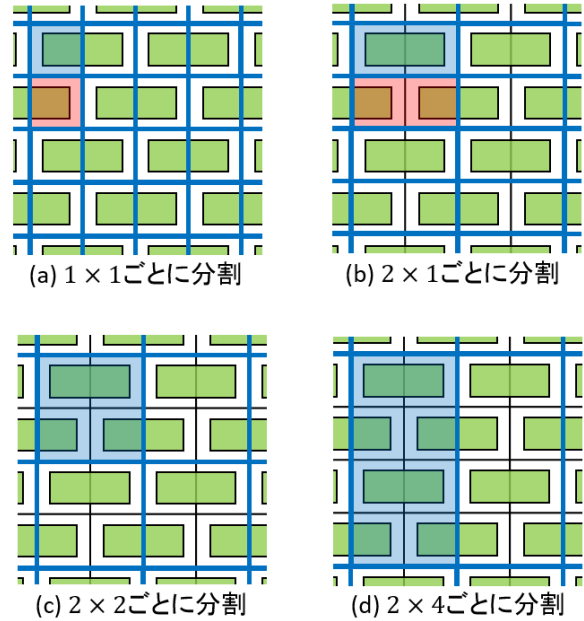


図 7 最小単位的具体例。この例では (c) の青い矩形が最小単位となる。

証明 連続した 3 マスの領域を縦横に含む動物は、 90° ごとの回転・反転をどのように行っても、必ず横方向に連続した 3 マスの部分を含む。このような動物を完成させるには、横方向に連続した 3 マスの部分を完成させる必要があるが、補題 1 より盤面のどの横列でも連続した 3 マスには石を置けないため、先手後手ともに動物を完成させることができず、引き分け型であることが分かる。□

3.1.2 畳敷き戦略

2 つ目は、トーラス盤面の大きさによって、畳敷き戦略 [2] をうまく用いることで引き分けを証明する方法である。トーラス盤面における畳敷き戦略は、通常の盤面の場合と異なるため、以下の定義を導入する。

定義 4 (畳敷きの最小単位) 畳の規則的な敷き詰め方を **パターン** と呼ぶ。あるパターン P に従い無限大の大きさの盤面に畳を敷き詰めるとき、全ての矩形内の畳の敷き方が同じになるように、盤面を格子状に区切ることを考える。このような区切り方の中で、1 つの矩形の大きさが最も小さくなる区切り方における矩形をパターン P の **最小単位** という。

図 7 に具体的な例を示す。このパターンを 1×1 , 2×2 ごとに区切った場合、図 7(a)(b) に示すように矩形内の畳の並びが異なるため、最小単位ではない。 2×2 , 2×4 ごとに区切った場合は、図 7(c)(d) に示すようにすべての矩形内の畳の並びが同じになる。その中で図 7(c) の矩形が最も小さいため、図 7(c) の矩形が最小単位となる。

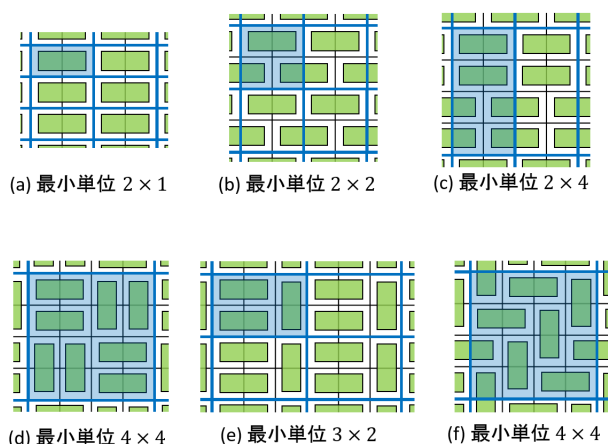


図 8 様々な量の敷き詰めパターンとその最小単位の数

表 1 引き分けを証明できる量敷きの各パターンと動物の対応表.
(a)~(f) は図 8 のパターンに対応している.

(a)		○	○	○	○				○	○
(b)	○	○	○		○			○		○
(c)			○		○	○				○
(d)							○		○	○
(e)										○
(f)	○						○	○		○

最小単位を用いることで、トーラス一般化三並べにおける動物に対して、引き分け型を証明することができる。

定理 3 無限大盤面での一般化三並べにおいて、パターン P による量敷き戦略で動物 A の引き分け型を証明できる時、 P の最小単位を $x \times y$ とすると、任意の $a, b \in \mathbb{N}$ に対して $\text{TorusGTTT}(ax, by)$ における動物 A は引き分け型である。

証明 $ax \times by$ の大きさのトーラス盤面は、縦 a 個横 b 個の $x \times y$ の領域に分割することができる。そのため、分割した領域それぞれに P の最小単位を当てはめることで、盤面全体に隙間なく量を敷き詰めることができる。□

最小単位を用いたトーラス一般化三並べにおける量敷きのパターンの例を図 8 に示す。図に示したように、パターンによって最小単位は大きく異なる。また、無限大盤面で引き分けを証明できるパターンと動物の組み合わせを表 1 に示す。

3.2 各盤面における動物の型判定

これまでに示した性質および、計算機によって求めた各動物の型を表 3 に示す。また、参考として、表 2 にトーラスでない通常の有限盤面における一般化三並べの各動物の

型を示す。これらを比較すると通常の盤面では引き分け型となる動物が、同じ大きさのトーラス盤面では先手必勝型となる場合が見られた。

4. まとめと今後の課題

本論文では、Harary によって提案された一般化三並べを拡張したものとして、盤面を $m \times n$ のトーラス盤面とした $\text{TorusGTTT}(m, n)$ を提案した。通常盤面では引き分け型となる条件下でも、トーラス盤面では先手必勝型となる例が見られた。しかし、通常盤面では先手必勝型だがトーラス盤面では引き分け型となるような条件はまだ見つかっていない。型が解明できていない条件も存在するため、未解明部分の解析を行うことは今後の課題である。また、通常の有限盤面における一般化三並べとは異なる、トーラス盤面ならではの特徴を見つけることが必要である。

参考文献

- [1] Frank Harary. Achieving the skinny animal. *Eureka*, Vol. 42, pp. 8–14, 1982.
- [2] Frank Harary and Heiko Harborth. Achievement and avoidance games with triangular animals. *Recreational Math*, Vol. 18, pp. 110–115, 1985-1986.
- [3] Nándor Sieben. Hexagonal polyomino weak (1,2)-achievement games. *Acta Cybernetica*, Vol. 16, No. 4, pp. 579–585, 2004.
- [4] Jeff Weeks. トーラス・ゲームズ, Last accessed 2015/9/27. <http://www.geometrygames.org/TorusGames/>.
- [5] Keith Wolcott. Tic-tac-toe on topological surfaces: does O always win? (to appear in *J. of Recreational Math*).
- [6] ディプタマ, 成澤和志, 篠原歩. 一般化三並べの拡張: 一手 p 石. 情報処理学会論文誌, Vol. 55, No. 11, pp. 2344–2352, nov 2014.
- [7] 伊藤大雄. パズル・ゲームで楽しむ数学—娯楽数学の世界—. 森北出版株式会社, 2010.
- [8] 八鍬友貴, 本田耕一, 成澤和志, 篠原歩. 一般化三並べの拡張: 目標動物の組合せ. 情報処理学会論文誌, Vol. 55, No. 11, pp. 2336–2343, nov 2014.
- [9] 伊藤由佳理, 坂本秀誠, 押田華奈. ”トーラス碁”をやってみよう! 数学セミナー, 第 631 巻, pp. 50–56. 日本評論社, 3 2014.

表 2 有限盤面での一般化三並べにおける動物の分類結果.

細胞数	1	2	3	4						5										6
動物																				
一般化三並べ(1,1)	○	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
一般化三並べ(2,1)	○	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
一般化三並べ(2,2)	○	○	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
一般化三並べ(3,1)	○	○	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
一般化三並べ(3,2)	○	○	△	△	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
一般化三並べ(3,3)	○	○	△	○	—	△	△	○	△	—	—	△	△	△	△	—	△	△	△	—
一般化三並べ(4,1)	○	○	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
一般化三並べ(4,2)	○	○	△	△	△	△	△	△	△	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
一般化三並べ(4,3)	○	○	○	○	△	△	△	○	△	△	△	△	△	△	△	△	—	△	△	△
一般化三並べ(4,4)	○	○	○	○	△	△	△	○	△	△	△	△	△	△	△	△	—	△	△	△
一般化三並べ(5,1)	○	○	△	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
一般化三並べ(5,2)	○	○	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
一般化三並べ(5,3)	○	○	○	○	△	△	△	○	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
一般化三並べ(5,4)	○	○	○	○	△	△	△	○	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
一般化三並べ(5,5)	○	○	○	○	△	△	△	○	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
一般化三並べ(6,1)	○	○	△	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
一般化三並べ(6,2)	○	○	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
一般化三並べ(6,3)	○	○	○	△	△	△	△	○	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
一般化三並べ(6,4)	○	○	○	○	△	△	△	○	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
一般化三並べ(6,5)	○	○	○	○	△	△	△	○	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
一般化三並べ(6,6)	○	○	○	○	△	△	△	○	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△

○ : 先手必勝型 △ : 引き分け型 □ : 未解明 — : 未定義

表 3 TorusGTTT(m, n) における動物の分類結果. ●は通常盤面では引き分け型だが, トーラス盤面では先手必勝型になる条件.

細胞数	1	2	3	4						5										6
動物																				
TorusGTTT(1,1)	○	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
TorusGTTT(2,1)	○	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
TorusGTTT(2,2)	○	○	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
TorusGTTT(3,1)	○	○	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
TorusGTTT(3,2)	○	○	△	△	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
TorusGTTT(3,3)	○	○	△	○	—	△	△	○	△	—	—	△	△	△	△	—	△	△	△	—
TorusGTTT(4,1)	○	○	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
TorusGTTT(4,2)	○	○	△	△	△	△	△	△	△	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
TorusGTTT(4,3)	○	○	○	○	△	●	●	○	△	△	△	△	△	△	△	△	—	△	△	△
TorusGTTT(4,4)	○	○	○	○	△	○	●	○	△	△	△	△	△	△	△	△	—	△	△	△
TorusGTTT(5,1)	○	○	△	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
TorusGTTT(5,2)	○	○	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
TorusGTTT(5,3)	○	○	○	○	△	●	●	○	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
TorusGTTT(5,4)	○	○	○	○	△	○	○	○	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
TorusGTTT(5,5)	○	○	○	○	●	○	○	○	△	●	●	●	△	△	△	△	△	△	△	△
TorusGTTT(6,1)	○	○	△	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
TorusGTTT(6,2)	○	○	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
TorusGTTT(6,3)	○	○	○	△	△	●	●	○	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
TorusGTTT(6,4)	○	○	○	○	△	○	○	○	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
TorusGTTT(6,5)	○	○	○	○	●	○	○	○	△	●	●	●	△	△	△	△	△	△	△	△
TorusGTTT(6,6)	○	○	○	○	△	△	△	○	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△

○ : 先手必勝型 △ : 引き分け型 □ : 未解明 — : 未定義