Vol.2015-CG-161 No.28
Vol.2015-CVIM-199 No.28
2015/11/7

# 曲率フローに基づく閉曲線ブレンディング

平野 正浩[1,a)]　渡辺 義浩[1]　石川 正俊[1]

**概要**：平面上の任意の閉曲線間の遷移を記述する閉曲線ブレンディングは，計算幾何学や CG の分野において基本的な問題である．従来の閉曲線ブレンディングの手法では，閉曲線の曲率関数同士を線形補間することによって得られた曲率関数と最も近い曲率関数を持つ閉曲線を求める問題として定式化されているので，強い非線形性が生じることが知られている．これに対して，本稿では曲率フローがブレンディングの手法として応用できる可能性に着目する．エネルギー関数として曲率関数の $L^2$ 内積を考えることで，線形制約下での線形フローとして閉曲線の遷移を記述できることを示し，閉曲線ブレンディングを達成する手法について述べる．

## 1. 序論

シェープブレンディング (シェープモーフィング) とは，閉曲線やソリッドモデルの間の遷移を連続に表現する手法であり，コンピュータグラフィックス (CG) 等の分野で活発に研究されている問題である．その中でも対象を閉曲線に限定した問題を閉曲線ブレンディングと呼び，アニメーションの生成 [1] やシェープマッチング [2] 等の様々なアプリケーションにおいて重要な役割を果たしている．閉曲線ブレンディングを計算機で行うためには，ブレンディングする閉曲線を離散化したポリゴンに対して，初期状態のポリゴンの頂点が終了状態のポリゴンのどの頂点に対応するのか，という対応関係を明らかにする必要がある．この問題は頂点対応問題と呼ばれ，多くの研究が行われている [3], [4]．閉曲線ブレンディングは，このような頂点対応問題に加え，各頂点がブレンディング中に通過するパスを求める問題を解く必要がある．この問題は，頂点対応問題によって求められた頂点対の位置を線形補間するといった単純な手法では，上述のアプリケーションに求められる品質を備えたブレンディングが実現できないという難しさがある．このため，特に本稿では，すでに与えられた対応関係を用いて，**図 1** に示すような閉曲線ブレンディングを行う手法を提案する．

閉曲線ブレンディング手法によって生成される曲線の遷移は，曲線の特徴を記述する量に基づいて決定されることが望ましいと考えられる．曲線上の各点における曲がり具合を示す幾何学量である曲率は，形状認識にも用いられる [5] ように，曲線の性質を良くとらえたものである．そこで，曲率を用いることが閉曲線ブレンディングに対して有効であるという視点のもと，より自然なブレンディングを達成するために，曲線上の各点に対応する曲率を線形補間する手法が提案されてきた [6], [7].

しかし，曲率を直接操作することがブレンディングの自然さに寄与する一方で，閉曲線に応用することは困難であることが知られている．これは，初期状態の閉曲線と終了状態の閉曲線の曲率関数を線形補間して得られた曲率関数から再構成した曲線は，一般に閉曲線にならないことや，曲線の始点と終点が一致しているという曲線の位置そのものに関する条件を，曲率のみによって書き下すことが困難であることに起因していると考えられる．

以上のような問題点を克服するため，閉曲線を生成するという制約のもと，曲率関数を用いて曲線ブレンディングを達成する手法が提案されてきた．Sederberg らは，各辺の長さを調節することによって曲線が閉曲線条件を満たす手法を提案しているが [6]，著者らも指摘しているように，単純な形状同士のブレンディングであったとしても大きく辺長を調整する場合がある．他にも，辺長を調整することで離散曲率の値も変わってしまうため，線形補間により求めた曲率関数との $L^2$ ノルムが大きく乖離する傾向がある．また Saba らは，ポリゴンの各頂点の内角を調整することで閉曲線条件を満たす曲線の推定方法を提案しているが [7]，複雑な制約を持つ非線形問題を解く必要があるため，計算コストが大きく，リアルタイムな処理に不向きである上に

[1] 東京大学 大学院 情報理工学系研究科
Graduate School of Information Science and Technology, The University of Tokyo, 7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo, 113-8656, Japan

[a)] Masahiro_Hirano@ipc.i.u-tokyo.ac.jp

© 2015 Information Processing Society of Japan

**図 1** 提案手法による閉曲線ブレンディングの例．この例では，「1」から「2」への閉曲線ブレンディングを実現している．

**Fig. 1** An illustration of closed curve blending by proposed method. This figure shows blending between polygons in the shape of '1' and '2'.

局所最適解に陥る可能性があるという課題がある．

そこで本稿では，$\mathbb{R}^2$ 平面上の曲線を，多様体 $M$ から $\mathbb{R}^2$ へのはめ込みであることに注目し，関数空間上の点として捉えることで，曲線間の遷移を記述する曲線ブレンディングを，幾何学的フローを設計する問題として定式化することを提案する．

幾何学的フローとは，曲率のような幾何学量の入った多様体上で定義された汎関数の勾配フローである．幾何学的フローを用いる手法は，曲線や曲面に関する幾何処理において近年注目を浴びている手法 [8] である．Desbrun らは，曲面 $M$ に対して定義されたメンブレンエネルギーに対して最急降下法により導出される平均曲率フローを用いることで，曲面のフェアリングを実現している [9]．また，Willmore エネルギーに基づく Willmore フローを用いる事でフェアリングを実現している研究も行われている [10], [11], [12]．

このように，幾何学的フローは，曲線や曲面の形状の遷移を記述する手法であると解釈することができるため，本稿で提案するように，閉曲線ブレンディングにも応用することが可能であると考えられる．しかし，フェアリングの際に用いられるエネルギーは，対象となる形状の次元において最もエネルギーの低い形状 (2 次元の場合は円) を基準としたものであるため，直接閉曲線ブレンディングに応用することは困難であり，エネルギー関数の最適な設計が必要である．

閉曲線ブレンディングの入力としては，$C^2$-級の曲線が仮定されている研究が多く存在する [7]．しかし，曲率関数を構成する際に必要な弧長パラメトリゼーションを解析的に行うことが困難であるため，これらの研究では曲線を離散化することで問題を定式化している．

このような背景のもと，本稿では画像データからの閉曲線ブレンディング等の実応用的な場面も想定し，離散曲線に対して幾何学的フローを構成する．すなわち，ブレンディングの初期状態に対応する曲線を離散化して得られたポリゴンと，終了状態に対応するポリゴンそれぞれに対応する離散曲率ベクトルから $L^2$ 内積に関する勾配フローを考えることにより，自然な曲線ブレンディングを，高速にかつ数値的に安定に構成する手法を提案する．提案手法の有効性を確認するため，関連研究との比較実験を行うことにより，従来手法よりも高速でかつ自然なブレンディングが達成されたことを確認した．

## 2. 準備

### 2.1 曲率関数

$\mathbb{R}^2$ 上の $C^2$-級の曲線に関する基本的な知識を整理する．$\mathbb{R}^2$ 上の任意の曲線 $\gamma(u) : I = [a, b] \to \mathbb{R}^2$ が与えられたとき，弧長パラメータ $s$ を

$$s = \int_a^u \left| \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}u} \right| \mathrm{d}u \tag{1}$$

と定義する．このとき，任意の $u$ に対して $|\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}u| \neq 0$ であると仮定して，曲線 $\gamma$ を弧長パラメータ $s$ で書き表したものを $\gamma(s) : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ とする．(ただし，$L$ は曲線 $\gamma$ の長さであるとする．) ここで，$|\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}s| = 1$ となることに注意する．任意の弧長パラメータ $s \in [0, L]$ に対応する曲線上の点における単位接ベクトルを $\boldsymbol{e}_t$ とし，それに反時計回りに直交する単位法線ベクトルを $\boldsymbol{e}_p$ とする．このとき，曲線 $\gamma(s)$ に対応する曲率関数 $\kappa(s)$ を

$$\kappa(s) : s \mapsto \frac{\boldsymbol{e}_t'}{\boldsymbol{e}_p} \tag{2}$$

と定義する．(ただし，$\boldsymbol{e}_t' = |\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t/\mathrm{d}s|$．)

曲線に関する微分幾何学の基本的な定理 [13] によれば，弧長パラメータを持つ 2 曲線 $\gamma_1(s)$ と $\gamma_2(s)$ の曲率関数 $\kappa_1(s)$ と $\kappa_2(s)$ が一致するための必要十分条件は，回転と平行移動を用いて $\gamma_1(s)$ を $\gamma_2(s)$ に重ねることができることである．曲線ブレンディングにおいて，$\mathbb{R}^2$ 平面における曲線の位置は重要ではないため，回転と平行移動によって重ねることができる曲線を同一視することとする．

また Saba らは弧長パラメータを持つ曲線 $\gamma_1(s) : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \gamma_2(s) : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ の間のパラメトリック距離

$$\bar{d}(\gamma_1, \gamma_2) = \max_{s \in [0,1]} \|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)\| \tag{3}$$

に関して，次のような定理を示した [7]．

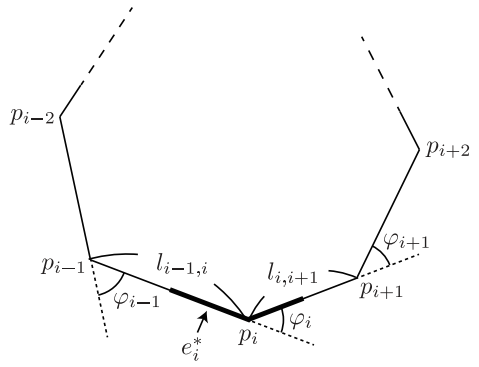


**図 2** ポリゴンに関するパラメータの定義
**Fig. 2** Definitions of polygon parameters.

**定理 1** $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ でありかつ $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$ であるような曲線 $\gamma_1, \gamma_2$ を考え，これらの曲率関数を $\kappa_1, \kappa_2$ とする．このとき，ある $\varepsilon$ が存在して $\|\kappa_1 - \kappa_2\|_2 \leq \varepsilon$ であるとき，$\bar{d}(\gamma_1, \gamma_2) \leq \varepsilon$ となる． □

この定理から，曲率関数の $L^2$ ノルムによって，曲線のパラメトリック距離を上から抑えることができることがわかる．

### 2.2 離散曲率ベクトル

滑らかな閉曲線 $\gamma(u) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ を離散化することを考える．$[a, b]$ の任意の分割 $\{a = \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n = b\}$ に対して，**図 2** に示すように，対応する曲線上の点 $p_i = \gamma(\sigma_i), (i = 0, 1, \ldots, n)$ の集合を得る．$\gamma$ が閉曲線であったとき，$p_0 = p_n$ である．ここで，区分線形な $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$\hat{\gamma}(u) = \frac{u - \sigma_{i-1}}{\sigma_i - \sigma_{i-1}} p_i + \frac{\sigma_i - u}{\sigma_i - \sigma_{i-1}} p_{i-1} \ (\sigma_{i-1} \leq u < \sigma_i) \quad (4)$$

を考える．この区分線形関数 $\hat{\gamma}$ の像をポリゴンと呼び，$P = \{p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}\}$ をその頂点集合と呼ぶ．$P$ を結ぶ線分をエッジと呼び，その集合を $E$ で表す．文脈から明らかなときは，頂点集合 $P$ によってポリゴン自体を指す．

前節で定義した曲率は微分を伴う操作であったため，ポリゴンに対して直接適用することはできない．そこで，離散微分幾何 [14] を用いて離散曲率を導出する．ストークスの定理を用いると，ある頂点 $p_i \in P$ の双対辺 $e_i^\star$ に沿った曲率の積分値は，その頂点における外角 $\varphi_i \in \mathbb{R}$ と等しいことがわかる．したがって，離散 Hodge スター $\hat{\star}$ を用いて，頂点 $p_i$ における曲率を離散化して得られる離散曲率を求めると

$$\hat{\kappa}_i = \hat{\star}\varphi_i \quad (5)$$

となる．離散 Hodge スターを用いることは，双対辺上で離散量を区分定数内挿するということを意味するため，双対辺の長さ $L_i = \|e_i^\star\| = (\|p_{i+1} - p_i\| + \|p_i - p_{i-1}\|)/2$ を用いて，

$$\hat{\kappa}_i = \frac{\varphi_i}{L_i} \quad (6)$$

と書き下せる．離散曲率を用いて，頂点集合 $P$ を持つポリゴンの離散曲率ベクトルを，

$$\hat{\boldsymbol{\kappa}} = [\hat{\kappa}_0, \hat{\kappa}_1, \ldots, \hat{\kappa}_{n-1}]^{\mathrm{T}} \quad (7)$$

と定義する．

4.5 節でも確認するように，各エッジの長さと離散曲率ベクトル $\hat{\boldsymbol{\kappa}}$ が与えられれば，離散曲線が一意に定まる．

### 2.3 曲線のエネルギー

離散曲線に対してエネルギーを定義することを考える．弧長パラメータによって表された滑らかな曲線 $\gamma(s) : I = [0, L] \to \mathbb{R}^2$ の曲率関数が，どの程度円の曲率関数から離れているのかを図る指標としてエネルギー

$$E(\gamma) = \int_0^L \kappa^2 \mathrm{d}s \quad (8)$$

を用いる．これを離散化すると，離散曲線のエネルギーは

$$E(\hat{\boldsymbol{\kappa}}) = \|\hat{\boldsymbol{\kappa}}\|^2 \quad (9)$$

とかける．このエネルギーのことを，曲率エネルギーと呼ぶ．

### 2.4 曲率フロー

弧長パラメータを持つ任意の曲線 $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ の曲率関数 $\kappa(s)$ を要素として持つ関数空間を考える．この空間は完備であるので，$L^2$ 内積

$$\langle\langle \kappa_1, \kappa_2 \rangle\rangle = \int \kappa_1(s)\kappa_2(s)\mathrm{d}s \quad (10)$$

を導入することで Hilbert 空間 $M$ が構成できる [15]．

このヒルベルト空間 $M$ に対して定義されるエネルギー関数 $E : M \to \mathbb{R}$ に対して，Fréchet 微分を考える．また，$M$ 上のベクトル場 $X : \kappa \in M \mapsto -\nabla E(\kappa)$ は完備であるので，$M$ 上で幾何学的フロー $\dot{E} = -\nabla E$ が構成できる [16]．この幾何学的フローを曲率フローと呼ぶ．

このように，$L^2$ 内積による Fréchet 微分を考えることにより，位置による微分を含まない形でフローを記述することが可能となり，高次の非線形性を回避することができることが示されている [12]．

以上の議論を離散化する．離散曲線に対しては，有限次元ベクトルである離散曲率ベクトルを用いてフローを書き下すことができる．すなわち，曲率フローは

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\kappa}}} = -\nabla E(\hat{\boldsymbol{\kappa}}) \quad (11)$$

とかける．$E = \|\hat{\boldsymbol{\kappa}}\|^2$ と定義して得られるフロー $\dot{\hat{\boldsymbol{\kappa}}} = -2\hat{\boldsymbol{\kappa}}$ は曲線のフェアリングとして用いられる [12]．このフローは線形であるので，数値的に安定に計算することができる．

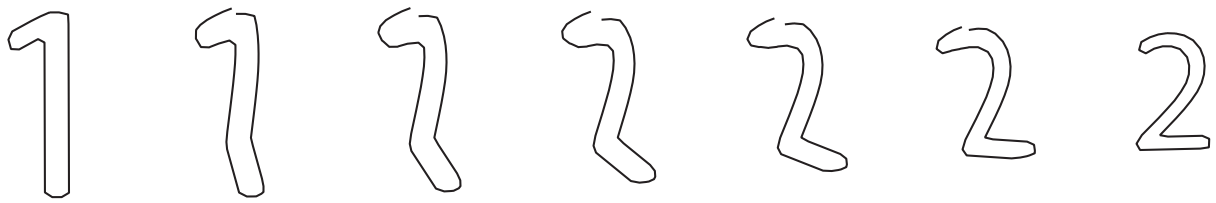

**図 3** 曲率関数同士の線形補間のみで構成した曲率関数を持つ曲線は一般に閉曲線にならない．
**Fig. 3** Curves generated by curvature-based interpolation are not necessarily closed.

## 3. 関連研究

閉曲線ブレンディングとは，2 つの閉曲線 $\gamma_s : I_s \to \mathbb{R}^2, \gamma_g : I_g \to \mathbb{R}^2$ が与えられたとき，写像 $t \mapsto \gamma_t$ が連続でありかつ $\gamma_0 = \gamma_s, \gamma_T = \gamma_g$ であるような曲線族 $\{\gamma_t\}_{t\in[0,T]} : I_t \to \mathbb{R}^2$ を求める問題である．

最も単純なブレンディング手法は，予め正規化した曲線対 $\gamma_s, \gamma_g$ 自体を線形補間することで，曲線族 $\{\gamma_\tau\}_{\tau\in[0,1]} = (1-\tau)\gamma_s + \tau\gamma_g$ を得るものである．しかしこの手法は，5 章でも示すように，曲線のパラメトリゼーションや方向によって結果が異なることにより，不自然なブレンディングを生成する．

そこで，曲線の曲率を用いることで，曲線の位置や方向，パラメトリゼーションによらないブレンディングを実現する手法が提案されてきた．これらの手法では，定義域を正規化した後，弧長パラメータ $s$ を用いてリパラメトリゼーションを行った $\bar{\gamma}_s(s) : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \bar{\gamma}_g(s) : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ から構成した曲率関数 $\bar{\kappa}_s, \bar{\kappa}_g$ を考える．このとき，線形補間することで得られた曲率関数 $\{\bar{\kappa}_\tau\}_{\tau\in[0,1]} = (1-\tau)\bar{\kappa}_s + \tau\bar{\kappa}_g$ を用いてブレンディングを行う手法である．しかし，弧長パラメータを持たない曲線の曲率関数を解析的に表現することは困難であることが知られており，また，$\{\bar{\kappa}_\tau\}_{\tau\in[0,1]}$ に対応する曲線族は，**図 3** に示すように一般に閉曲線族とならないため，閉曲線ブレンディングに応用する際に問題点が存在する．

このうち前者の問題は，滑らかな曲線を離散化してポリゴンを構成することで解決することができる．後者の問題は，また，ポリゴンの内角を保ったままエッジ長を調整する手法 [3], [6], [17] と，エッジ長を保ったまま内角を調整する手法 [7] が提案されている．エッジ長を調整する手法では，閉形式の解としてブレンディングが求められるが，単純な形状同士のブレンディングにおいても大きく辺長を調整しなければならない場合がある．一方で，内角を調整する手法では非線形最適化問題を解く必要がある．すなわち，ポリゴン $P = \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ に対して，$\{\bar{\kappa}_\tau\}_{\tau\in[0,1]}$ から計算した離散曲率ベクトル $\{\hat{\boldsymbol{\kappa}}_\tau\}_{\tau\in[0,1]}$ を用いて，非線形最適化問題

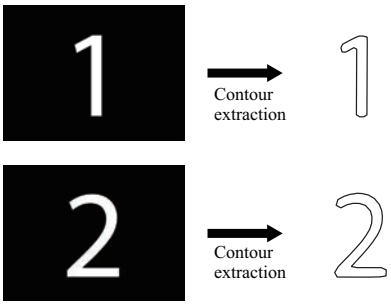


**図 4** 入力とする 2 値画像と輪郭抽出により生成したポリゴン．上図が初期状態に対応し，下図が終了状態に対応する．
**Fig. 4** Input binary images and generated polygons by contour extraction. Top row corresponds to initial state of blending, and bottom row corresponds to target state.

$$\begin{aligned} &\min ||\hat{\boldsymbol{\kappa}} - \hat{\boldsymbol{\kappa}}_\tau||^2 \\ &\text{s.t. } p_0 = p_n \end{aligned} \tag{12}$$

の解 $\hat{\boldsymbol{\kappa}}$ を求めるものである．この手法は，問題の制約式が強い非線形性を持つことから，求めた解が大域的最適解を持つことが保証されない上に，計算に時間がかかるという問題点がある．

また，ポリゴンの頂点と辺に対してエネルギーを適切に設計することで，自己交差を回避するフェアリングやブレンディングを実現する手法が提案されている [18], [19]．例えば Iben らによって提案されているブレンディング手法 [19] では，頂点と辺の間のユークリッド距離の 2 乗に反比例するエネルギー関数を用いているが，その勾配は非線形式となってしまい大域的最適解が保証されない．また，多くの計算時間を要するため，リアルタイムな処理が必要とされる場面では，適用することが困難な手法である．

## 4. 曲率フローに基づく閉曲線ブレンディング手法

本章では，提案手法である曲率フローに基づく閉曲線ブレンディング手法について述べる．

### 4.1 輪郭画像による離散曲率ベクトルの生成

本稿では画像データから輪郭を取得することにより曲線ブレンディングの初期状態に相当するポリゴンと終了状態に相当するポリゴンを生成する．これらのポリゴンをそれ

ぞれ，スタートポリゴン $P_s$ とゴールポリゴン $P_g$ と呼ぶ．

本稿において，これらのポリゴンを生成する元となる入力画像は，**図 4** に示すように適切な画像処理によって得られた 2 値画像である．これらの 2 値画像に対して輪郭抽出を行って取得した形状の輪郭上にあるピクセルの位置座標を反時計回りに並べた集合 $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_{|C|}\}$ を考える．この集合 $C$ を用いて，頂点数 $N$ のポリゴン

$$P = \left\{ c_j | j = \left[ \frac{i|C|}{N} \right], i = 1, 2, \ldots, N \right\} \tag{13}$$

を生成する (ただし，$[\cdot]$ は Gauss 記号)．この操作を，入力画像対それぞれに対して行いポリゴン $P_s, P_g$ を生成した後，2.2 節で説明した手法に基づいて離散曲率ベクトル $\hat{\boldsymbol{\kappa}}_s, \hat{\boldsymbol{\kappa}}_g$ を計算する．

このようにして生成したポリゴンと元の曲線とのハウスドルフ距離は $1/N^2$ のオーダーを持つことが知られており [20]，上述の離散化手法は元の曲線を近似するものであることが証明されている．

### 4.2 ジョイントパーティション

離散曲率ベクトルは，弧長パラメータによって表された離散曲線の頂点集合における離散曲率の値を並べたものである．曲率フローは，各頂点で同じ弧長パラメータを持つ離散曲率ベクトル間の遷移を記述するものであるので，スタートポリゴンとゴールポリゴンの頂点集合から曲線 $\gamma$ の逆像によって対応付けされる分割を一致させる必要があるが，**図 5** に示すように，一般にこれらの分割は一致しない．

そこで提案手法では，ジョイントパーティション [7] と呼ばれる手法によって分割を一致させる．スタートポリゴン $P_s$ とゴールポリゴン $P_g$ を生成し，それぞれのエッジの長さの総和が 1 となるように正規化を行った後，2.2 節に従って生成した離散曲率ベクトルをそれぞれ $\hat{\kappa}_s, \hat{\kappa}_g$ とし，対応する分割を $\sigma_s, \sigma_g$ とする．このとき，$\sigma_s$ と $\sigma_g$ のジョイントパーティション $\sigma_j$ を，$\sigma_j = \sigma_s \cup \sigma_g$ と定義することで，スタートポリゴンとゴールポリゴンの分割を共有することができる．正規化したスタートポリゴンとゴールポリゴンは，$P$ を通る $[0, 1]$ 上で定義された区分線形な関数 $\hat{\gamma}_s, \hat{\gamma}_g$ の像であると考えることができる．ジョイントパーティションによって，新たに生成されたポリゴンを $\hat{P}_s, \hat{P}_g$ とすると，

$$\hat{P}_s = \{p_j | p_j = \hat{\gamma}_s(s); s \in \sigma_j\} \tag{14}$$

$$\hat{P}_g = \{p_j | p_j = \hat{\gamma}_g(s); s \in \sigma_j\} \tag{15}$$

と書ける．これらのポリゴンから計算した離散曲率ベクトルを $\hat{\boldsymbol{\kappa}}_s, \hat{\boldsymbol{\kappa}}_g$ とする．

### 4.3 最急降下法による曲率フローの設計

フェアリングを目的として曲率フローを用いる手法 [12] は，曲率フローを導出するエネルギー関数として曲率エネルギーを用いればよいが，これをブレンディングに応用する際には，最適なエネルギー関数の設計が必要である．

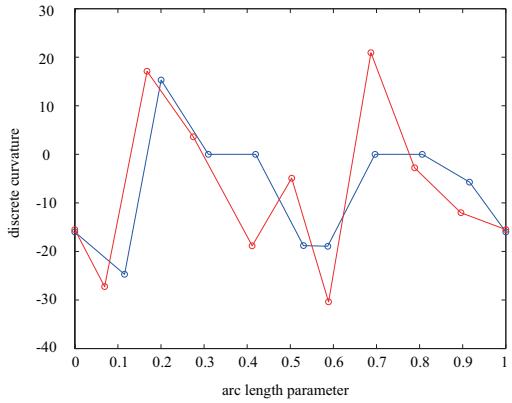


**図 5** スタートポリゴンとゴールポリゴンの離散曲率ベクトル
**Fig. 5** Discrete curvature vector of initial polygon and target polygon.

ジョイントパーティションによって生成した離散曲率ベクトルを $\hat{\boldsymbol{\kappa}}_s, \hat{\boldsymbol{\kappa}}_g$ とする．例えば単純に曲率エネルギーの差 $E = \|\hat{\boldsymbol{\kappa}}\|^2 - \|\hat{\boldsymbol{\kappa}}_g\|^2$ をエネルギー関数とする曲率フローは $\dot{\hat{\boldsymbol{\kappa}}} = -2\hat{\boldsymbol{\kappa}}$ となるため，ブレンディングを実現することはできず，フェアリングとなってしまう．

そこで本稿では，曲率関数の関数空間 $M$ 上のエネルギー関数として $E = \|\hat{\boldsymbol{\kappa}} - \hat{\boldsymbol{\kappa}}_g\|^2$ を用いることを提案する．このエネルギーの $L^2$ 内積に関する勾配を取り，曲率フロー

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\kappa}}} = -2(\hat{\boldsymbol{\kappa}} - \hat{\boldsymbol{\kappa}}_g) \tag{16}$$

を求め，初期条件として $\hat{\boldsymbol{\kappa}}_{t=0} = \hat{\boldsymbol{\kappa}}_s$ を用いることで，ブレンディングをこの曲率フローで表現する．このようにして定義された曲率フローは，付録 A.1 に示すように $\hat{\boldsymbol{\kappa}}_g$ に向かって収束する．

また，数値計算のためこの曲率フローを離散化を行う．この曲率フローは線形であり，位置に関する微分を含まない．このため安定性が高く，前進オイラー法を用いることができる．すなわち，

$$\hat{\boldsymbol{\kappa}}_{t=t+\mathrm{d}t} = (1 - 2\mathrm{d}t)\hat{\boldsymbol{\kappa}}_{t=t} + 2\hat{\boldsymbol{\kappa}}_g \mathrm{d}t \tag{17}$$

にしたがって数値計算を行う．

### 4.4 閉曲線条件の適用

4.3 節で導出した曲率フローを閉曲線に応用する際には，以下に示す 2 つの条件を制約として加えた更新方向を用いる [12]．すなわち，弧長パラメータを持つ $C^2$-級の閉曲線 $\gamma(s) : [0, L] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ に対して，

- $\gamma'(0) = \gamma'(L)$ (Neumann 境界条件)
- $\gamma(0) = \gamma(L)$ (Dirichlet 境界条件)

を満たすように曲率フローを構成する．このうち Neumann 境界条件は，閉曲線における全曲率の和がその曲線の回転数 $k \in \mathbb{Z}$ を用いて

$$\int_0^L \kappa \mathrm{d}s = 2\pi k \tag{18}$$

と書ける．初期状態に対応する閉曲線が Neumann 条件を満たしていると仮定すると，両辺を時間微分して

$$\int_0^L \dot{\kappa} \mathrm{d}s = 0 \tag{19}$$

となることから，更新方向と定数関数 $\mathbf{1}$ が $L^2$ 直交すれば，曲率フローが Neumann 条件を満たすことがわかる．一方で，Dirichlet 境界条件は，

$$\int_0^L \gamma' \mathrm{d}s = 0 \tag{20}$$

と書けることから，微分幾何の計算を行うことにより

$$\int_0^L \dot{\kappa}\gamma = 0 \tag{21}$$

となる．したがって Dirichlet 境界条件は，$\dot{\kappa}$ と $x$-座標関数 $\gamma^x$，$y$-座標関数 $\gamma^y$ それぞれが $L^2$ 直交することであるとわかる．以上の制約条件を離散化すると，

$$\langle\langle \dot{\boldsymbol{\kappa}}, \mathbf{1} \rangle\rangle = \langle\langle \dot{\boldsymbol{\kappa}}, \gamma^x \rangle\rangle = \langle\langle \dot{\boldsymbol{\kappa}}, \gamma^y \rangle\rangle = 0 \tag{22}$$

とかける．

4.3 節で導出した曲率フローにこれらの制約条件を課すためには，$\hat{\boldsymbol{\kappa}} - \hat{\boldsymbol{\kappa}}_g$ から，定数ベクトル $\mathbf{1}$，$x$-座標関数 $\gamma^x$，$y$-座標関数 $\gamma^y$ と直交する成分のみ求めればよい．これは，Gram-Schmidt 法によって行うことができる．

### 4.5 離散曲線の再構成

上記のプロセスに従って得られた各頂点ごとの離散曲率ベクトル $\hat{\boldsymbol{\kappa}} = [\hat{\kappa}_0, \hat{\kappa}_1, \ldots, \hat{\kappa}_{m-1}]$(ただし，$m = |P_s| = |P_g|$) から，ポリゴンを構成する頂点集合 $P = \{p_0, p_1, \ldots, p_{m-1}\}$ を計算する．ポリゴンのエッジの長さは，4.1 節で生成したときの値を用いればよい．$p_i$ と $p_{i+1}$ の距離を $l_{i,i+1}$ とする 2.2 節で述べたように，離散曲率ベクトルは曲線の回転及び並進移動に対して不変であるので，$\|p_0 - p_1\| = l_{0,1}$ を満たし，$p_1 - p_0$ が $x-$ 軸と平行になるように $p_0, p_1$ を固定する．各頂点に対応する外角 $\varphi_i (i \in \{0, 1, \ldots, m-1\})$ は，式 (6) を用いて，

$$\varphi_i = \hat{\kappa}_i L_i \tag{23}$$

となることから，$p_i (i = 2, 3, \ldots, m-1)$ の位置は

$$p_i = p_{i-1} + l_{i-1,i} \left[ \cos\left(\sum_{j=1}^{i-1} \varphi_j\right), \sin\left(\sum_{j=1}^{i-1} \varphi_j\right) \right]^{\mathrm{T}} \tag{24}$$

にしたがって帰納的に再構成できる．

## 5. 閉曲線ブレンディング実験

提案する曲率フローに基づく閉曲線ブレンディング手法の有効性を確認するために，4 章の提案手法によって実験を行った．

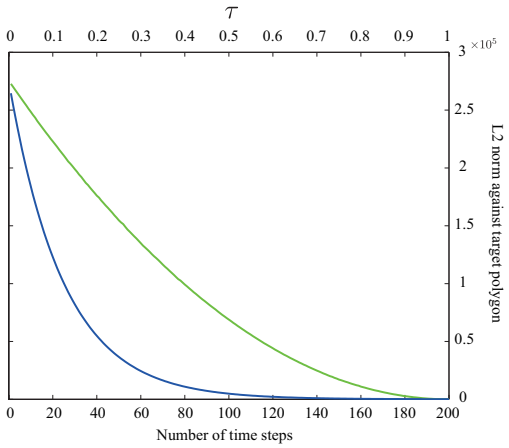


**図 6** ポリゴンとゴールポリゴンとの L2 ノルムの収束性の違い．緑の線が Saba によるもの [7] で，青の線が提案手法によるもの．

**Fig. 6** L2 norm between intermidiate polygon and target polygon. Green line and blue line indicate convergence in L2 norm by Saba's method and the proposed method, respectively.

### 5.1 実験条件

入力とする 2 値画像から，4.1 節で述べた方法に従って頂点数 50 のポリゴンを生成した．提案手法におけるタイムステップは $\mathrm{d}t = 0.01$ とし，合計 200 ステップ行った．

なお，実験に用いた計算機は，2.6GHz Intel Core i7 を搭載する MacBook Pro (Retina, Mid2012) である．

### 5.2 ブレンディング結果

提案手法の有効性を確認するために，「チョキ」から「パー」に遷移する閉曲線ブレンディング (実験 1) と，「開いた手」から「サムアップ」に遷移する閉曲線ブレンディング (実験 2) を行った．**図 7**, **図 8** は，その結果を示した図である．比較対象として用いたのは，3 章で述べた頂点位置の線形補間による手法と Saba らによって提案された手法 [7] である．これらの比較手法は，スタートポリゴンとゴールポリゴンの頂点位置や離散曲率ベクトルの線形補間を利用しており，3 章で述べた線形補間のパラメータ $\tau$ を用いてブレンディング曲線を求めるものであるが，提案手法ではパラメータ $\tau$ に相当するものが存在しない．

そこで，提案手法によって求めたブレンディング曲線の中から，これらの線形補間をベースにした手法に対応するブレンディング曲線を以下のようにして求めた．まず，提案手法と Saba らによる手法によってそれぞれ生成されたブレンディング曲線の離散曲率ベクトルとゴールポリゴンの離散曲率ベクトルのユークリッドノルムを求める．**図 6** に示すのは，図 7 で示す実験において，ゴールポリゴンとの $L^2$ ノルムの 2 乗をステップごとにプロットしたものである．Saba らによる手法は離散曲率ベクトルの線形内挿に基づくものであるので，2 次関数的に収束しているが，提案手法は最急降下法に基づくものであるので，指数関数

**表 1** 1 つのブレンディング曲線の生成に要した平均計算時間
**Table 1** Average computation time for generating single blending curve.

| | Linear | Saba,2014[7] | Proposed |
|---|---|---|---|
| Exp. 1 | 27.16[$\mu$s] | $3.544 \times 10^6$[$\mu$s] | 75.87[$\mu$s] |
| Exp. 2 | 26.16[$\mu$s] | $3.532 \times 10^6$[$\mu$s] | 72.97[$\mu$s] |

的に収束していることが確認できる．これらの結果は，理論的に導出した結論と一致する．(付録 A.1 に導出過程をまとめた．)

このユークリッドノルムの近いもの同士が対応するブレンディング曲線であるとし，Saba らによる手法で求めたブレンディング曲線に対して，それぞれ対応するブレンディング曲線を選出した．(定理 1 を用いた．)

### 5.3 ブレンディングに要する計算時間

1 つのブレンディング曲線を生成するのに必要な計算時間を，提案手法と比較手法それぞれで計測した結果を**表 1** に示す．提案手法は C++を用いて実装したが，Saba らの手法は論文で提案されているように Matlab で実装した．非線形最適化ソルバーは `fmincon` を用い，内点法により非線形最適化問題を解いた．ここで，関数評価の最大回数のパラメータを 10,000 とした．

この結果から提案手法は，Saba らの手法に比べて約 48,000 倍高速にブレンディング曲線が計算でき，リアルタイムな曲線ブレンディングを可能にする手法であることがわかる．

## 6. 結論

本稿では，平面上の任意の閉曲線間の遷移を記述する閉曲線ブレンディングに対して，曲率フローに基づく手法を提案した．曲率エネルギーを，離散曲率ベクトルの差の 2 乗として定式化し，その $L^2$ 内積に関する勾配を考えることにより，曲率フローが線型かつ，曲率のみに依存する形式で記述し，数値的に安定なブレンディングを達成した．また，従来の非線形最適化問題に帰着させて解く手法に比べて，はるかに高速な閉曲線ブレンディングを実現することが可能になり，CG などの分野でリアルタイムな処理が要求される場面においても活用することができる．

また，本手法の制約ベクトルを適切に設計することで，閉曲線ブレンディング以外の問題にも応用することが可能である．例えば，曲線の両端点に対して個別の位置制約条件を与えることにより，冗長ロボットの軌道生成に用いることができる．

今後の課題としては，ブレンディングの品質という点においても高い水準を達成していると言えるが，閉曲線ブレンディングの品質を評価する指標が存在しないため，定量的に評価することができる指標を構築し，改めて結果を評価することが挙げられる．

### 参考文献

[1] Alexa, M., Cohen-Or, D. and Levin, D.: As-rigid-as-possible Shape Interpolation, *In Proceedings of ACM SIGGRAPH*, pp. 157–164 (2000).
[2] Belongie, S., Malik, J. and Puzicha, J.: Shape Matching and Object Recognition Using Shape Contexts, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 24, No. 4, pp. 509–522 (2002).
[3] Sederberg, T. W. and Greenwood, E.: A Physically Based Approach to 2–D Shape Blending, *In Proceedings of ACM SIGGRAPH*, pp. 25–34 (1992).
[4] Mortara, M. and Spagnuolo, M.: Similarity measures for blending polygonal shapes, *Computers & Graphics*, Vol. 25, No. 1, pp. 13–27 (2001).
[5] Li, H., Zhang, H., Wang, Y., Cao, J., Shamir, A. and Cohen-Or, D.: Curve Style Analysis in a Set of Shapes, *Computer Graphics Forum*, Vol. 32, No. 6, pp. 77–88 (2013).
[6] Sederberg, T. W., Gao, P., Wang, G. and Mu, H.: 2–D Shape Blending: An Intrinsic Solution to the Vertex Path Problem, *In Proceedings of ACM SIGGRAPH*, pp. 15–18 (1993).
[7] Saba, M., Schneider, T., Hormann, K. and Scateni, R.: Curvature-based Blending of Closed Planar Curves, *Graphical Models*, Vol. 76, No. 5, pp. 263–272 (2014).
[8] Botsch, M., Kobbelt, L., Pauly, M., Alliez, P. and Lévy, B.: *Polygon Mesh Processing*, A K Peters, Ltd. (2010).
[9] Desbrun, M., Meyer, M., Schröder, P. and Barr, A. H.: Implicit Fairing of Irregular Meshes Using Diffusion and Curvature Flow, *In Proceedings of ACM SIGGRAPH*, pp. 317–324 (1999).
[10] Bobenko, A. I. and Schroder, P.: Discrete Willmore flow, *In Proceedings of Eurographics Symposium on Geometry Processing*, pp. 101–110 (2005).
[11] Wardetzky, M., Bergou, M., Harmon, D., Zorin, D. and Grinspun, E.: Discrete Quadratic Curvature Energies, *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 24, No. 8-9, pp. 499–518 (2007).
[12] Crane, K., Pinkall, U. and Schröder, P.: Robust Fairing via Conformal Curvature Flow, *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 32, No. 4 (2013).
[13] 小林昭七：曲線と曲面の微分幾何，裳華房 (1977).
[14] Crane, K., de Goes, F., Desbrun, M. and Schröder, P.: Digital Geometry Processing with Discrete Exterior Calculus, *ACM SIGGRAPH 2013 courses* (2013).
[15] 山田功：工学のための関数解析，数理工学社 (2009).
[16] 松本幸夫：多様体，東京大学出版会 (2008).
[17] Surazhsky, T. and Elber, G.: Metamorphosis of Planar Parametric Curves Via Curvature Interpolation, *International Journal of Shape Modeling*, Vol. 8, No. 2, pp. 201–216 (2002).
[18] Cantarella, J. H., Demaine, E. D., Iben, H. N. and O'Brien, J. F.: An Energy-driven Approach to Linkage Unfolding, *In Proceedings of the 20th Annual Symposium on Computational Geometry*, pp. 134–143 (2004).
[19] Iben, H. N., O'Brien, J. F. and Demaine, E. D.: Refolding Planar Polygons, *Discrete and Computational Geometry*, Vol. 41, No. 3, pp. 444–460 (2009).
[20] Floater, M. S.: Arc length estimation and the convergence of polynomial curve interpolation, *BIT Numerical Mathematics*, Vol. 45, No. 4, pp. 679–694 (2005).

© 2015 Information Processing Society of Japan

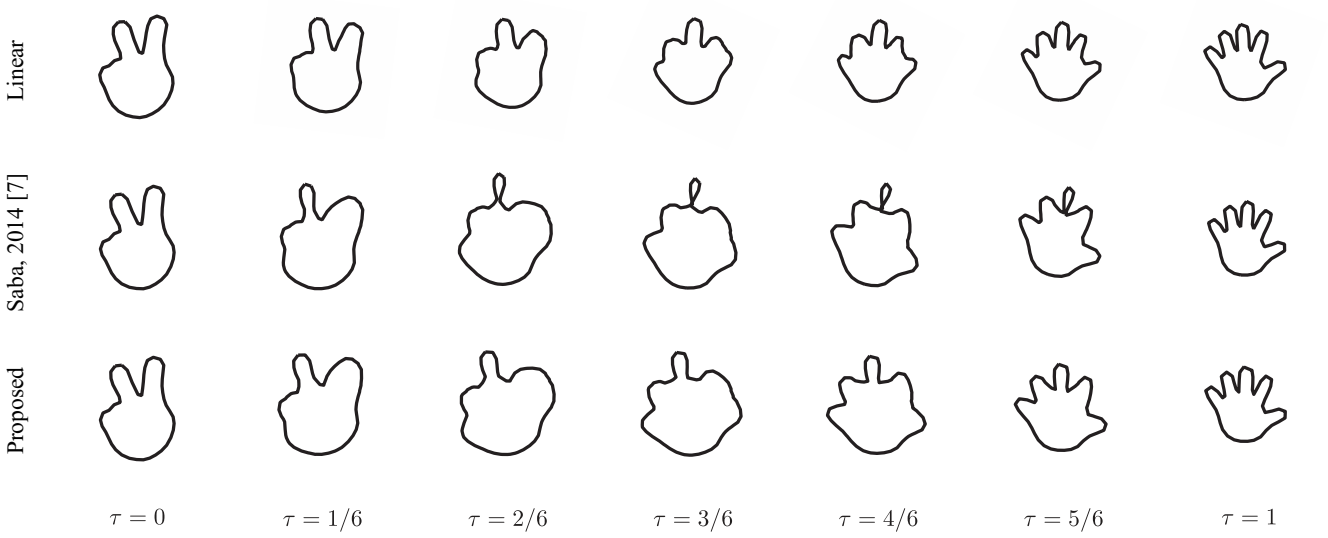


**図 7** 実験 1 におけるブレンディング結果
**Fig. 7** Blending results in Exp. 1.

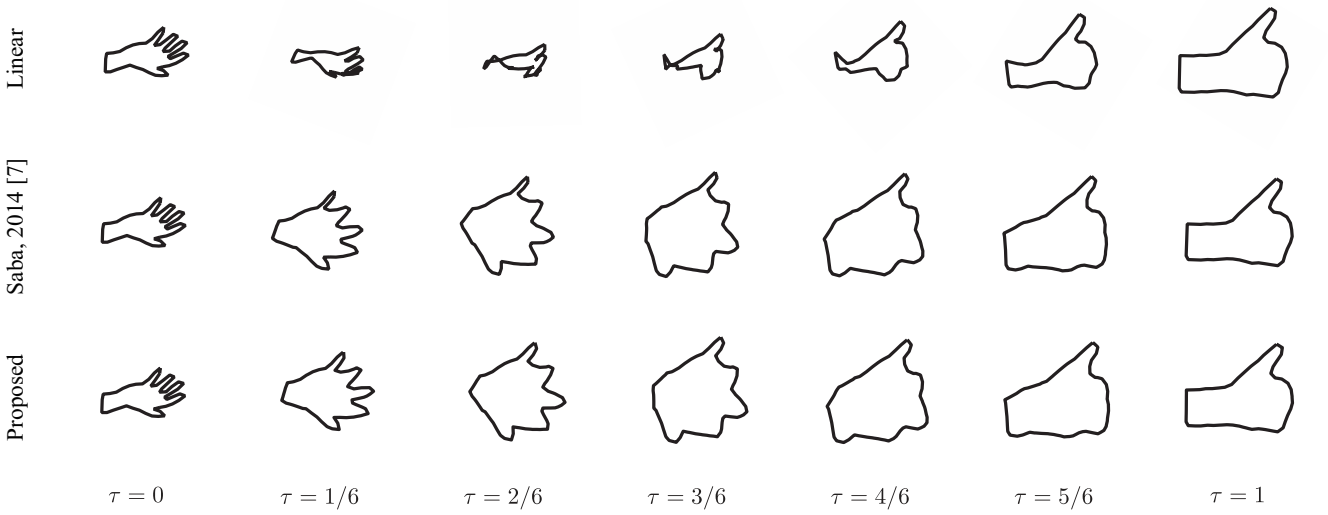


**図 8** 実験 2 におけるブレンディング結果
**Fig. 8** Blending results in Exp. 2.

# 付　　録

## A.1 曲率エネルギーの収束速度

提案手法による曲線ブレンディングにおいて，曲率エネルギーの収束速度について議論する．すなわち，任意の時刻 $t > 0$ における離散曲率 $\kappa(t)$ とゴールポリゴンの離散曲率ベクトル $\kappa_g$ のユークリッドノルムの 2 乗を導出する．

提案手法で用いる曲率フローは

$$\dot{\kappa} = -2(\kappa - \kappa_g) \tag{A.1}$$

であるので，曲率フローの初期条件 $\kappa(0) = \kappa_s$ の下，この微分方程式を解くと

$$\kappa(t) = \kappa_s e^{-2t} + (1 - e^{-2t})\kappa_g \tag{A.2}$$

となる．よって，ゴールポリゴンとのユークリッドノルムの 2 乗は

$$||\kappa(t) - \kappa_g||^2 = (\kappa_s - \kappa_g)^2 e^{-4t} \tag{A.3}$$

となることから，指数関数的に減少することがわかる．

一方で，スタートポリゴンとゴールポリゴンの離散曲率ベクトル $\kappa_s, \kappa_g$ の線形補間により求めた離散曲率ベクトル $\kappa(\tau)$ $(\tau \in [0, 1])$ は，

$$\kappa(\tau) = (1 - \tau)\kappa_s + \tau\kappa_g \tag{A.4}$$

で与えられることから，ゴールポリゴンとのユークリッドノルムの 2 乗は

$$||\kappa(\tau) - \kappa_g||^2 = (1 - \tau)^2(\kappa_s - \kappa_g)^2 \tag{A.5}$$

となり，2 次関数的に減少することがわかる．