

ファジィ項目関連構造分析による学習者集団の特性解析

伊藤 公紀[†] 大内 東^{††}

教育指導の改善を図るためには学習者についてのさまざまな情報の収集が重要な位置を占める。特に、テスト項目に対する反応パターンが情報源として採用されることが多い。学習者の理解の程度は必ずしも教師が認識している学習課題の難易度順に一致しておらず、このような情報を利用して教師は自らの教授法や学習課題の提示順序等の改善の手掛かりとしたり、あるいは学習者集団の特性を知ることの助けとする。各テスト項目に対する正誤反応を1-0の2値パターンで表現し、学習者集団全体に対してのテスト項目全体の関連構造を解析する方法である Airasian & Bart の順序理論や竹谷の項目関連構造分析を含むような拡張的手法を本論文において提案する。本論文で提案するファジィ項目関連構造分析法 (Fuzzy Item Relational Structure Analysis: FIRS 分析) は、各学習者の多値的なテスト項目に対する獲得得点データから、個人別にテスト項目間のファジィな達成順序関係を求める。すなわち、本手法は集団のみならず個人に対しても適用可能である。また、これを利用して同質な学習者のクラスターを求め、クラスターを代表するようなファジィな達成順序関係を得ることができる。適用例として LISP 言語に関する実際のテスト結果を用いて本手法による学習者集団の解析例を付している。

Fuzzy Item Relational Structure Analysis for Evaluation of Students by Performance Scores

KOHKI ITOH[†] and AZUMA OHUCHI^{††}

It is important that a teacher gets full information about students' performance for the sake of an improvement of his instruction. In many cases, the teacher can obtain such information as a response of students to test items. The score of the test items does not exactly agree with the order of the difficulty of them. By analyzing for response of students to test items, the teacher can improve the order to teach learning tasks and understand various characteristics about a group of students. Our method bases evaluation of students on their multistage performance scores. By using the method, the teacher can obtain a fuzzy order relation R of every student on the set of test items. Furthermore, the method determines clusters composed of students with the same characteristic by means of a fuzzy clustering technique and can obtain a fuzzy relationship of each cluster. The latter part of this paper describes the result of using the method in learning LISP language as an application.

1. はじめに

教育指導の改善を図るための情報収集の一環として、ある基準に従って学習者を分類することがある。特に、テスト項目に対する反応パターンが分類するための情報として採用されることが多い。学習者の理解の程度(テスト項目の獲得得点)は必ずしも教師が認識している学習課題(テスト項目)の難易度順に一致しておらず、このような情報を利用して教師は自らの教授法や学習課題の提示順序等の改善の手掛かりとしたり、あるいは学習者集団の特性を知ることの助けとする。

各テスト項目に対する正誤反応を1-0の2値パターンで表現し、学習者集団全体に対してのテスト項目全体の関連構造を解析する方法は数多く報告されている。例えば、Airasian & Bart の順序理論¹⁾や竹谷によって提案された項目関連構造分析 (Item Relational Structure Analysis: IRS 分析²⁾) などがある。

これらは学習者集団全体の平均的特性を得る手法である。通常の場合、分析対象となる学習者集団の各構成員はテスト項目に対する反応が均一であるという保証はなく、むしろさまざまな特性を持つ学習者の集合体と考えるのが自然である。このような場合、平均的特性から逸脱するような少数の学習者群は全体の中に埋没してしまい、それぞれの特性にあった指導につなげることが難しい。

また、一般に教師はテスト項目に対して正答か誤答かの2値的な評価ばかりではなく、場合によっては多

[†] 北海道情報大学経営情報学部情報学科
Department of Information Science, Faculty of
Business Administration and Information Science,
Hokkaido Information University

^{††} 北海道大学工学部情報工学科
Department of Information Engineering, Faculty
of Engineering, Hokkaido University

値的な評価を下す必要がある。このとき、IRS 分析等の手法を適用するためには、各テスト項目における学習者の得点を適当なしきい値によって2値化する必要がある。

上述の事柄を考慮し、本論文では各学習者の多値的なテスト項目に対する得点データから、2値化することなしに個人別のテスト項目間のファジィな達成順序関係を得ることができ、さらに各学習者ごとの達成順序関係から集団全体の平均的な傾向、および特性が類似した学習者ごとの傾向を判断するファジィ項目関連構造分析法 (Fuzzy Item Relational Structure Analysis: FIRS 分析) を提案する。達成順序関係の性質としては、ファジィ擬順序関係を用いることとする。本手法は個人の特性を求めることを基本とするため、集団全体のみならず少数の学習者の特性を記述することも可能である。なお、具体的な指導内容の考察は本論文の範囲外である。

以下、第2章では本論文で用いる記号および概念の定義を行い、第3章で従来の手法と FIRS 分析の概略を記し、第4章で FIRS 分析の手続きの詳細と諸性質を説明する。第5章では具体的な例題に対して本手法を適用した結果を報告する。

2. 諸定義

本論文で使用する主な概念の定義について記述する。さらに必要なものについてはその都度定義する。

定義1 (ファジィ集合)

ある集合 X におけるファジィ集合 A とは、帰属度関数 $\mu_A: X \rightarrow [0, 1]$ によって特徴付けられた集合である*。

$$A = \int_X \mu_A(x) / x \tag{1}$$

定義2 (ファジィ関係)

直積 $X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$ におけるファジィ関係 R とは、 $X \times Y$ におけるファジィ集合 R のことであり、帰属度関数 $\mu_R: X \times Y \rightarrow [0, 1]$ によって特徴付けられる。

$$R = \int_{X \times Y} \mu_R(x, y) / (x, y) \tag{2}$$

定義3 (反射的)

R を X 上のファジィ関係とすると、ファジィ関係 R が反射的であるとは、

$$\mu_R(x, x) = 1, \quad \forall x \in X \tag{3}$$

* 積分記号は積分を表しているのではなく、ファジィ集合の表現法として一般に用いられているものである**。

が成り立つことである。

定義4 (推移的)

R を X 上のファジィ関係とすると、ファジィ関係 R が推移的であるとは、

$$\mu_R(x, z) \geq \max_y \min \{ \mu_R(x, y), \mu_R(y, z) \} \\ \forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X \tag{4}$$

が成り立つことである。

定義5 (ファジィ擬順序関係)

R を X 上のファジィ関係とすると、ファジィ関係 R が擬順序関係であるとは、反射的、推移的の2つの性質を満たす場合である。また、ファジィ擬順序関係を行列表現したものをファジィ擬順序関係行列と呼ぶ。

3. 従来の手法と FIRS 分析の基本的概念

Airasian & Bart の順序理論や竹谷の IRS 分析の基本的な考えは次のとおりである。

ある学習者集団 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ の全体的傾向として、テスト項目 t_j の達成のためには、テスト項目 t_i の達成を必要条件としていると仮定する。この仮定に従えば、テスト項目 t_j を達成しているならば、テスト項目 t_i を達成しているはずである。 t_i と t_j の達成を $t_i=1, t_j=1$, 非達成を $t_i=0, t_j=0$ と表記することとすると、 n 人の学習者は表1の 2×2 分割表の a, b, c, d のいずれかに振り分けられる。

このうち、仮定に矛盾するのは c の組み合わせである。すなわち、易しいはずのテスト項目 t_i を誤答し、難しいはずのテスト項目 t_j を正答する組み合わせである。

Airasian & Bart の順序理論では全体に対する c の割合がある定数 ϵ 以下であるとき、すなわち、

$$\frac{c}{n} \leq \epsilon \tag{5}$$

が成り立つとき順序関係が存在するとしている。

竹谷の IRS 分析ではテスト項目 t_j の達成がテスト項目 t_i の達成を必要条件としていると仮定したとき、仮定に反する c の組み合わせが t_i と t_j が独立なとき

表1 2x2 分割表
Table 1 2x2 contingency table.

$t_i \backslash t_j$	$t_j=1$	$t_j=0$	total
$t_i=1$	a	b	$a+b$
$t_i=0$	c	d	$c+d$
total	$a+c$	$b+d$	n

表 2 真理値表
Table 2 Truth table.

Pattern	P	Q	$P \Rightarrow Q$
(1)	1	1	1
(2)	1	0	0
(3)	0	1	1
(4)	0	0	1

表 3 Gödel のファジィ含意関数による真理値表
Table 3 Truth table based on Gödel's fuzzy implication function.

Pattern	$P \Rightarrow Q$
(1) $P \leq Q$	1
(2) $P > Q$	Q

に生起する割合に比べてどの程度かを算出している。すなわち、

$$\frac{c}{n} \leq \mu \frac{c}{a+c+d} \quad (6)$$

ただし、 μ は $0 \leq \mu \leq 1$ の比例定数である。

これらの手法はいずれも c に該当する学習者数を順序関係の算出に利用している。これを 2 値論理で表現すると以下ようになる。

2 つの命題 P, Q を考える。命題 P = “テスト項目 t_i を達成した” が真であることを $P=1$ と表し、命題 P が偽であることを $P=0$ と表す。命題 Q = “テスト項目 t_i を達成した” の場合も P と同様である。

P から Q への含意の真理値表は表 2 のとおりである。真理値表の (2) が表 1 の c に対応する。

したがって上述の事柄を多値論理的に拡張を行えば、命題 P, Q が真である度合いを区間 $[0, 1]$ とすることで、Airasian & Bart の順序理論や竹谷の IRS 分析とほぼ同様な結果を得るような多値データを扱える手法を開発することができる。含意の計算法は種々存在するが Gödel のファジィ含意関数を用いた場合、 P から Q への含意の真理値表は表 3 のとおりである。

また、Airasian & Bart の順序理論や竹谷の IRS 分析は、2 つのテスト項目間の順序関係の学習者集団全体についての統計的分析であり、算出された達成順序に沿わないような少数の学習者の反応はノイズ的に扱われている。しかしながら、学習者集団全体についての統計的分析のみでは不都合な場合もある。例えば特性を異にする構成員が同数の小集団が 2 つあった場合は、その 2 つの小集団をまとめた集団全体について分析した結果は両集団の平均的な結果であり、この結果に基づく教育的指導効果は薄いといえる、等である。

本論文では、一般には学習者集団全体で均一な特性を有するという保証はないことを踏まえ、少数の学習者の反応はノイズではなくむしろ集団の特性の一翼を担うものと考え取り扱う。すなわち、学習者集団をテスト項目に対する反応パターンに応じてクラスターに分割し、小集団ごとに分析を行う。

Airasian & Bart の順序理論や IRS 分析が集団全体の特性を 2 値データを基に統計的に分析するのに対し、本論文では学習者個人の特性をファジィデータを基にファジィ含意関数を使用して分析し、その後集団の特性の記述に発展させる方法を提案する。

4. FIRS 分析の手続き

4.1 手続き概略

本手法の手続きは、以下の流れに従う。

1. 得点データ行列 E の作成
各学習者 s_k ($k=1, 2, \dots, n$) のテスト項目 t_i ($i=1, 2, \dots, m$) の得点 e_{ki} を得点データ行列 E として表す。
2. ファジィ擬順序関係行列 R_k の算出
 E を基に、学習者 s_k のテスト項目集合 T 上のファジィ擬順序関係行列 R_k を算出する。 R_k は n 人分作成される。
3. 学習者の類別化
手順 2 で得られた R_k を基にモード探索法により、学習者集合 S の部分集合 C_p ($p=1, 2, \dots$) を求める。
4. ファジィ擬順序関係行列 G_p の算出
手順 3 で得られた C_p を構成する u_p 人のファジィ関係 R_k の交わりを求め、クラスターを構成する学習者のテスト項目の達成順序を代表するファジィ擬順序関係行列 G_p ($p=1, 2, \dots, p$) とする。
5. ファジィ擬順序関係行列 A の算出
学習者集団全体の平均的特性を表すものとして各テスト項目の得点の平均を用いてテスト項目集合上のファジィ擬順序関係行列 A を算出する。
6. 達成順序の分析
 R_k, G_p, A を任意のしきい値 α によって 2 値化し、テスト項目をノード、擬順序関係の存在をアークとして有向グラフで表現する。有向グラフの各ノードの入次数および出次数、サイクル構造に注目し、 R_k, G_p, A について達成順序の分析を行う。

4.2 手続き詳細

4.2.1 得点データ行列 E の作成

まず初めに、学習者の各テスト項目に対する得点データのとりうる最大値を1、最小値を0となるように正規化し、その正規化されたデータを成分とする得点データ行列 E を作成する。

得点データ行列 E は、垂直添字集合に学習者集合 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ を、水平添字集合にテスト項目集合 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ を持つ。

$$E = [e_{ki}] \quad (0 \leq e_{ki} \leq 1, 1 \leq k \leq n, 1 \leq i \leq m) \quad (7)$$

E の成分 e_{ki} は学習者 s_k のテスト項目 t_i に対する得点を表す。

4.2.2 ファジィ擬順序関係行列 R_k の算出

本論文で用いるテスト項目間の達成順序関係は、ファジィ擬順序関係を使用している。

テスト項目間の関係の性質として、推移性を考慮しないのが一般的であるが、 t_i が t_j の必要条件であり、かつ t_j が t_k の必要条件である場合に t_i が t_k の必要条件でないと判断されるのは、論理的な観点からは好ましくない。また、テスト項目間の関係として、ファジィ擬順序関係に反対称性を付加したファジィ半順序関係を用いることも考えられるが、この場合は、 t_i が t_j の必要条件になっていると判断されたとき、 t_j が t_i の必要条件になっているという可能性を認めない。このため、多くの情報を教師に提供するという意味では、ファジィ半順序関係を採用するのは望ましくない。仮に逆方向の達成順序関係の存在を削除したければ、ファジィ擬順序関係を求めた後に、ファジィ半順序に加工することは可能である。以上の理由から、本論文では達成順序関係にファジィ擬順序関係を用いる。

一般に、学習者 s_k がテスト項目 t_i に対して低い得点 e_{ki} を示し、 t_j に対して高い得点 e_{kj} を示している場合、学習者 s_k にとっては t_i に含まれている学習課題の達成が t_j に含まれている学習課題を達成することよりも困難であるといえる。

このようなとき、本論文では学習者 s_k は t_i の達成に t_j の達成を必要条件としていると判断する。このとき、学習者 s_k の T 上のファジィ擬順序関係行列 R_k の成分をファジィ論理の含意の値として考え、記号で $(t_i \Rightarrow t_j)_k$ のように表す。

$$(t_i \Rightarrow t_j)_k = F(e_{ki}, e_{kj}) \quad (8)$$

ここで、 F は Gödel のファジィ含意関数であり次のように定義される。

$$F(e_{ki}, e_{kj}) = \begin{cases} 1 & (e_{ki} \leq e_{kj}) \\ e_{kj} & (e_{ki} > e_{kj}) \end{cases} \quad (9)$$

Gödel のファジィ含意関数により、テスト項目 t_i の得点 e_{ki} が t_j の得点 e_{kj} よりも高いときには無条件で達成順序関係の存在を認める。しかし、その逆の場合、すなわち $e_{ki} < e_{kj}$ のときは基礎的なテスト項目 t_i に含まれる学習課題をある程度理解していなければ達成順序関係の存在を認めない。

各学習者について(8)式により含意を計算し、水平および垂直添字集合にテスト項目集合 T をもつ行列 R_k ($k=1, 2, \dots, n$) を求める。

$$R_k = [r_{ij}^k] \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n) \quad (10)$$

ただし、

$$r_{ij}^k = F(e_{ki}, e_{kj}) \quad (11)$$

定理1 R_k はファジィ擬順序関係行列である。

(証明)

(1) 反射性: $r_{ii}^k = 1$ となることは R_k の定義より明らか。

(2) 推移性: $r_{ii}^k, r_{iu}^k, r_{iu}^k$ について考える。

ファジィ含意関数 F の引数となる e_{ki}, e_{ku}, e_{ki} の大小関係は、(a) $e_{ki} \geq e_{ku} \geq e_{ki}$, (b) $e_{ki} \geq e_{ki} \geq e_{ku}$, (c) $e_{ku} \geq e_{ku} \geq e_{ki}$, (d) $e_{ki} \geq e_{ku} \geq e_{ki}$, (e) $e_{ku} \geq e_{ki} \geq e_{ku}$, (f) $e_{ku} \geq e_{ki} \geq e_{ki}$ の6通り考えられる。

(d), (e), (f)の場合、 $r_{iu}^k = 1.0$ となるのでいかなる場合も $r_{iu}^k \geq \min\{r_{ii}^k, r_{iu}^k\}$ が成り立つ。

(a), (b)の場合、 $r_{iu}^k = e_{ku}$, $\min\{r_{ii}^k, r_{iu}^k\} = e_{ku}$ であるから、 $r_{iu}^k = e_{ku} = \min\{r_{ii}^k, r_{iu}^k\}$ となり成立する。

(c)の場合、 $r_{iu}^k = e_{ku}$, $\min\{r_{ii}^k, r_{iu}^k\} = e_{ki}$ となる。ところが $e_{ku} \geq e_{ki}$ であるので、 $r_{iu}^k \geq \min\{r_{ii}^k, r_{iu}^k\}$ が成り立つ。

4.2.3 学習者の類別化

各学習者のテスト項目の難易度順序が異なる場合、学習者集団全体におけるテスト項目集合上の達成順序関係の決定方法としては、例えば、全体の平均を求める方法等が考えられる。この場合、非常に特殊な特性を持つ少数の学習者の影響を受けたまま判断を下している可能性があり、各学習者の特性を正確に反映していない。このようにして得られた分析結果をもとに教授法の変更を行うことや学習者集団の特性として捉えるよりも、異なる特性を持つグループが存在する場合にはその存在を浮き彫りにし、各グループごとの特性を明らかにする方が望ましい。

したがって本手法では、 R_k を基にほぼ同様な観測結果を有する学習者のクラスターを得て、各クラス

ターごとにそのクラスターを代表するようなファジィ擬順序関係を決定する。

得点データ行列 E ではなく学習者個人別のファジィ擬順序関係 R_k の成分を基にしてクラスタリングを行うのは、獲得得点の学習者間の偏差の小ささを類似の尺度と考えるのではなく、擬順序関係の相違を類似の尺度として考えているためである。

本手法では Gitman のモード探索法 (mode seeking technique)⁵⁾ を用いてクラスター C_p を得る。モード探索法の詳細は省略する。

4.2.4 ファジィ擬順序関係行列 G_p の算出

同種同質な u_p 人の学習者で構成された C_p に所属する R_k の交わりで得られる行列 G_p を求める。

$$G_p = [g_{ij}^p] \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m, 1 \leq p \leq q) \quad (12)$$

ただし、

$$g_{ij}^p = \min_k r_{ij}^k, \quad k \in C_p \quad (13)$$

定理 2 G_p はファジィ擬順序関係行列である。

(証明)

(1) 反射性: $r_{ii}^k = 1$ となることは R_k の定義より明らか。

(2) 推移性: $r_{ij}^k, r_{jk}^l, r_{ki}^m$ について考える。

ファジィ含意関数 F の引数となる e_{ks}, e_{ku}, e_{kt} の大小関係は、(a) $e_{kt} \geq e_{ks} \geq e_{ku}$, (b) $e_{ks} \geq e_{kt} \geq e_{ku}$, (c) $e_{ks} \geq e_{ku} \geq e_{kt}$, (d) $e_{kt} \geq e_{ku} \geq e_{ks}$, (e) $e_{ku} \geq e_{ks} \geq e_{kt}$, (f) $e_{ku} \geq e_{ks} \geq e_{kt}$ の 6 通りのみ考えられる。

これらの 6 通りのうちのいずれか 1 つの大小関係から他の 5 通りのうちのいずれか 1 つの大小関係に変化したとしても、定理 1 で証明したように推移性を崩すことはない。したがって G_p は推移性を有する。

4.2.5 ファジィ擬順序関係行列 A の算出

学習者集団全体の特性は次の行列 A によって表す。

$$A = [a_{ij}] \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m) \quad (14)$$

ただし、

$$a_{ij} = F\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e_{ki}, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e_{kj}\right) \quad (15)$$

A はファジィ擬順序関係行列である。

なお厳密には等しいものではないが、Airasian & Bart の順序理論や IRS 分析によって得られる結果は、 A を求めることと対応付けられる。

4.2.6 達成順序の分析

任意のしきい値 α によって R_k, G_p, A を 2 値化し、クリस्पな擬順序関係行列 B_k, B_p^G, B^A を作成する。

$$B_k = [b_{ij}^k] \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n) \quad (16)$$

$$B_p^G = [b_{ij}^p] \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m, p \in C_p) \quad (17)$$

$$B^A = [b_{ij}^A] \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m) \quad (18)$$

テスト項目をノード、擬順序関係をアークとして有向グラフで表現する。このとき、サイクルが存在する場合はノードを縮約し、さらに推移的リダクション⁴⁾と呼ばれる操作を行い、冗長なアークを取り除き、各ノード間の可到達関係を最も少ないアーク数で表現する。なお、推移的に冗長なアークとは、サイクルのない有向グラフからそのアークを取り除いた部分グラフが元のグラフの持つ可到達性を保つようなアークを指す。以下、本論文では B_k, B_p^G, B^A の有向グラフ表現に対して推移的リダクションを施したグラフをリダクショングラフと呼ぶ。

なお、IRS 分析等で描かれるグラフと共通性を持たせるため、 B_k, B_p^G, B^A の成分 b_{ij} が 1 であるとき、 t_j から t_i へのアークを描く。

リダクショングラフの構造上の特徴から、学習者の学習課題に対する達成状況を判断する。考慮すべき構造には以下の 2 点が挙げられる。

1. 入次数および出次数

リダクショングラフのノード t_i の入次数は t_i を達成するために必要とするノード数を表す。入次数の高いノードは応用的なテスト項目であると呼ぶ。逆に入次数の低いノードは初歩的なテスト項目であると呼ぶ。

また、出次数は t_i の達成を必要条件とするノード数を表す。出次数の高いノードは基礎的なテスト項目であると呼ぶ。逆に出次数の低いノードは発展的なテスト項目であると呼ぶ。

なお、基礎的かつ応用的なテスト項目や発展的かつ初歩的なテスト項目という組み合わせは矛盾ではなくありうる⁶⁾。

2 つのグラフ G_a, G_b の i 番目のノードをそれぞれ t_i^a, t_i^b とする。入次数と出次数に注目したときの G_a, G_b の構造上の相違を表す指標として、入次数と出次数をそれぞれ軸とした 2 次元平面での対応するノード t_i^a, t_i^b 間のユークリッド距離 $d(t_i^a, t_i^b)$ を用いる。 t_i^a と t_i^b の相違度 D_i ($0 \leq D_i \leq 1$) は (19) 式によって求める。

$$D_i = \frac{d(t_i^a, t_i^b)}{(m-1)\sqrt{2}} \quad (19)$$

また、 G_a と G_b の全体としての相違度 D ($0 \leq D \leq 1$) は (20) 式によって求める。

$$D = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m D_i; \tag{20}$$

D_i ; および D はその値が1のとき相違度が最大で0のとき相違度が最小を表す。

2. サイクル構造

しきい値 α のときにサイクル構造があるのは、サイクルを形成しているテスト項目同士が α のレベルで等価であることを表している。

α を高い値に設定するほど、サイクル構造が得られにくくなる。

5. 適用例

コンピュータ・プログラミング言語の1つであるLISPに関するテスト(付録1)を実施した。なお、テスト項目数 $m=8$, 学習者数 $n=18$ である。

テストの結果、図1に示すように得点データ行列 E が得られた。

E をもとにファジィ擬順序関係行列 R_k を作成する。例えば、図2は R_1 を表したものである。

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8
s_1	0.75	0.75	0.50	0.20	1.00	0.80	0.33	1.00
s_2	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.80	1.00	1.00
s_3	1.00	1.00	0.50	1.00	0.80	0.00	1.00	1.00
s_4	0.75	0.50	1.00	1.00	0.80	0.80	1.00	1.00
s_5	1.00	0.75	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
s_6	0.75	1.00	0.50	0.00	0.80	0.00	0.33	0.00
s_7	1.00	0.75	0.00	0.00	0.80	0.00	0.00	0.00
s_8	1.00	1.00	1.00	0.20	1.00	0.00	0.33	0.00
s_9	0.75	0.75	0.50	1.00	0.00	0.00	1.00	1.00
s_{10}	1.00	1.00	1.00	0.80	1.00	1.00	1.00	1.00
s_{11}	0.75	0.75	1.00	1.00	0.80	0.80	0.33	0.00
s_{12}	1.00	0.25	1.00	1.00	0.80	0.80	1.00	1.00
s_{13}	1.00	1.00	0.50	0.80	0.80	0.80	1.00	1.00
s_{14}	1.00	1.00	0.50	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
s_{15}	1.00	1.00	1.00	1.00	0.60	0.80	1.00	1.00
s_{16}	0.75	1.00	0.50	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
s_{17}	1.00	0.75	0.50	1.00	1.00	0.80	0.66	1.00
s_{18}	1.00	0.25	1.00	0.80	0.80	1.00	1.00	1.00

図1 得点データ行列 E

Fig. 1 Performance score matrix E .

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8
t_1	1.00	1.00	0.50	0.20	1.00	1.00	0.33	1.00
t_2	1.00	1.00	0.50	0.20	1.00	1.00	0.33	1.00
t_3	1.00	1.00	1.00	0.20	1.00	1.00	0.33	1.00
t_4	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
t_5	0.75	0.75	0.50	0.20	1.00	0.80	0.33	1.00
t_6	0.75	0.75	0.50	0.20	1.00	1.00	0.33	1.00
t_7	1.00	1.00	1.00	0.20	1.00	1.00	1.00	1.00
t_8	0.75	0.75	0.50	0.20	1.00	0.80	0.33	1.00

図2 ファジィ擬順序関係行列 R_1

Fig. 2 Fuzzy pseudo-ordering relation R_1 .

次に、 R_k をもとに Gitman のモード探索法によりクラスターを抽出する。この例では4つのクラスターが抽出された。学習者 s_k のクラスターへの所属は表4に示す。

クラスターごとにクラスターを代表するファジィ擬順序関係行列 G_p を求めたものを図3~6に表す。これらの行列をリダクショングラフで表現したものをそれぞれ図7~10に表す。以下、リダクショングラフをそれぞれ C_1, C_2, C_3, C_4 と呼ぶ。図中の点線で囲まれた部分は点線内のノードがサイクルを形成していることを表している。また、ファジィ擬順序行列をク

表4 クラスターへの s_k の分類
Table 4 Assignment of s_k to cluster.

C_1	s_1	s_5	s_{13}	s_{14}	s_{16}	s_{17}
C_2	s_4	s_{11}	s_{12}	s_{18}		
C_3	s_2	s_3	s_9	s_{10}	s_{15}	
C_4	s_6	s_7	s_8			

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8
t_1	1.00	0.75	0.00	0.20	0.80	0.80	0.33	1.00
t_2	1.00	1.00	0.00	0.20	0.80	0.80	0.33	1.00
t_3	1.00	1.00	1.00	0.20	1.00	1.00	0.33	1.00
t_4	1.00	0.75	0.00	1.00	1.00	0.80	0.66	1.00
t_5	0.75	0.75	0.00	0.20	1.00	0.80	0.33	1.00
t_6	0.75	0.75	0.00	0.20	1.00	1.00	0.33	1.00
t_7	1.00	0.75	0.00	0.20	0.80	0.80	1.00	1.00
t_8	0.75	0.75	0.00	0.20	0.80	0.80	0.33	1.00

図3 ファジィ擬順序関係行列 G_1

Fig. 3 Fuzzy pseudo-ordering relation G_1 .

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8
t_1	1.00	0.25	1.00	0.80	0.80	0.80	0.33	0.00
t_2	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.33	0.00
t_3	0.75	0.25	1.00	0.80	0.80	0.80	0.33	0.00
t_4	0.75	0.25	1.00	1.00	0.80	0.80	0.33	0.00
t_5	0.75	0.25	1.00	1.00	1.00	1.00	0.33	0.00
t_6	0.75	0.25	1.00	0.80	0.80	1.00	0.33	0.00
t_7	0.75	0.25	1.00	0.80	0.80	0.80	1.00	0.00
t_8	0.75	0.25	1.00	0.80	0.80	0.80	1.00	1.00

図4 ファジィ擬順序関係行列 G_2

Fig. 4 Fuzzy pseudo-ordering relation G_2 .

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8
t_1	1.00	1.00	0.50	0.80	0.00	0.00	1.00	1.00
t_2	1.00	1.00	0.50	0.80	0.00	0.00	1.00	1.00
t_3	1.00	1.00	1.00	0.80	0.00	0.00	1.00	1.00
t_4	0.75	0.75	0.50	1.00	0.00	0.00	1.00	1.00
t_5	1.00	1.00	0.50	0.80	1.00	0.00	1.00	1.00
t_6	1.00	1.00	1.00	0.80	0.60	1.00	1.00	1.00
t_7	0.75	0.75	0.50	0.80	0.00	0.00	1.00	1.00
t_8	0.75	0.75	0.50	0.80	0.00	0.00	1.00	1.00

図5 ファジィ擬順序関係行列 G_3

Fig. 5 Fuzzy pseudo-ordering relation G_3 .

リスブな擬順序関係に変換する際のしきい値は 1.0 とした。

グラフからクラスターに所属する学習者がどのような

な達成順序を示したかを読み取ることができる。例えば、クラスター C_1 に属する学習者は t_3 を達成するためには t_4, t_7 を除くすべてのテスト項目の達成を必

$$G_4 = \begin{matrix} & \begin{matrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & t_6 & t_7 & t_8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \\ t_8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1.00 & 0.75 & 0.00 & 0.00 & 0.80 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.75 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.80 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 1.00 & 1.00 & 1.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.33 & 0.00 \\ 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \\ 0.75 & 0.75 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.33 & 0.00 \\ 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 & 1.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \\ 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

図 6 ファジィ擬順序関係行列 G_4

Fig. 6 Fuzzy pseudo-ordering relation G_4 .

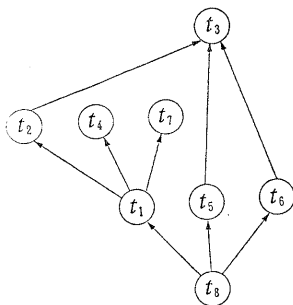


図 7 リダクショングラフ (C_1)
Fig. 7 A reduction graph (C_1).

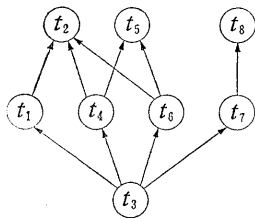


図 8 リダクショングラフ (C_2)
Fig. 8 A reduction graph (C_2).

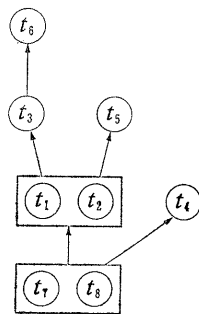


図 9 リダクショングラフ (C_3)
Fig. 9 A reduction graph (C_3).

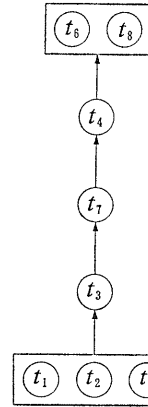


図 10 リダクショングラフ (C_4)
Fig. 10 A reduction graph (C_4).

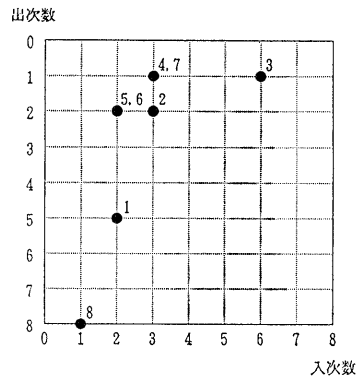


図 11 テスト項目の相対的特性 (C_1)
Fig. 11 Relative characteristic of test items (C_1).

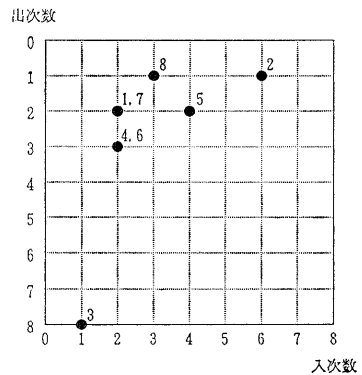


図 12 テスト項目の相対的特性 (C_2)
Fig. 12 Relative characteristic of test items (C_2).

要条件としていることが読み取れる。しかし、 C_3 に属する学習者は t_4, t_5, t_6 を除くテスト項目の達成を必要条件としている、等である。

図 11~14 は C_1, C_2, C_3, C_4 においてノードの入次数と出次数をそれぞれ軸とした 2次元平面上に各ノードをプロットしたものである。図中の黒丸はテスト項目を、また黒丸の右肩にある数字はそのテスト項目番号を表している。これを見ると、おおよそ C_1 は初歩的なテスト項目、 C_2 は初歩的かつ発展的なテスト項目がそれぞれ多い。 C_4 は初歩的かつ基礎的なテスト項目から応用的かつ発展的なテスト項目へと直線的に並んでいるのがわかる。 C_3 はこれらの中間の特性を持っているように思われる。

また、学習者の全体的な傾向を表すファジィ擬順序関係行列 A を図 15 に、そのリダクショングラフ表現を図 16 に表す。各ノードの次数を見ると (図 17)、 C_4 の場合と同様に初歩的かつ基礎的なテスト項目から応用的かつ発展的なテスト項目へとほぼ直線的に並んでいる。

IRS 分析との比較を行うため、 E の各成分をしきい値 0.70 で 2 値化し、これを基に IRS 分析を行った。IRS 分析と FIRS 分析によって得られる有向グラフの構造比較を (19) 式の D_i および (20) 式の D に

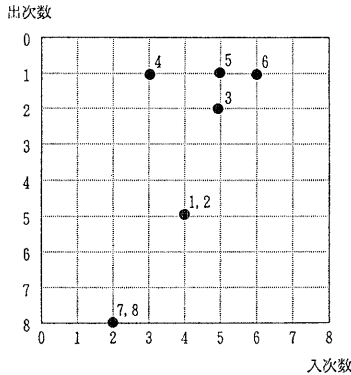


図 13 テスト項目の相対的特性 (C_3)
Fig. 13 Relative characteristic of test items (C_3).

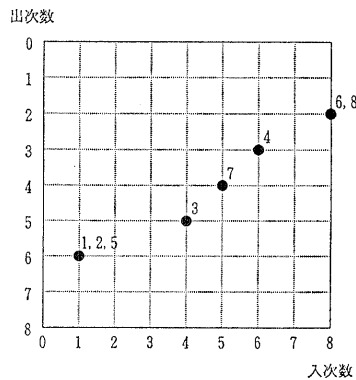


図 14 テスト項目の相対的特性 (C_4)
Fig. 14 Relative characteristic of test items (C_4).

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8
t_1	1.00	0.81	0.67	0.77	0.83	0.63	0.78	0.78
t_2	1.00	1.00	0.67	0.77	1.00	0.63	0.78	0.78
t_3	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.63	1.00	1.00
t_4	1.00	1.00	0.67	1.00	1.00	0.63	1.00	1.00
t_5	1.00	0.81	0.67	0.77	1.00	0.63	0.78	0.78
t_6	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
t_7	1.00	1.00	0.67	0.77	1.00	0.63	1.00	1.00
t_8	1.00	1.00	0.67	0.77	1.00	0.63	1.00	1.00

図 15 ファジィ擬順序関係行列 A
Fig. 15 Fuzzy pseudo-ordering relation A .

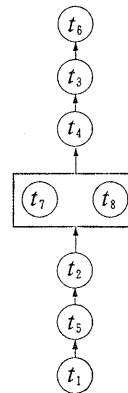


図 16 リダクショングラフ (A)
Fig. 16 A reduction graph (A).

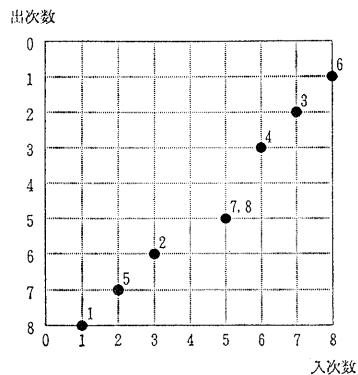


図 17 テスト項目の相対的特性 (A)
Fig. 17 Relative characteristic of test items (A).

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D
$IRS - C_1$	0.31	0.14	0.00	0.41	0.10	0.30	0.36	0.57	0.27
$IRS - C_2$	0.61	0.40	0.86	0.28	0.22	0.31	0.36	0.36	0.43
$IRS - C_3$	0.42	0.45	0.14	0.41	0.30	0.14	0.50	0.50	0.36
$IRS - C_4$	0.20	0.51	0.45	0.28	0.51	0.30	0.00	0.36	0.32
$IRS - A$	0.00	0.51	0.14	0.28	0.60	0.31	0.10	0.10	0.25

図 18 相違度

Fig. 18 Normalized relative difference.

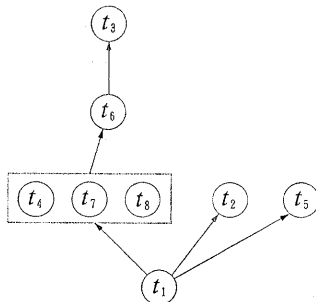


図 19 IRS グラフ

Fig. 19 IRS graph.

よって行ったものを図 18 に示す。IRS グラフ (図 19) と行列 A のグラフ表現 (以下, 単に A と呼ぶ) は, 各項目においては D_2 と D_5 以外は相違度が比較的低く, 全体としても IRS 分析と FIRS 分析の結果が似通っているといえる。それに対し, IRS グラフと各クラスターを代表したグラフの相違度は, C_1 の場合を除いて比較的相違度が高い。

また, サイクル構造は IRS 分析では t_4, t_7, t_8 がサイクルを形成しているのに対し, A では t_4, t_8 がサイクルを形成している。 t_7 は A では IRS 分析の場合と異なり, サイクル要素からはずれているが, それでも t_4, t_8 の直下のレベルに存在している。しかし, 各クラスターとのサイクル構造の比較では C_3 以外はほとんど共通性がない。

以上の結果から集団全体に対する分析に関しては, ノードの次数およびサイクル構造という両視点においても IRS 分析と FIRS 分析はほぼ同様な結果が得られるが, IRS 分析とクラスターごとの FIRS 分析結果は異なる結果が得られると思われる。

分析対象である学習者集団の特性が未知である場合, 特性ごとに小集団に分類し, 特に異質である小集団が見つかったならば他とは異なる独自の指導内容を考案する必要がある。本手法を用いることにより教師は, 学習者個人, クラスター, 集団全体の 3 つの単位でのテスト項目間の達成順序情報を取得でき, 特定の

個人と個人, 個人と集団全体, クラスターとクラスター等のテスト項目間の達成順序の比較を行うことができ, 以後の指導の基礎資料とすることが期待できる。

6. おわりに

本論文では学習者各個人のテスト項目への多値的応答パターンから, ファジィ含意関数によって個人ごとのテスト項目間のファジィな達成順序関係, すなわちテスト項目集合上のファジィ擬順序関係を算出し, さらにファジィ擬順序関係を基にクラスタリング手法を用いて学習者の類別化を行い, クラスターごとにファジィ擬順序関係を得るテスト項目の特性解析法を提案した。

本手法は学習者の特性に応じた教育的指導に役立たせることが期待できる。

参考文献

- 1) Airasian, P. W. and Bart, W. M.: A New and Useful Measurement Model, *Educational Technology*, Vol. 13, No. 5, pp. 56-60, (1973).
- 2) 竹谷 誠: 教育評価に利用するテスト項目関連構造分析, 電子通信学会論文誌, Vol. J62-D, No. 7, pp. 451-458 (1979).
- 3) 水本雅晴: ファジィ理論とその応用, サイエンス社 (1988).
- 4) Aho, A. V., Garey, M. R. and Ullman, J. D.: The Transitive Reduction of a Directed Graph, *SIAM J. Comput.*, Vol. 1, No. 2, pp. 131-137 (1972).
- 5) Gitman, I. and Levine, M. D.: An Algorithm for Detecting Unimodal Fuzzy Sets and Its Application as a Clustering Techniques, *IEEE Transaction on Computer*, Vol. C-19, No. 7, pp. 583-593 (1970).
- 6) 新藤 茂, 赤堀侃司: 項目協同関連構造 (Item Co-Relational Structure) によるテストの特性解析, 日本教育工学雑誌, Vol. 12, No. 2, pp. 37-49 (1988).

付 録

[1] 以下の s 式を評価したとき, 返す値を答えよ。

- 1) (null '(dog cat))
(null 'moon)
(null '())
(null 213)
- 2) (atom '(dog cat))

```
(atom 'moon)
(atom '())
(atom 213)
3) (first '(+ 3 8))
    (first (+ 3 8))
    (first '((+ 2 4) (+ 3 5)))
    (first ((+ 2 4) (+ 3 5)))
```

[2] 二引数をとる関数+を使用して、リストの要素(数値)を全て加える働きをする関数*addを再帰的な定義で作成せよ。ただし、空リストが与えられたときは0を返すものとする。

```
実行例: (*add '(6 3)) → 9
        (*add '(2 5 3)) → 10
        (*add '()) → 0
```

[3] xの絶対値を求める関数*absをifを用いて定義せよ。同様にcondを用いて定義せよ。

[4] 次のように定義される関数func1がある。以下の(1)~(4)の各リストを評価したとき、いかなる値を返すか答えよ。

```
(defun func1 (x y)
  (cond ((atom x) (eql x y))
        ((atom y) nil)
        ((func1 (first x) (first y))
         (func1 (rest x) (rest y)))
        (t nil)))
(1) (func1 3 5)
(2) (func1 '(a b c) '(c b a))
```

```
(3) (func1 '(a b c) '(a b d))
```

```
(4) (func1 '(a b c d) '(a b c d))
```

(平成4年11月2日受付)

(平成6年1月13日採録)



伊藤 公紀 (正会員)

昭和39年生。昭和63年北海道教育大学教育学部卒業。平成2年東京学芸大学教育研究科理科教育専攻修士課程修了。平成6年北海道大学大学院工学研究科情報工学専攻博士後期課程修了。工学博士。現在、北海道情報大学経営情報学部情報学科講師。教育情報工学の研究に従事。日本OR学会、日本ファジィ学会、日本教育工学会各会員。



大内 東 (正会員)

昭和20年生。昭和43年北海道大学工学部応用物理学科卒業。昭和49年同大学大学院博士課程電気工学専攻修了。同年、北海道大学工学部電気工学科助手。同助教授を経て現在、北海道大学工学部情報工学科教授。工学博士。システム情報工学、応用人工知能システム、医療システムの研究に従事。電気学会、電子情報通信学会、計測自動制御学会、人工知能学会、日本OR学会、日本ファジィ学会、医療情報学会、病院管理学会、IEEE-SMC各会員。