

Gregory 型パッチの NURBS 曲面への近似変換

三浦 憲二郎[†] 曾 根 順 治^{††} 千代倉 弘 明^{†††}

接平面の連続性や曲率の連続性を簡便に保証できる自由曲面パッチとして、様々なタイプの Gregory 型パッチが提案されている。それらのパッチは活発な研究が続けられており、その CAD/CAGD における重要性は近年十分認識されるようになってきている。しかしながら、多くの CAD システムや CAM システムにおいては、データの互換性等を考慮して自由曲面の表現法としては NURBS 曲面を採用している。他のシステムとの形状データを共有するためには何らかの方法で Gregory 型パッチのデータを NURBS 曲面に変換する必要がある。Gregory 型パッチは厳密に NURBS 曲面に変換可能であるが、次数の急上昇を伴ってしまう。そこで、本研究では Gregory 型パッチを指定された個数のサブパッチに分割し、それらをその Gregory 型パッチのもととなった Bézier 型パッチで近似することによって、次数を増加することなく NURBS 曲面に近似変換する方法を提案した。その特長は以下のようにまとめられる。1. 境界線は厳密に一致する。2. 変換に伴う近似の誤差の上限をパッチ全体としても、また部分に対しても計算できる。3. パッチの各パラメータ方向に対して、それぞれ任意の間隔にパッチを分割して変換できるので近似の精度を自由に制御できる。4. パッチの分割数を増やせば、変換によって得られる NURBS 曲面はオリジナルの Gregory 型パッチに収束する。5. 変換によって得られた NURBS 曲面は自然な連続性を持つ。6. 煩雑な処理を必要とせず高速に変換することができる。また、局所的に処理を進めることができるので並列計算機にも適している。

Approximate Conversions of Gregory-type Patches to NURBS Surfaces

KENJIRO T. MIURA,[†] JUNJI SONE^{††} and HIROAKI CHIYOKURA^{†††}

Various kinds of Gregory-type patches have been developed as free-form surfaces which can be easily connected to each other with G^1 or G^2 continuity. Although their importance has been recently recognized in the field of CAD/CAGD, many CAD/CAM systems are using NURBS (non-uniform B-spline) surfaces as the representation of free-form surfaces. To share geometric data with these CAD/CAM systems, it is desirable to have a method to convert Gregory-type patches to NURBS surfaces. It is possible to do it exactly, but it requires considerable increases of their degrees. Hence, in this paper, we propose a new method to convert approximately any Gregory-type patches to NURBS surfaces. The method is that first, the patch is subdivided into several subpatches as specified and they are approximated with suitable Bézier-type patches. Then, their control points are combined to generate ones of the NURBS surface. The merits of our method are as follows: 1. The boundary curves are exactly converted. 2. The upper bound of the error caused by the conversion can be calculated for a part of the patch as well as the whole one. 3. The accuracy is controllable by subdividing the patch into smaller or larger subpatches. 4. Since the method does not require any time consuming processes, it is very fast. It is suitable for parallel processing computers because of its locality of geometric calculations.

1. はじめに

接平面の連続性や曲率の連続性を簡便に保証できる

[†] 会津大学コンピュータ理工学部コンピュータソフトウェア学科

Department of Computer Software, School of Computer Science and Engineering, The University of Aizu

^{††} 東芝生産技術研究所

Manufacturing Engineering Research Center, Toshiba Corporation

^{†††} 慶応大学環境情報学部

Faculty of Environmental Information, Keio University

自由曲面パッチとして、様々なタイプの Gregory 型パッチ¹⁾が提案されている。それらのパッチは、その境界線の種類から3つに大別することができる。それらは、1) 多項式曲線を境界線とするもの (Gregory パッチ²⁾, C^2 Gregory パッチ³⁾), 2) 有理曲線を境界線とするもの (有理境界 Gregory パッチ⁴⁾, 有理境界 C^2 Gregory パッチ⁵⁾), 3) NURBS (non-uniform rational B-spline) 曲線を境界線とするもの (NURBS 境界 Gregory パッチ⁶⁾, NURBS 境界 C^2 Gregory パッチ⁷⁾) と分類される。これらのパッチは総称して Gregory 型パッチと呼

ばれる。

これらのパッチによって表現された形状を用いて製品や金型を加工するためには、CAM システムに曲面データを受け渡すことが必要となる。各システム間のデータを変換する言語としては、IGES が一般に広く用いられているが、その曲面表現としては NURBS 曲面が採用されている。また、多くの CAD、あるいは CAM システムにおいては NURBS 曲面を用いている。そのために、各システム間でデータを共有するためには、Gregory 型パッチを NURBS 曲面に変換する方法が必要である。

Gregory 型パッチは、次数の上昇を厭わなければ NURBS 曲面に変換することが可能である。たとえば、双 3 次 Gregory パッチは双 7 次 NURBS 曲面(ただし、uniform integral) に⁹⁾、また、双 5 次有理境界 C^2 Gregory パッチは双 17 次 NURBS 曲面(ただし、uniform)に変換される。これらの例からもわかるように、変換によって次数の急上昇を招き、様々な幾何処理の効率が非常に悪くなる。

そこで、本研究では次数を上げずに Gregory 型パッチを近似的に NURBS 曲面に変換する方法を提案する。曾根ら⁹⁾は、NURBS 境界 Gregory パッチを NURBS 曲面に近似変換する方法を提案している。パッチの境界線近くにノットの挿入を行い、サンプリングされた点とその点に対応する変換後の点との距離を残差として、最小自乗法により NURBS 曲面の制御点を決定している。彼らは、挿入するノットを境界線に近付ければ近付ける程、単位接線ベクトルの誤差が減少すると述べているが、接線ベクトル以外の要素、たとえば、任意の位置での近似の精度とノット挿入位置との関係が不明である。また、誤差の上限を計算することができない。さらに、最小自乗法を用いており、複雑なパッチの変換には多大の処理時間を要することが予想される。

これに対し、本研究では局所的に Gregory 型パッチを Bézier パッチ、あるいは有理 Bézier パッチに近似することによって変換を行う。提案する変換法はすべての Gregory 型パッチに適用することができ、また、誤差の上限を計算することが可能である。処理は複雑な計算を必要とせず高速であり、局所的に処理を進めることができるので並列計算機にも適している。

第 2 章では、Gregory 型パッチの表現式について、第 3 章では、近似変換方法について、その変換の誤差解析を第 4 章で、その変換結果を第 5 章で述べる。

2. Gregory 型パッチの表現式

1 章で述べたように、Gregory 型パッチは 1) 多項式曲線を境界線とするパッチ、2) 有理曲線を境界線とするパッチ、3) NURBS 曲線を境界線とするパッチ、に分類できる。

2.1 多項式境界 Gregory 型パッチ

多項式曲線で囲まれた Gregory 型パッチは、Ueda and Harada¹⁰⁾の表記法を用いれば以下のように書き表すことができる：

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) P_{ij}(u, v) \quad (1)$$

ここで、 $B_i^n(u)$ ($i=0, \dots, n$) は以下の式で定義される Bernstein 基底関数を表す。

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \quad (2)$$

パッチの制御点 $P_{ij}(u, v)$ ($i=0, \dots, m, j=0, \dots, n$) は、

$$\begin{aligned} P_{ij}(u, v) = & (u^{\alpha_{ij0}}(1-u)^{\beta_{ij0}} v^{\gamma_{ij0}}(1-v)^{\delta_{ij0}} P_{ij0} \\ & + u^{\alpha_{ij1}}(1-u)^{\beta_{ij1}} v^{\gamma_{ij1}}(1-v)^{\delta_{ij1}} P_{ij1}) \\ & / (u^{\alpha_{ij0}}(1-u)^{\beta_{ij0}} v^{\gamma_{ij0}}(1-v)^{\delta_{ij0}} \\ & + u^{\alpha_{ij1}}(1-u)^{\beta_{ij1}} v^{\gamma_{ij1}}(1-v)^{\delta_{ij1}}) \end{aligned} \quad (3)$$

$$= \frac{[P_{ij0}, P_{ij1}]}{[\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_{ij}, \delta_{ij}]} \quad (4)$$

ここで、 $(\alpha_{ij0}, \alpha_{ij1})$, $(\beta_{ij0}, \beta_{ij1})$, $(\gamma_{ij0}, \gamma_{ij1})$, $(\delta_{ij0}, \delta_{ij1})$ は、それぞれ 0, 1 の添字のどちらかが 0 か、あるいは一方が 0、他方が正の整数となる組とする：

$$\alpha_{ij0}\alpha_{ij1} = \beta_{ij0}\beta_{ij1} = \gamma_{ij0}\gamma_{ij1} = \delta_{ij0}\delta_{ij1} = 0 \quad (5)$$

α_{ij} は α_{ij0} と α_{ij1} との値を用いて以下のように定義する：

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} +\alpha_{ij0} & (\alpha_{ij0} > 0, \alpha_{ij1} = 0) \\ -\alpha_{ij1} & (\alpha_{ij1} > 0, \alpha_{ij0} = 0) \\ 0 & (\alpha_{ij0} = \alpha_{ij1} = 0) \end{cases} \quad (6)$$

整数 β_{ij} と γ_{ij} , δ_{ij} は同様に定義される。 $P_{ij}(u, v) = P_{ij0} = P_{ij1} \equiv P_{ij}$ の場合は、 α_{ijk} や β_{ijk} , γ_{ijk} , δ_{ijk} ($k=0, 1$) の値として非負の整数であればよいので、 $P_{ij}(u, v)$ を $[P_{ij}, P_{ij}]/[* , * , * , *]$ と表記する。

この表記法を用いると、たとえば、双 3 次 Gregory パッチは次式で与えられる：

$$\left(\begin{array}{cccc} \frac{[P_{00}, P_{00}]}{[* , * , * , *]} & \frac{[P_{01}, P_{01}]}{[* , * , * , *]} & \frac{[P_{02}, P_{02}]}{[* , * , * , *]} & \frac{[P_{03}, P_{03}]}{[* , * , * , *]} \\ \frac{[P_{10}, P_{10}]}{[* , * , * , *]} & \frac{[P_{11}, P_{11}]}{[* , * , * , *]} & \frac{[P_{12}, P_{12}]}{[* , * , * , *]} & \frac{[P_{13}, P_{13}]}{[* , * , * , *]} \\ \frac{[P_{20}, P_{20}]}{[* , * , * , *]} & \frac{[P_{21}, P_{21}]}{[* , * , * , *]} & \frac{[P_{22}, P_{22}]}{[* , * , * , *]} & \frac{[P_{23}, P_{23}]}{[* , * , * , *]} \\ \frac{[P_{30}, P_{30}]}{[* , * , * , *]} & \frac{[P_{31}, P_{31}]}{[* , * , * , *]} & \frac{[P_{32}, P_{32}]}{[* , * , * , *]} & \frac{[P_{33}, P_{33}]}{[* , * , * , *]} \end{array} \right) \cdot (7)$$

2.2 有理境界 Gregory 型パッチ

境界線が有理曲線の場合, 有理 Bézier パッチに類似した以下のような式で表される:

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) Q_{ij}(u, v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) w_{ij}(u, v)} \quad (8)$$

$$Q_{ij}(u, v) = (u^{\alpha_{ij0}}(1-u)^{\beta_{ij0}}v^{\gamma_{ij0}}(1-v)^{\delta_{ij0}} P_{ij0} \\ + u^{\alpha_{ij0}}(1-u)^{\beta_{ij0}}v^{\gamma_{ij0}}(1-v)^{\delta_{ij0}} P_{ij1}) \\ / (u^{\alpha_{ij0}}(1-u)^{\beta_{ij0}}v^{\gamma_{ij0}}(1-v)^{\delta_{ij0}} \\ + u^{\alpha_{ij0}}(1-u)^{\beta_{ij0}}v^{\gamma_{ij0}}(1-v)^{\delta_{ij0}}) \quad (9)$$

$$w_{ij}(u, v) = (u^{\alpha_{ij0}}(1-u)^{\beta_{ij0}}v^{\gamma_{ij0}}(1-v)^{\delta_{ij0}} w_{ij0} \\ + u^{\alpha_{ij0}}(1-u)^{\beta_{ij0}}v^{\gamma_{ij0}}(1-v)^{\delta_{ij0}} w_{ij1}) \\ / (u^{\alpha_{ij0}}(1-u)^{\beta_{ij0}}v^{\gamma_{ij0}}(1-v)^{\delta_{ij0}} \\ + u^{\alpha_{ij0}}(1-u)^{\beta_{ij0}}v^{\gamma_{ij0}}(1-v)^{\delta_{ij0}}) \quad (10)$$

例として, 双3次有理境界 Gregory パッチの制御点を示す. それらは以下のように与えられる.

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{[w_{000}P_{000}, w_{001}P_{001}]}{[+2, 0, -2, 0]} & \frac{[w_{010}P_{010}, w_{011}P_{011}]}{[+2, 0, -2, 0]} \\ \frac{[w_{100}P_{100}, w_{101}P_{101}]}{[+2, 0, -2, 0]} & \frac{[w_{110}P_{110}, w_{111}P_{111}]}{[+2, 0, -2, 0]} \\ \frac{[w_{200}P_{200}, w_{201}P_{201}]}{[0, +2, -2, 0]} & \frac{[w_{210}P_{210}, w_{211}P_{211}]}{[0, +2, -2, 0]} \\ \frac{[w_{300}P_{300}, w_{301}P_{301}]}{[0, +2, -2, 0]} & \frac{[w_{310}P_{310}, w_{311}P_{311}]}{[0, +2, -2, 0]} \\ \frac{[w_{020}P_{020}, w_{021}P_{021}]}{[+2, 0, 0, -2]} & \frac{[w_{030}P_{030}, w_{031}P_{031}]}{[+2, 0, 0, -2]} \\ \frac{[w_{120}P_{120}, w_{121}P_{121}]}{[+2, 0, 0, -2]} & \frac{[w_{130}P_{130}, w_{131}P_{131}]}{[+2, 0, 0, -2]} \\ \frac{[w_{220}P_{220}, w_{221}P_{221}]}{[0, +2, 0, -2]} & \frac{[w_{230}P_{230}, w_{231}P_{231}]}{[0, +2, 0, -2]} \\ \frac{[w_{320}P_{320}, w_{321}P_{321}]}{[0, +2, 0, -2]} & \frac{[w_{330}P_{330}, w_{331}P_{331}]}{[0, +2, 0, -2]} \end{array} \right) \quad (11)$$

ただし, 境界線の制御点 Q_{ij} を定める2点 P_{ij0} と P_{ij1} は同一点である, すなわち,

$$P_{ij0} = P_{ij1} \quad (i=0, \dots, 3, j=0, 3) \text{ or } \\ (i=0, 3, j=0, \dots, 3). \quad (12)$$

が成り立つ. さらに, 重みについても次の制限を加える.

$$w_{i,0,0} = w_{i,1,0} \quad (i=0, \dots, 3) \\ w_{i,2,0} = w_{i,3,0} \quad (i=0, \dots, 3) \\ w_{0,j,1} = w_{1,j,1} \quad (j=0, \dots, 3) \\ w_{2,j,1} = w_{3,j,1} \quad (j=0, \dots, 3). \quad (13)$$

2.3 NURBS 境界 Gregory 型パッチ

NURBS 境界 Gregory 型パッチ $S(u, v)$ は, 前述した2つのタイプの Gregory 型パッチと異なり, 3つの有理関数 S^a と S^b , S^c の組合せとして次式で表される:

$$S(u, v) = S^a + S^b - S^c. \quad (14)$$

たとえば, NURBS 境界 Gregory パッチの場合, S^a は次式で与えられる.

$$S^a(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^3 B_i^3(u) C_i^a(v)}{\sum_{i=0}^3 B_i^3(u) w_i^a(v)} \quad (15)$$

ここで, $C_i^a(v)$ と $w_i^a(v)$ ($i=0, \dots, 3$) は以下のように与えられる.

$$C_i^a(v) = \begin{cases} \sum_{j=0}^n N_{0j}^n(v) w_{0j}^a P_{0j}^a, & \text{for } i=0, 1 \\ \sum_{j=0}^n N_{ij}^n(v) w_{ij}^a P_{ij}^a, & \text{for } i=2, 3 \end{cases} \quad (16)$$

$$w_i^a(v) = \begin{cases} \sum_{j=0}^n N_{0j}^n(v) w_{0j}^a, & \text{for } i=0, 1 \\ \sum_{j=0}^n N_{ij}^n(v) w_{ij}^a, & \text{for } i=2, 3 \end{cases} \quad (17)$$

NURBS 境界 C^2 Gregory パッチの場合には S^a は

$$S^a(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^5 B_i^5(u) C_i^a(v)}{\sum_{i=0}^5 B_i^5(u) w_i^a(v)} \quad (18)$$

となる. S^b も同様に定義される. S^c は S^a と S^b の共通の曲面であり, NURBS 境界 Gregory パッチの場合, 双3次有理境界 Gregory パッチとして, また, NURBS 境界 C^2 Gregory パッチの場合, 双5次有理境界 C^2 Gregory パッチとして与えられる.

3. NURBS 曲面への近似変換

前章で示したように, Gregory 型パッチでは Bézier パッチ, あるいは有理 Bézier パッチ (以下では Bézier 型パッチと呼ぶ.) の1つの制御点や1つの重みを定義するのに, 場合によって2つの制御点や2つの重みを使用している. 以下に述べるアルゴリズムではこの特徴を利用して Gregory 型パッチを NURBS 曲面に近似変換する. NURBS 境界 Gregory 型パッチの場合には, S^a と S^b はノットの挿入により NURBS 曲面に変換可能であるので S^c を近似変換する (NURBS 境界型の場合には3.2節で詳細に述べる).

1. 図1で示すように, Gregory 型パッチをアイソパラメトリックラインにより, $m \times n$ のサブパッチに分割する. このときに生成されるサブパッチは Gregory 型パッチでも Bézier 型パッチでも

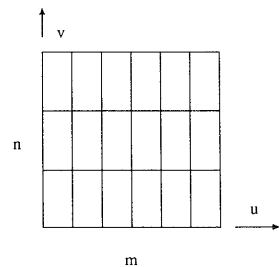


図1 $m \times n$ 個のサブパッチへの分割
Fig. 1 Subdivision into $m \times n$ subpatches.

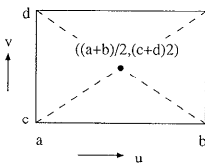


図2 サブパッチの中心位置を用いた近似

Fig. 2 Subpatch approximation using the center parameter value.

ない。

2. 定義域 $\{(u, v) | a \leq u \leq b, c \leq v \leq d\} = \{[a, b], [c, d]\} (0 \leq a, b, c, d \leq 1)$ で指定されるサブパッチの制御点をパラメータ (u, v) が $((a+b)/2, (c+d)/2)$ として与えられるとして近似する (図2参照)。この近似によりサブパッチは対応する Bézier 型パッチとして表される。たとえば、双3次 Gregory パッチは双3次 Bézier パッチとして、また、双5次有理境界 C^2 Gregory パッチは双5次有理 Bézier パッチとして表される。
3. ステップ2) で生成したサブパッチを NURBS 曲面に書き換える。たとえば、 $m \times n$ の双3次 Bézier パッチは $(m+3) \times (n+3)$ 個の制御点を用いた双3次 B-spline (NURBS) 曲面として表される。NURBS 曲面のノットベクトルは、その最初と最後は end-point interpolating NURBS 曲面になるように多重ノットとし、その他のノットはステップ1) のアイソパラメトリックラインのパラメータ値とする。NURBS 曲面の各制御点はその制御点の影響を受けるサブパッチにより決定する。

有理境界 Gregory 型パッチの場合には、同次座標を用いて4次元で同様に変換する。一連の処理を双3次 Gregory パッチに施したものを図3に示す。

3.1 NURBS 曲面の制御点の計算

変換アルゴリズムのステップ3)において、NURBS 曲面の制御点をいかに決定するかについてこの節で考察する。NURBS 曲面の1つの制御点は複数のサブパッチに対して影響を与えるが、影響を与えるサブパッチの個数はその境界線からの相対的な位置によって異なる。たとえば、双3次 Gregory パッチの変換を考えると、曲面のコーナーの制御点は1つのサブパッチの影響を受けるが、他の制御点では最大16個のサブパッチの影響を受ける。複数のサブパッチの影響を受ける場合、どのように NURBS 曲面の制御点を決定するかが問題となる。

制御点の計算法としては、その制御点のより近くにあるサブパッチの影響をより強く受けたほうが近似度

は高まると考えられるので以下の方法で行う。

1. 縦横ともに単位長さの平面を表すパッチに変換アルゴリズムのステップ1)・と2)を施す。このとき、近似ではなく厳密に変換されるので、各サブパッチによって与えられる制御点は一致する。
2. 前ステップで与えられる制御点の位置とサブパッチの中心 (サブパッチの定義域が $\{[a, b], [c, d]\}$ であれば $((a+b)/2, (c+d)/2)$) と制御点の距離を計算する (図4参照)。
3. 前ステップで計算した距離の逆数を重み係数と考え、影響を及ぼすすべてのサブパッチの制御点の重み付け平均和を、NURBS 曲面の制御点の座標とする。

この方法は、Gregory 型パッチのサブパッチの分割の仕方にも依存し、分割法が同じであれば重み係数を1度計算すればよい。この方法と単なる平均和との結果の誤差解析を第5章に示す。

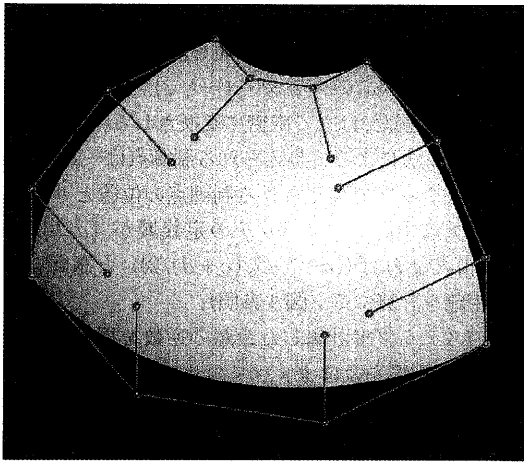
3.2 NURBS 境界 Gregory 型パッチの変換

NURBS 境界 Gregory 型パッチの場合、 S^a と S^b はノットの挿入により同じノットベクトルを持つ NURBS 曲面に変換可能である。 S^c を近似変換する際、 S^a 、 S^b と同じノットベクトルの各ノットの値で分割するとともに、必要に応じてさらに細かく分割する。(注意: Gregory 型パッチの定義域は $0 \leq u, v \leq 1$ であり、ノットの値 k_i も end-point interpolating 曲面を用いれば $0 \leq k_i \leq 1$ となる。) S^a と S^b の重みが異なる場合であっても、 S^c のサブパッチに対応する S^a 、 S^b のサブパッチも有理 Bézier パッチとして表せるので、4次座標で制御点の加減をすることによって S^c の近似誤差以外の誤差を含まずに変換される。

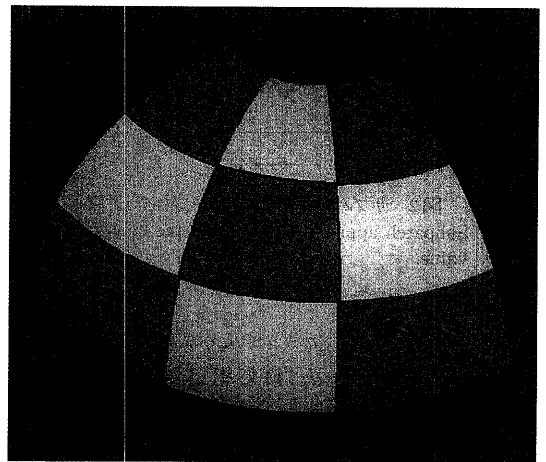
3.3 変換アルゴリズムの特徴

変換アルゴリズムの特徴は以下のようにまとめることができる。

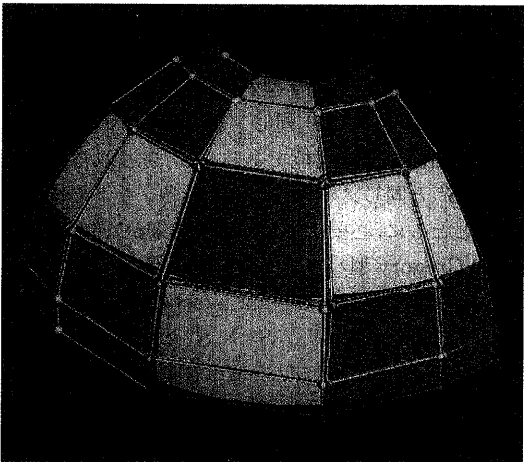
1. 境界線は厳密に一致する。
境界線は変換アルゴリズムのステップ1)によっても、厳密に変換されるので境界線はオリジナルのパッチと一致する。
2. 任意のノットベクトルについて変換可能である。
ノットの間隔は uniform である必要はなく、ある部分で精度を高めようと思えば、その周辺でのノットの間隔を密にして分割数を増やすことにより精度を向上できる。
3. m, n の数を大きくし分割数を増やせば、オリジナルの Gregory 型パッチに収束する。なぜならば、 m, n を増やすことによって Bézier 型パッチは Gregory 型パッチに収束する。Bézier 型パッチ



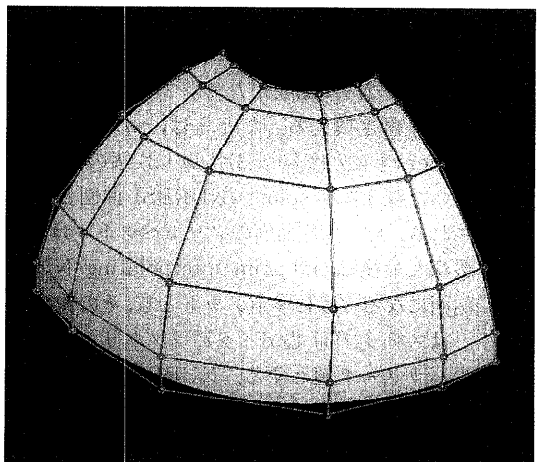
(a) Original bi-cubic Gregory patch



(b) Approximated subpatches (3x3)



(c) Approximated subpatches shown in (b) with control points and connecting lines



(d) Converted bi-cubic NURBS surface

図3 変換アルゴリズム
Fig. 3 Conversion algorithm.

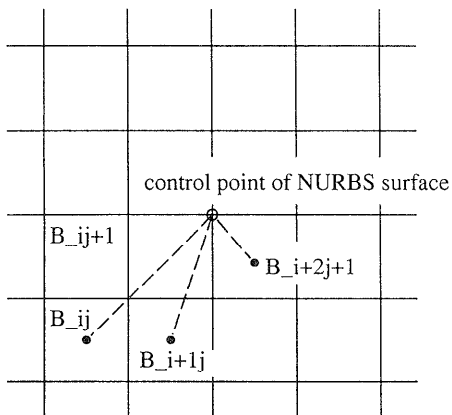


図4 SURBS 曲面の制御点と各サブパッチとの距離
Fig. 4 Distances between a control point and subpatches.

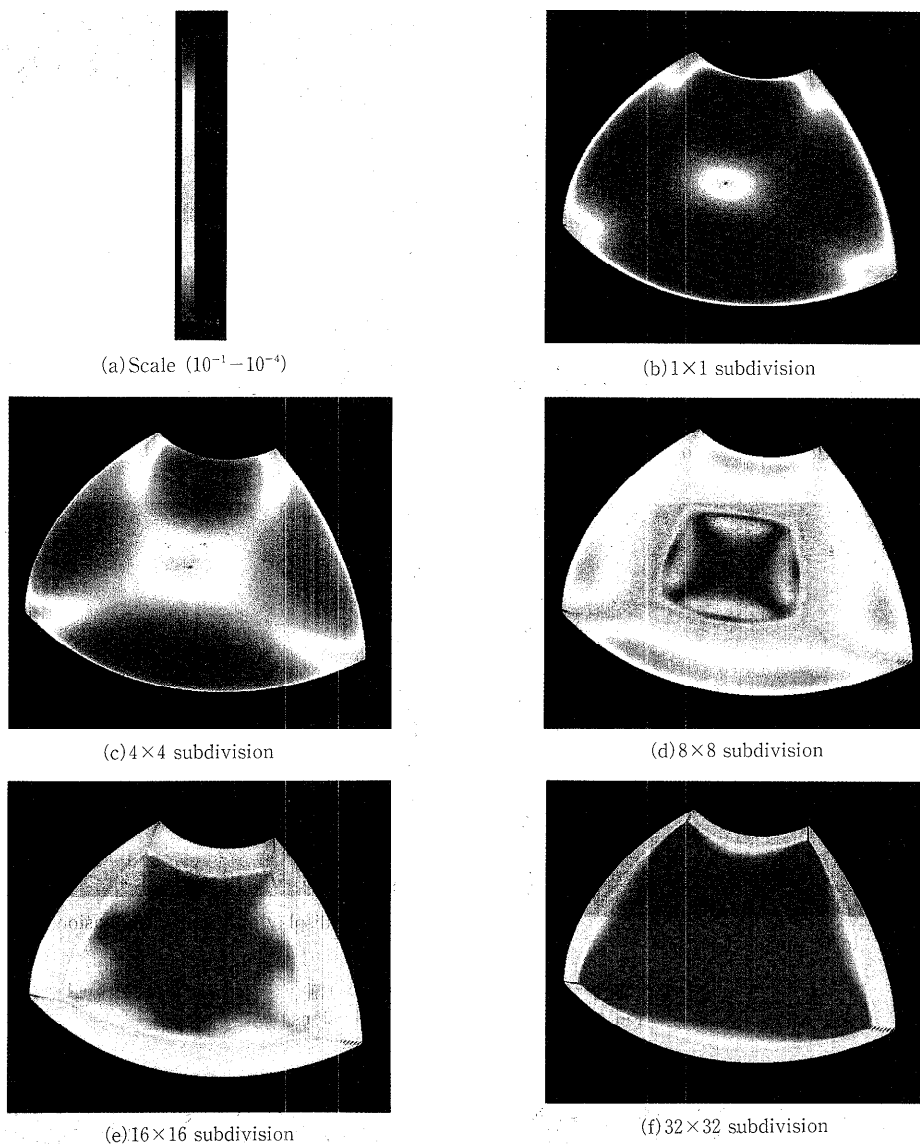


図5 誤差の表示 (10,000 点による計算値, パッチの大きさは $15 \times 15 \times 10$)
 Fig. 5 Error display (calculated at 10,000 points, the patch size is $15 \times 15 \times 10$).

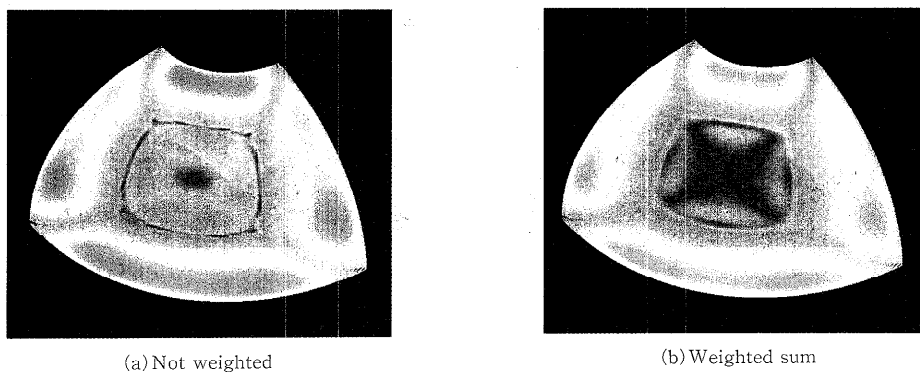
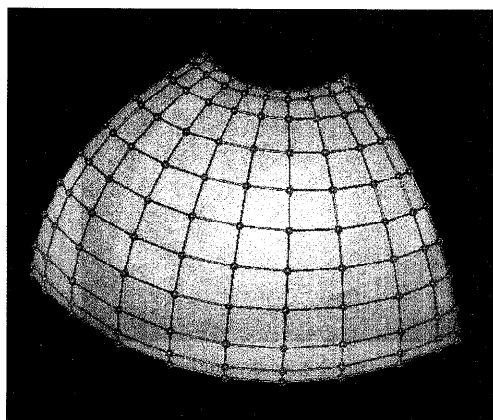
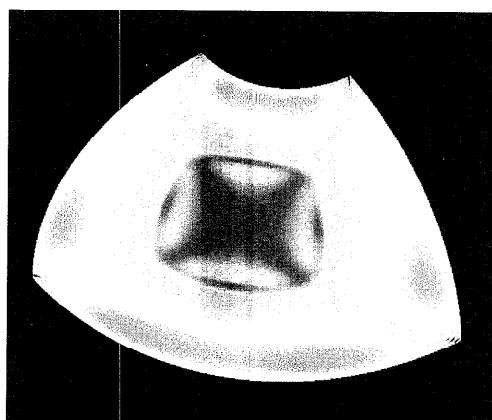


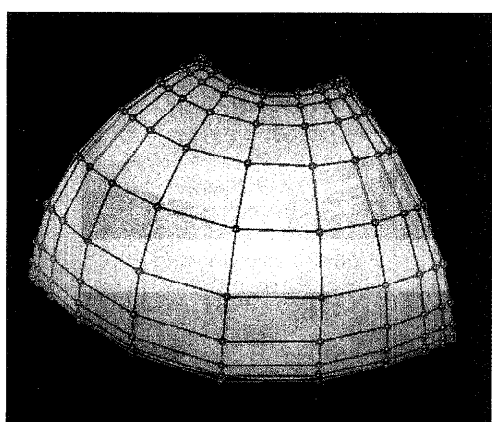
図6 重み付け平均和の効果
 Fig. 6 Effect of weighted sum.



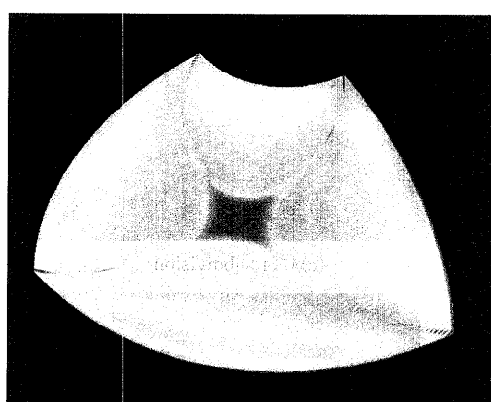
(a) Equal subdivision



(b) Error display of equal subdivision shown in (a)

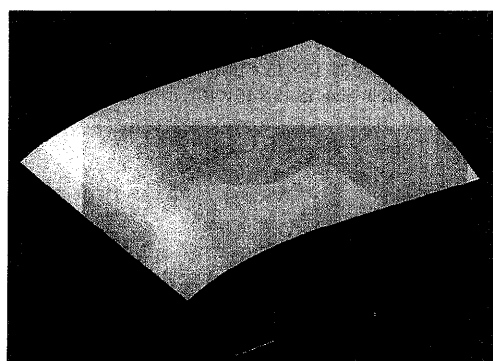


(c) Unequal subdivision

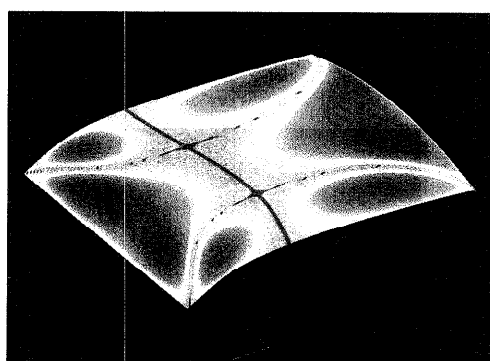


(d) Error display of unequal subdivision shown in (c)

図7 等当分割と周辺部で細かい分割
Fig. 7 Equal and unequal subdivisions.



(a) Converted surface



(b) Error display of the NURBS patch shown in (a)

図8 NURBS 境界 Gregory パッチの変換例 (パッチの大きさは $100 \times 120 \times 20$)

Fig. 8 Conversion example of a NURBS boundary Gregory patch (the patch size is $100 \times 120 \times 20$).

チがオリジナルに収束するので、それらから生成される NURBS 曲面も Gregory 型パッチに収束する (第 4 章参照)。

- 変換によって得られた NURBS 曲面は自然な連続性を持つ。すなわち、3 次 NURBS 曲面に変換されれば C^2 連続性を持ち、5 次 NURBS 曲面に変換されれば C^4 連続性を持つ。
- Gregory 型パッチの 1 つの内側の制御点、たとえば、双 3 次 Gregory パッチの制御点 P_{11} は $u=v$ の対角線上では対応する Bézier 型パッチとの差は 0 である。同様に P_{22} も $u=v$ で 0、 $v=1-u$ の対角線上で P_{12} , P_{21} は 0 である。どの位置で差、あるいは誤差が 0 になるかは、その制御点のブレンディング関数 ((4) 式) に依存する。

4. 誤差解析

曲面を測定点から生成するのとは異なり、変換はオリジナルのパッチの形状を把握しているので厳密に誤差解析をすることできる。この章では、誤差解析、とくに、変換アルゴリズムのステップ 1) にともなう誤差の上限を解析する。

4.1 サブパッチの近似変換による誤差

ここでは、説明の煩雑さを避けるために双 3 次 Gregory パッチを例として取り上げ、サブパッチの変換誤差について述べる。双 3 次 Gregory パッチは (1) 式で表されるが、それを次のように関数 $f_{ij}(u, v)$ を用いて書き変える。

$$\begin{aligned} S(u, v) &= \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_i^3(u) B_j^3(v) P_{ij}(u, v) \\ &= \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_i^3(u) B_j^3(v) \{(1-f_{ij}(u, v)) P_{i0}(u, v) + f_{ij}(u, v) P_{i1}(u, v)\} \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、

$$f_{ij}(u, v) = \begin{cases} \frac{v}{u+v} & \text{for } (i=1, j=1) \\ \frac{v}{(1-u)+v} & \text{for } (i=2, j=1) \\ \frac{(1-v)}{u+(1-v)} & \text{for } (i=1, j=2) \\ \frac{(1-v)}{(1-u)+(1-v)} & \text{for } (i=2, j=2) \end{cases} \quad (20)$$

この式を用いれば、制限された定義域 $\{[a, b], [c, d]\}$ に対応するサブパッチは以下のように表せる^{11), 12)}。

$$\begin{aligned} S'(u, v) &= \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_i^3(u) B_j^3(v) P'_{ij}(u, v) \\ a \leq u \leq b, c \leq v \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、各 P'_{ij} は $P_{kl}(u, v)$ $k=0, \dots, 3, l=0, \dots, 3$ の加

重和として表される。すなわち、次式を満たす定数 W_{kl}^{ij} が存在して、

$$\begin{aligned} P'_{ij}(u, v) &= \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 W_{kl}^{ij} P_{kl}(u, v) \\ &= \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 W_{kl}^{ij} \{(1-f_{kl}(u, v)) P_{k0} \\ &\quad + f_{kl}(u, v) P_{k1}\}. \end{aligned} \quad (22)$$

$S'(u, v)$ の制御点は、2 点の制御点 P_{k0} と P_{k1} の関数 $f_{kl}(u, v)$ によって定められる様々な線形結合の和として与えられるので、Gregory パッチでも Bézier パッチでもない。このパッチの近似として用いられる Bézier パッチは次式で表される。

$$\begin{aligned} B'(u, v) &= \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_i^3(u) B_j^3(v) Q'_{ij}(u, v) \\ a \leq u \leq b, c \leq v \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、

$$\begin{aligned} Q'_{ij}(u, v) &= \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 W_{kl}^{ij} Q_{kl} \\ &= \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 W_{kl}^{ij} \left\{ \left(1 - f_{kl} \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) \right) P_{k0} \right. \\ &\quad \left. + f_{kl} \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) P_{k1} \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

したがって、近似変換に伴う誤差の上限 $e_{\max}$ は以下のように定式化される。

$$e_{\max} = \max |B'(u, v) - S'(u, v)| \quad (25)$$

$$\leq \max \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_{3,i}(u) B_{3,j}(v) |Q'_{ij} - P'_{ij}| \quad (26)$$

$$\leq \max |Q'_{ij} - P'_{ij}| \quad (27)$$

$$\leq \max \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 W_{kl}^{ij} \left| \left(f_{kl} \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) - f_{kl}(u, v) \right) (P_{k1} - P_{k0}) \right| \quad (28)$$

ここで、 W_{kl}^{ij} は a と b, c, d にのみ依存する定数であり、de Casteljau アルゴリズム等によって計算できる¹¹⁾。Miura¹²⁾が指摘しているように、制限された定義域 $\{[a, b], [c, d]\}$ に対する関数 $f_{ij}(u, v)$ の最大値、最小値は簡単に求めることができる。たとえば、 $f_{11}(u, v)$ は $(u, v)=(a, d)$ で最大となり、 (b, c) で最小となる。一般的な Gregory 型パッチについても、(4) 式に対して $f_{ij}(u, v)$ と同様な式が与えられ、その式に対して容易に最大値、最小値が求められる。よって

$$\begin{aligned} e_{\max} &\leq \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 W_{kl}^{ij} \max \left| \left(f_{kl} \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right) - f_{kl}(u, v) \right) (P_{k1} - P_{k0}) \right|. \end{aligned} \quad (29)$$

この式を図 3 で示したパッチに対して適用した結果を表 1 に示す。この表において、実測値としてはパッチ上の点 10,000 個に対して計算した距離の最大値を示した。(29) 式からもわかるように、分割を細かくして

表 1 近似誤差の上限
Table 1 Upper bound of conversion error.

	Calculated error bound	Measured error max
Subdivision 1×1	1.2132	0.11994
Subdivision(equal size)8×8	0.10326	0.039443

いけば $e_{\max}$ は 0 に収束し変換による誤差が消失する(厳密な証明は参考文献 11), 12) を参照). すなわち, 変換によって得られる NURBS 曲面はオリジナルの Gregory 型パッチに収束する. 有理境界 Gregory 型パッチに対しては, (8) 式の分母 $w(u, v)$ が次式のように表されるので,

$$\begin{aligned} w(u, v) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n B_i^n(u) B_j^n(v) w_{ij}(u, v) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n B_i^n(u) B_j^n(v) \{ (1 - f_{ij}(u, v)) w_{ij0} \\ &\quad + f_{ij}(u, v) w_{ij1} \} \end{aligned} \quad (30)$$

$w(u, v)$ の最小値 $w_{\min}$ は次式で表される.

$$\begin{aligned} w_{\min} &\geq \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n W_{kl} \min \{ (1 - f_{kl}(u, v)) w_{kl0} \\ &\quad + f_{kl}(u, v) w_{kl1} \} \end{aligned} \quad (31)$$

w_{ij0} と w_{ij1} の大小によって最小値をとる (u, v) の値は変わるが上式の計算は容易である. 近似誤差は $e_{\max}/w_{\min}$ として与えられる.

変換アルゴリズムのステップ 3) に伴う近似誤差は, NURBS 曲面の制御点に影響を及ぼすすべてのサブパッチの定義域の和に対して, ここで述べた誤差解析を行えばよい.

5. 変換結果

図 3 に示した双 3 次 Gregory パッチを様々に分割して変換した例を示す. 図 5 では, 分割数が増加することによって近似度が上がっていることがわかる. 図 6 では, 8×8 に等分割した場合について, 3.1 節で述べた制御点の重み付け平均和の効果を示す. 重み付け平均和を行うことによって中心部と周辺部において近似度が上がっていることがわかる. 図 7 では, パッチを等分割するのではなく, 周辺部に近づくにつれて分割を細かくした例を示す. パッチの分割数 (NURBS 曲面のデータ量) は同じであるが, 近似度が平均化している. 最後に, NURBS 境界 Gregory パッチに変換を施した例を図 8 に示す.

6. おわりに

Gregory 型パッチは Bézier 型パッチと同様さまざまに加重された制御点の和としてパッチの 1 点が定義される. Bézier 型パッチの制御点や重みはパラメータ

値によらず不動不変であるのに対して, Gregory 型パッチの制御点や重みはそれらの値に従って変動する. この性質により接平面の連続性や曲率の連続性を容易に保証することができるが, 同時に Gregory 型パッチを NURBS 曲面に変換すると次数が急上昇してしまう.

そこで, 本研究では Gregory 型パッチを指定された個数のサブパッチに分割し, それらをその Gregory 型パッチのもととなった Bézier 型パッチで近似することによって, 次数を増加することなく NURBS 曲面に近似変換する方法を提案した. その特徴として, 境界線は近似ではなく厳密に変換されるので, 隣接するパッチとの間に間隙が生じることはない. また, 変換に伴う近似の誤差の上限をパッチ全体としても, また部分に対しても計算できるので, 分割の仕方を変えることによって精度に対する要求とデータ量に対する要求とのトレードオフをスムーズに行うことができる. たとえ, 分割数が増加したとしても煩雑な処理を必要としないので高速に変換することができる. また, 局所的に処理を進めることができるので並列計算機にも適している. この近似変換を用いることによって, Gregory 型パッチを自由曲面の表現式として採用するシステムと, NURBS 曲面をベースとするさまざまな CAD/CAM システムとが次数を増加することなく曲面データを共用することができる.

参 考 文 献

- 1) 三浦憲二郎, 千代倉弘明: NURBS 曲線に囲まれた C^2 Gregory 型パッチ, 第 回情報処理学会全国大会論文集 (2), pp.439-440 (1994).
- 2) 鳥谷浩志, 千代倉弘明: 3 次元 CAD の基礎と応用, pp.72, 共立出版, 東京 (1991).
- 3) Miura, K. T. and Wang, K. K.: C^2 Gregory Patch, Post, F. H. and Barth, W. (ed.), *Eurographics '91*, pp. 481-492, North-Holland (1991).
- 4) Chiyokura, H., Takamura, T., Konno, K. and Harada T.: G^1 Surface Interpolation over Irregular Meshes with Rational Curves, Farin, G. (ed.), *NURBS for Curves and Surface Design*, pp.15-34, SIAM (1991).
- 5) Miura, K. T.: G^2 Continuous Interpolation over Rational Curve Meshes, Thalmann, N. M. and Thalmann, D. (eds.), *Communicating with Virtual Worlds*, pp. 270-281, Springer-Verlag (1993).
- 6) Sone, J., Watanabe, T., Yamakawa, S. and Chiyokura, H.: Surface Control using a NURBS Boundary Gregory Patch, *CG International '94*, Melbourne, Australia (1994).

- 7) Miura, K. T. and Chiyokura, H.: NURBS Boundary C^2 Gregory Patch: *International Conference on Computer Aided Geometric Design*, Penang, Malaysia (1994).
- 8) Takamura, T., Ohta, M., Toriya, H. and Chiyokura, H.: A Method Convert a Gregory Patch to a Rational Bézier Patch and Its Applications, Patrikalakis, N. M. (ed.), *Scientific Visualization of Physical Phenomena*, pp. 543 - 562, Springer-Verlag (1991).
- 9) 曾根順治, 千代倉弘明: NBGP から NURBS 曲面への曲面変換: 慶應大学環境情報学部テクニカルレポート (1994)
- 10) Ueda, K. and Harada, T.: Generalization of a Family of Gregory Surfaces, Patrikalakis, N. M. (ed.), *Scientific Visualization of Physical Phenomena*, pp. 417 - 434, Springer-Verlag (1991).
- 11) 三浦憲二郎, 王國金: Gregory パッチ, および C^2 Gregory パッチの部分領域の境界箱とそのレイトレーシングへの応用, 情報処理学会論文誌, Vol. 34, No.3, pp.436-446 (1993).
- 12) Miura, K. T.: Ray Tracing Gregory-type Patches, *CG International '94*, Melbourne, Australia (1994).

(平成 6 年 11 月 7 日受付)

(平成 7 年 2 月 10 日採録)



三浦憲二郎 (正会員)

昭和 34 年 1 月 2 日生。昭和 57 年東京大学工学部精密機械工学科卒業。昭和 59 年同大学修士課程修了。同年、キャノン株式会社入社。機械系 CAD/CAM システムの開発に従事。平成 3 年コーネル大学機械工学科博士課程修了。平成 5 年会津大学コンピュータ理工学部コンピュータソフトウェア学科助教授。曲面の設計, CAD/CAM, 要素自動分割, マイクロマシン等に興味を持つ。Ph.D. ACM, ASME 各会員。



曾根 順治

昭和 36 年 2 月 4 日生。昭和 57 年豊橋技術科学大学エネルギー工学科卒業。昭和 59 年同大学修士課程修了。(株)東芝生産技術研究所に勤務。平成 5 年から慶應義塾大学環境情報研究所訪問所員。CAD/CAM の研究・アプリケーションの開発に従事。自由曲面の生成・形状制御および製造システムに興味を持つ。



千代倉弘明 (正会員)

昭和 29 年 4 月 11 日生。昭和 54 年慶應義塾大学工学部数理工学科卒業。昭和 56 年同大学修士課程修了。昭和 59 年東京大学工学部精密機械博士課程修了。平成 2 年慶應義塾大学環境情報学部助教授。研究テーマは 3D 形状モデリングとその応用。工学博士。著書は Solid Modelling with DESIGNBASE, Addison-Wesley, 1988. 3D-CAD, Springer-Verlag, 1993. グラフィックス機能論, 産業図書, 1995.