3ZC－2

曲率連続なインボリュートスプライン補間曲線

豊田工大　黒田　満

1. はじめに

接線連続な円弧列に糸を巻きつけてピンと張ったままほどいてゆくとき，糸の先端が与えられた点列を曲率連続に補間するような（インボリュート）曲線を設計する方法を提案する．

曲線を構成するインボリュート弧は古くから歯車をはじめ広い分野で使われて重要な役割を果たしてきたが，美しい形状を設計するための好ましい性質を持っていることも知られている[1]．簡単な道具を使えばインボリュート弧を手で描くことができるし，インボリュート弧発生器を備えた数値制御（NC）工作機械に，僅かなデータを入力するだけで滑らかな補間曲線を生成することができる．提案手法はこのように工学的に有用な曲線を導くことができる．

具体的には，このインボリュート曲線の曲率半径が接線の向きを変数とした折れ線グラフで表されることを使って，曲線が与点列を補間する条件を簡単な非線型連立方程式に変換してニュートン法で解く．このとき，曲線の与点での曲率半径を与点での接線の向きを変数としてスパンごとに解くことによって，関係式を実用レベルにまで簡単化することができた．このように，本手法は従来のパラメトリック表現のスプライン曲線ではできなかった，設計者が対象曲線の曲率プロファイルを直接記述してこれをある程度制御することや，必要ならインボリュート弧を追加挿入して特定の通過点での接線や曲率を指定することを可能にした．

従って，いわゆる「美しい滑らかな曲線」として知られるようになった「連続で少ない単調な部分から成る曲率プロファイルを持つ曲線」を簡単に導出できることを理論的に示すとともに，具体的に幾つかの曲線を導いて新しい曲線の性質を明らかにする．

2. インボリュート曲線

平面曲線 $\boldsymbol{r}$ を曲線に沿う弧長 s で微分すると単位接線ベクトル $\boldsymbol{t}$ を得る．

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{t} \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}. \tag{1}$$

この接線の向きを表す（x 軸の正の向きとなす）角 θ を更に s で微分すると曲率を，その逆数として，曲率半径を得る．インボリュート曲線の曲率半径は次式のように，縮閉線である（半径 R の）円弧の弧長に比例するので，θ に比例する．ただし，$-\infty < \theta < \infty$．一般に，曲率半径は曲線が左に曲がるとき正である．

$$\rho \equiv \frac{ds}{d\theta} = \rho_A + R(\theta - \theta_0). \tag{2}$$

この式から弧長 s が θ の2次関数となるので，曲率半径はまた，弧長の平方根に比例する．

逆に，式（1），(2）から θ について積分すれば曲線を得る．このとき，次式の基本的な関係を使う．

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{d\theta} = \boldsymbol{n}, \quad \frac{d\boldsymbol{n}}{d\theta} = -\boldsymbol{t}, \quad \int \theta \boldsymbol{t} d\theta = -\theta\boldsymbol{n} + \boldsymbol{t}. \tag{3}$$

実際に，θ_0 から θ_1 まで積分して次式を得る．

$$\Delta\boldsymbol{p}_0 = \int_{s_0}^{s_1} \boldsymbol{t} ds = \rho_A \boldsymbol{n}_0 + R(\boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_0) - \rho_B \boldsymbol{n}_1. \tag{4}$$

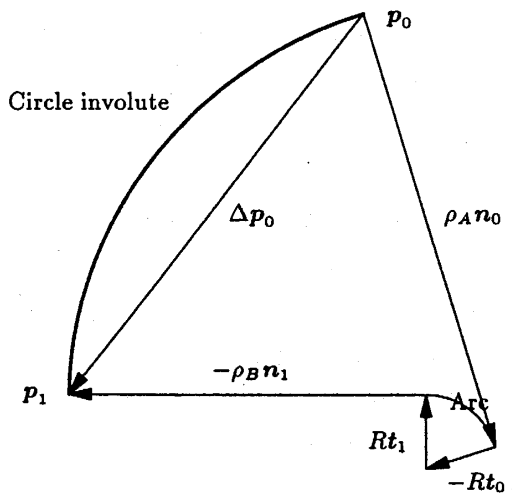

図1　インボリュート弧

ただし，$R = \dfrac{\Delta\rho_A}{\Delta\theta_0}$，$\boldsymbol{r}(\theta_0) = \boldsymbol{p}_0$，$\boldsymbol{r}(\theta_1) = \boldsymbol{p}_1$.

このベクトル式の意味は図1から明らかである．上式（4）を次のように書きかえてベクトル積をとり，曲率半径 ρ_A，ρ_B について解くことができる．

$$\rho_A\{\boldsymbol{n}_0 - \frac{1}{\Delta\theta_0}(\boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_0)\} + \rho_B\{-\boldsymbol{n}_1 + \frac{1}{\Delta\theta_0}(\boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_0)\} = L_0\boldsymbol{d}_0.$$

ここで，$\boldsymbol{d}_0$ は $\Delta\boldsymbol{p}_0$ と同じ向き（ϕ_0）の単位ベクトルである．各ベクトルの向きから次式を得る．

$$\rho_A = \frac{\Delta\theta_0\cos(\theta_1-\phi_0)+\sin(\theta_0-\phi_0)-\sin(\theta_1-\phi_0)}{-2+2\cos\Delta\theta_0+\Delta\theta_0\sin\Delta\theta_0}L_0 \quad (5)$$

$$\rho_B = \frac{\Delta\theta_0\cos(\theta_0-\phi_0)+\sin(\theta_0-\phi_0)-\sin(\theta_1-\phi_0)}{-2+2\cos\Delta\theta_0+\Delta\theta_0\sin\Delta\theta_0}L_0 \quad (6)$$

1スパンで考えるときには，角度を ϕ_0 から測り始めて式を簡単化（$\phi_0 = 0$）することができる．

3. インボリュートスプライン

上式（2.），(5）によって次式の点 $\boldsymbol{p}_i$ と接線方向 θ_i の列を接線連続に補間することができる．

$$\boldsymbol{r}(\theta_i) = \boldsymbol{p}_i, \qquad i = 0,\ 1, \ldots, n. \qquad (7)$$

一方，点列を曲率（G^2）連続に補間するためには次の条件式（7）を満たすように，未知数 θ_0，$\theta_1, \ldots, \theta_n$ について解く必要がある．

$$\rho(-\theta_i) = \rho(+\theta_i), \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots, n-1. \qquad (8)$$

ただし，両辺は（2.），(5）式と同様な式である．また，

$$\Delta\boldsymbol{p}_i \equiv L_i\begin{pmatrix}\cos\phi_i \\ \sin\phi_i\end{pmatrix}, \qquad i = 0,\ 1, \ldots, n-1.$$

ここで，未知数は $n+1$ 個，方程式（7）は $n-1$ 個あるので，例えば，両端の接線を指定する条件を2個加えてニュートン法で解くことができる．

図2はインボリュートスプライン補間曲線の例で，その縮閉線も示している．この曲線の場合，接線連続な円弧列となる縮閉線が2つの尖点を含んでいるが，曲線は十分滑らかである．初期値には3次の C^2 補間曲線の接線の向きを用いたが，局所的な接線推定法による値等も利用できる．ところで，G^2 インボリュート補間曲線は変曲点を含むことができないので，この付近を（曲率が弧長に比例する）クロソイド弧で置き換えること[2]が考えられる．また，実用上はこの非線型連立方程式を線形化繰り返し計算に変換して解くことができる[3]．

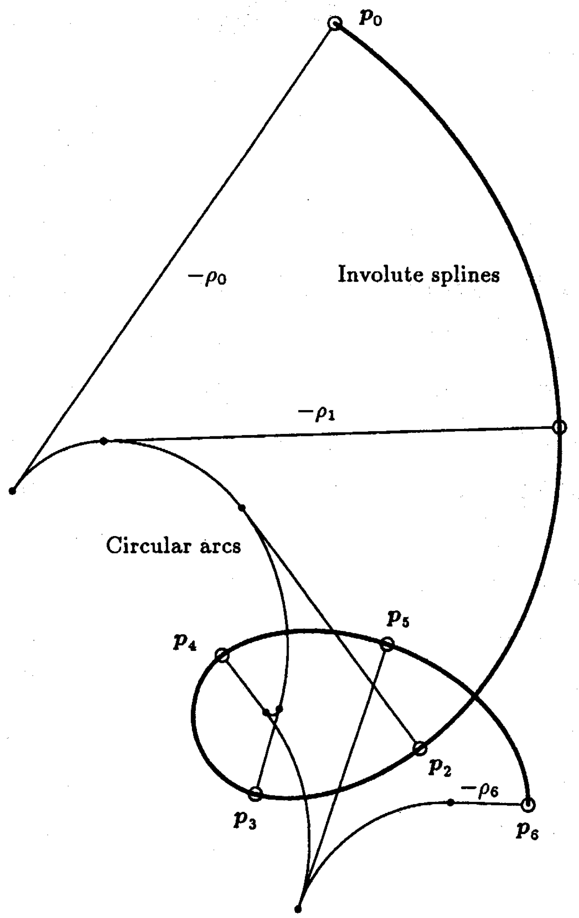

図2 G^2 インボリュートスプライン補間曲線

4. まとめ

G^2 インボリュートスプライン補間曲線を設計する方法を提案した．曲率半径が接線の向き，あるいは弧長の平方根を変数とする折れ線グラフとなる滑らかな曲線を生成できる．これはインボリュート弧発生器を備えた最近のNC機には特に有用である．

参考文献

1) Farouki, R.T. and J. Rampersad, Cyles upon Cycles: An Anecdotal History of Higher Curves in Science and Engineering, in *Mathematical Methods for Curves and Surfaces II*, Daehlen, M., T. Lyche and L. L. Schumaker (eds.), Vanderbilt University Press, Nashville & London (1997) 95–116.
2) 黒田 満，倉賀野 哲造，久保 哲夫：曲率連続な対数らせんスプライン補間曲線，情報処理学会論文誌，**39-3** (1998) 602–609.
3) Su Bu-qing and D.Y. Liu: *Computational Geometry — Curve and Surface Modeling*, Academic Press, San Diego (1989) 199–202.