2H－7

耐故障トーラス構成の一方式とシミュレーションによる評価

松井 龍司　　玉木 久夫
明治大学理工学部 {matsui, tamaki}@cs.meiji.ac.jp

1 はじめに

ひとつのVLSIチップ上にプロセッサ配列をおいて大規模並列計算機を構成する技術が検討されている [1]。そのようなプロセッサ配列の歩留まりをあげるための低コストな方法として、かなりの割合（例えば5％）のプロセッサ要素が機能しなくても残りの要素から所期のネットワークを構成できるようプロセッサ要素数とその結合構造にあらかじめ冗長性をもたせる方式を検討する。ここでは、特に目標の構造はトーラス結合（またはメッシュ結合）を考える。例えば、各プロセッサ要素が確率5％で使用不能となる状況で、100×100 のトーラスを得ることを目標とする場合、我々の方式では5割増しの数のプロセッサを用意すればほぼ百パーセントの確率で目標が達成されることをシミュレーション実験により確認した。

2 モデル

我々は問題を、目標グラフ G のホスト多重グラフ H への良い埋め込みを保証する問題として定式化する。H 中の故障ノードの集合を $U \subseteq V(H)$ とするとき、G の良い埋め込みとは、G の頂点を $V(H) \setminus U$ 中の頂点に、G の辺を H の経路に割り当てる写像 ψ で（1）相異なる $u, v \in V(G)$ に対しては $\psi(u) \neq \psi(v)$、かつ（2）相異なる $e, f \in E(G)$ に対しては経路 $\psi(e)$ と経路 $\psi(f)$ が辺を共有しない、ようなものを言う。ここで、我々は「経路 $\psi(e)$ が故障ノードを含まない」ということを要求しない。これは、「故障ノードでも通信リンクを短絡する機能だけは保持している」という仮定に対応する。理論的研究においては故障ノードを含まない経路のみを許すモデル化が一般的に用いられているが（例えば [2, 3]）、そのモデルでは多数の故障を許容するためには莫大な辺数の冗長度を要する。通信短絡機能の複雑度がプロセッサ全体の複雑度に比較して各段に小さいことを考えれば、その部分の信頼性をはるかに高くすることができるという仮定は現実的と思われる。

ここでは、目標グラフ G が $n \times n$ トーラスである場合を考える。すなわち、$V(G) = \{(i,j) \mid 0 \leq i,j < n\}$、$E(G) = \{((i,j),(i,j+1 \bmod n)) \mid (i,j) \in V(G)\} \cup \{((i,j),(i+1 \bmod n, j)) \mid (i,j) \in V(G)\}$。

3 耐故障トーラスの構成

我々のホスト多重グラフ H は、行数が $m > n$、列数が n のトーラスにおいて各垂直辺 $((i,j),(i+1 \bmod n, j))$ を2重化したものである。故障ノードの集合 U が与えられたとき、G の埋め込みは次の方針で行なう。大方針は G の第 j 列の頂点は H の第 j 列の頂点に割り当てるということである。行の構成をわかりやすくするために、バンド [3] のアイデアを用いる。バンドはここでは、n 個の $V(H)$ の頂点の列 $(i_0, 0), (i_1, 1), \ldots, (i_{n-1}, n-1)$ で、すべての $0 \leq j < n$ に対して $|i_j - i_{j+1 \bmod n}| \leq 1$ を満たすものを言う。バンド B が頂点 u を含む時、B は u を被覆するという。

「命題」k 本の互いに交差しないバンドの集合によってすべての故障ノードが被覆できたとすると、$(m-k) \times n$ トーラスの H への良い埋め込みが存在する。

図1は埋め込みの方式を示している。ここで、$n = 5$, $m = 8$, $k = 3$ である。図1で、バンドに被覆されていない頂点が目標グラフの頂点となる。各列においてバンドに属さない $m - k = 5$ 個の頂点のそれぞれは H の垂直辺からなる経路によってもっとも近い同一列内の頂点とつながれる。この接続は図に示されていない。行の接続の一例が点線によって示されている。第 j 列の頂点は、何本かの垂直辺と一本の水平辺を用いて必要なだけの数のバンドを飛び越えて第 $j+1$ 列の頂点と接続される。

上の命題より、良い埋め込みを得るためには、故障ノードを被覆する $m - n$ 本のバンドを求めれば十分である。

A Fault-Tolerant Torus and Its Evaluation by Simulation
Ryuji Matsui　　Hisao Tamaki
School of Sience and Technology, Meiji University

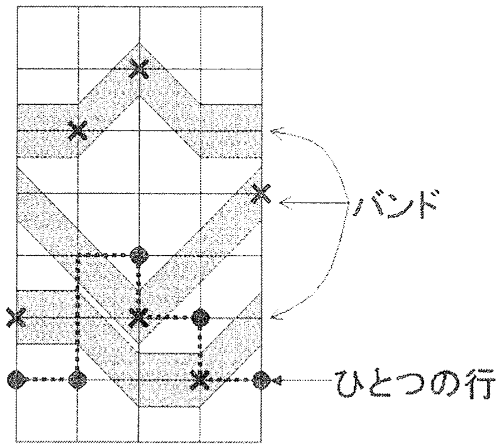

図 1: バンドに基づいた目標トーラスの埋め込み

4 バンド生成アルゴリズム

故障ノードの集合Uを頂点集合とし、$u=(i_1,j_1), v=(i_2,j_2)\in U$に対して、$(i_2-i_1) \bmod n \geq (j_2-j_1) \bmod m$のときに$u$から$v$へ辺を引いて得られる有向グラフを$F$とする。$U$の頂点をすべて被覆するバンドにおいて、$U$の頂点と$U$の頂点を結ぶ経路は$F$の辺に対応する。そこで、最小数のバンドによる被覆を求める問題はFの最小数の有向経路による被覆の問題に帰着することができる。さらに、この問題は、2部グラフの最小コストマッチングの問題に帰着することができる。本研究では、ハンガリー法を用いて最小コストマッチングを解いた。図2に、故障ノードを含んだホストグラフの例とそれに対応したマッチング問題の対象となる2部グラフを示す。2部グラフの各辺はFの辺と対応しており、辺(u,v)の重みはHにおけるuとvの水平距離である。実際には、バンドの交差を回避するためにさらにuとvの直線距離も重みの要素として使用している。図2の例を解くと、最小コストマッチングの解は$(a_1,b_2),(b_1,a_2),(c_1,d_2),(d_1,c_2),(e_1,e_2)$となるので、$a$と$b$、$c$と$d$、$e$と被覆するバンドを3本配置する。$k$本以下のバンドによりすべての故障ノードが被覆できたとき、$(m-k)\times n$のトーラスが埋め込めるので、$k\leq m-n$ならば成功である。

5 実験結果

乱数で故障ノードの集合を生成し、前述のアルゴリズムが目標トーラスの埋め込みに成功するかを調べる実験を行なった。$n=100$とし、mを130から150の

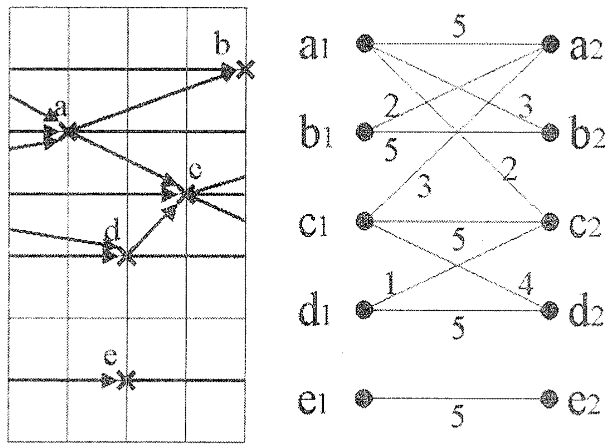

図 2: 有向グラフFとFに対応する2部グラフ

		m(行数)		
		130	140	150
故障確率	3 %	69	100	100
	4 %	2	100	100
	5 %	0	74	100
	6 %	0	5	99

表 1: 100 回の試行での成功回数

間、故障確率を3～6％の間で変化させて行なった結果を表1に示す。頂点数の冗長度が5割である$m=150$の場合、故障確率が5％以下ならばほぼ確実に埋め込みが得られている。

参考文献

[1] C.L. Wu, Implementing Parallelism on Silicon, Keynote address, IEEE ICPP 98.

[2] J.Bruck, R. Cypher, and C.T. Ho, Fault-tolerant meshes and hypercubes with minimal number of spares, IEEE Transaction on Computers 42 No.9 (1993).

[3] H.Tamaki, Construction of the mesh and the torus tolerating a large number of faults. Journal of Computer and System Sciences, 53, No.3 (1996).