漸化式を用いる積分 $\int_0^x J_\nu(t)/t\,dt$ の数値計算法の誤差解析

5D－2

山本 徹志　　吉田 年雄
中部大学経営情報学研究科院生　　中部大学経営情報学部

1. はじめに

積分 $\int_0^x J_\nu(t)/t\,dt$ ($J_\nu(t)$:第1種ベッセル関数)は $J_{\nu+2k+1}(x)$ $(k=0,1,2,\cdots)$ を用いて次式のように表される[1)]。

$$\int_0^x J_\nu(t)/t\,dt=\frac{2}{\nu x}\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+2k+1)J_{\nu+2k+1}(x)\qquad(\nu>0)\tag{1}$$

漸化式を用いる方法で計算された $J_{\nu+2k+1}(x)$ の値を上式の有限項で打ち切ったものに代入すれば、$\int_0^x J_\nu(t)/t\,dt$ の近似式が得られる。本稿ではその誤差解析を行い、誤差の表示式および誤差の評価式を与える。

2. 近似式

ν を実数 $(\nu>0)$、x を実数 $(x\geq 0)$ とする。ν を実数 μ $(\mu>0)$ と整数 n の和として $\nu=\mu+n$ と表すことにする。m $(>n)$ を適当に選ばれた正の偶数とし、α を小さな任意定数とする。$F_{\mu+m+1}(x)=0$, $F_{\mu+m}(x)=\alpha$ を出発値として、$J_\nu(x)$ が満足する漸化式 $F_{\mu-1}(x)=(2\mu)/x\,F_\mu(x)-F_{\mu+1}(x)$ を繰り返し使い、$F_{\mu+m-1}(x),\cdots,F_\mu(x)$ を順次、計算する。それを用いれば、$J_{\mu+i}(x)\approx F_{\mu+i}(x)/\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k(\mu)F_{\mu+2k}(x)$ と表せる。ただし、$\varepsilon_k(\mu)=(x/2)^{-\mu}(\mu+2k)\Gamma(\mu+k)/k!$ である。それを式(1)の右辺を有限項で打ち切ったものに代入すれば、次のような近似式を得る。

$$\int_0^x J_\nu(t)/t\,dt\approx\frac{2}{\nu x}\sum_{k=0}^{[(m-n)/2]}(\nu+2k+1)F_{\nu+2k+1}(x)\Big/\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k(\mu)F_{\mu+2k}(x)\tag{2}$$

3. 誤差解析

$J_{\mu+i}(x)$ と漸化式を用いて計算された $F_{\mu+i}(x)$ との間には関係式

$$J_{\mu+i}(x)=\frac{F_{\mu+i}(x)}{\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k(\mu)F_{\mu+2k}(x)}\left(1-\Phi_{\mu,m}(x)\right)+\frac{J_{\mu+m+1}(x)Y_{\mu+i}(x)}{Y_{\mu+m+1}(x)}\tag{3}$$

が成り立つ。ただし、$\Phi_{\mu,m}(x)=\left(\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k(\mu)\frac{J_{\mu+m+1}(x)Y_{\mu+2k}(x)}{Y_{\mu+m+1}(x)}+\sum_{k=m/2+1}^{\infty}\varepsilon_k(\mu)J_{\mu+2k}(x)\right)$

である。式(1)と式(3)から次式を得る。

$$\begin{aligned}\int_0^x J_\nu(t)/t\,dt=&\frac{2}{\nu x}\left(\sum_{k=0}^{[(m-n)/2]}(\mu+n+2k+1)F_{\mu+n+2k+1}(x)\Big/\sum_{k=0}^{m/2}\varepsilon_k(\mu)F_{\mu+2k}(x)\right)\left(1-\Phi_{\mu,m}(x)\right)\\&+\frac{2}{\nu x}\left(J_{\mu+m+1}(x)/Y_{\mu+m+1}(x)\right)\sum_{k=0}^{[(m-n)/2]}(\mu+n+2k+1)Y_{\mu+n+2k+1}(x)+\frac{2}{\nu x}\sum_{k=[(m-n)/2]+1}^{\infty}(\mu+n+2k+1)J_{\mu+n+2k+1}(x)\end{aligned}\tag{4}$$

したがって、式(2)で $\int_0^x J_\nu(t)/t\,dt$ を10進 p 桁の精度で計算するためには次式が成り立てばよい。

$$\left|\Phi_{\mu,m}(x)\right|<0.5\times10^{-p},\qquad\left|\Psi_{\mu,m,n}(x)\right|<0.5\times10^{-p}\tag{5}$$

ただし、

$$\Psi_{\mu,m,n}(x)=\frac{1}{\int_0^x\frac{J_\nu(t)}{t}dt}\left(\frac{2}{\nu x}\frac{J_{\mu+m+1}(x)}{Y_{\mu+m+1}(x)}\sum_{k=0}^{[(m-n)/2]}(\mu+n+2k+1)Y_{\mu+n+2k+1}(x)+\frac{2}{\nu x}\sum_{k=[(m-n)/2]-1}^{\infty}(\mu+n+2k+1)J_{\mu+n+2k+1}(x)\right)\tag{6}$$

式(5)において、$\Phi_{\mu,m}(x)$ に対しては、評価式 $\Phi_{\mu,m}(x)\approx\frac{-\Gamma(\mu+m/2)}{\pi Y_{\mu+m+1}(x)(m/2+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu+1}$ を用いればよい[2)]。$\Psi_{\mu,m,n}(x)$ に対しては、その近似式と評価式を次のようにして求める。式(6)を式(1)を用いて変形すると、

Error Analysis of Recurrence Technique for the Calculation of Integral of $\int_0^x J_\nu(t)/t\,dt$.

Tetsuji Yamamoto, Toshio Yoshida　College of Business Administration and Information Science, Chubu University.

$$\Psi_{\mu,m,n}(x)=\left(Y_{\mu+m+1}(x)\int_0^x\frac{J_\nu(t)}{t}dt+\frac{4}{\nu\pi x^2}\sum_{k=0}^{[(m-n-1)/2]}(\mu+n+2k+1)R_{m-n-2k-1,\mu+n+2k+2}(x)\right)$$
$$\Big/\left\{Y_{\mu+m+1}(x)\int_0^x J_\nu(t)/t\,dt\right\} \tag{7}$$

を得る($R_{m,\nu}(x)$は Lommel多項式)。式(7)の分子の第2の部分を書き換えると、

$$\frac{4}{\nu\pi x^2}\sum_{k=0}^{[(m-n-1)/2]}(\mu+n+2k+1)R_{m-n-2k-1,\mu+n+2k+2}(x)$$
$$=\frac{1}{\nu\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+n-1}\sum_{l=0}^{[(m-n-1)/2]}\frac{(x/2)^{2l}}{(m-n-2l-1)!}\sum_{i=0}^{l}(\mu+n+2l-2i+1)\frac{(-1)^i(m-n-2l+i-1)!\,\Gamma(\mu+m+1-i)}{i!\,\Gamma(\mu+n+2l-i+2)} \tag{8}$$

と表される。式(7)において、分子の第1の部分をベキ級数展開したものと式(8)を用いると次のようになる。

$$\Psi_{\mu,m,n}(x)\text{の分子}=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+n-1}\sum_{l=0}^{m}(-1)^l\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}\sum_{i=0}^{l}\frac{(-1)^i\Gamma(\mu+m-i+1)}{i!(l-i)!(\mu+n+2l-2i)\Gamma(\mu+n+l-i+1)}$$
$$+\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+n-1}\sum_{l=0}^{[(m-n-1/2)]}(-1)^l\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}\sum_{i=0}^{l}\frac{(-1)^i\Gamma(\mu+m-i+1)}{i!(l-i)!(\mu+n+2l-2i)\Gamma(\mu+n+l-i+1)}$$
$$+\text{（絶対値がより小さい項）} \tag{9}$$
$$=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+n-1}\sum_{l=[(m-n+1)/2]}^{m}(-1)^l\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}\sum_{i=0}^{l}\frac{(-1)^i\Gamma(\mu+m-i+1)}{i!(l-i)!(\mu+n+2l-2i)\Gamma(\mu+n+l-i+1)}$$
$$+\text{（絶対値がより小さい項）} \tag{10}$$

式(10)は数値実験によって初項($l=[(m-n+1)/2]$の項)が主要項であることがわかる。初項を一般化された超幾何級数の和の定理を用いて簡単化すれば、単項で表すことができ、次のような誤差の有用な評価式が得られる。ただし、nの偶奇によって異なる。

n＝偶数$(l=(m-n)/2)$のとき、

$$\Psi_{\mu,m,n}(x)\approx-\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-1}\frac{(-1)^{(m-n)/2}\Gamma(\mu+m+1)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{2}+1\right)(\mu+m)\Gamma\left(\mu+\frac{m}{2}+\frac{n}{2}+1\right)}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{m}{2}+\frac{n}{2}\right)_i\left(-\frac{\mu}{2}-\frac{m}{2}\right)_i\left(-\mu-\frac{m}{2}-\frac{n}{2}\right)_i}{i!(-\mu-m)_i\left(1-\frac{\mu}{2}-\frac{m}{2}\right)_i}$$
$$\Big/\left\{Y_{\mu+m+1}(x)\int_0^x J_\nu(t)/t\,dt\right\}$$
$$=-\frac{2}{\pi(\mu+n)x}\Big/\left\{Y_{\mu+m+1}(x)\int_0^x J_\nu(t)/t\,dt\right\} \tag{11}$$

n＝奇数$(l=(m-n+1)/2)$のとき、

$$\Psi_{\mu,m,n}(x)\approx-\frac{1}{\pi}\frac{(-1)^{(m-n+1)/2}\Gamma(\mu+m+1)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)(\mu+m+1)\Gamma\left(\mu+\frac{m}{2}+\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{m}{2}+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)_i\left(-\frac{\mu}{2}-\frac{m}{2}-\frac{1}{2}\right)_i\left(-\mu-\frac{m}{2}-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)_i}{i!(-\mu-m)_i\left(-\frac{\mu}{2}-\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)_i}$$
$$\Big/\left\{Y_{\mu+m+1}(x)\int_0^x J_\nu(t)/t\,dt\right\}$$
$$=-\frac{2}{\pi(\mu+m+1)(\mu+n)}\Big/\left\{Y_{\mu+m+1}(x)\int_0^x J_\nu(t)/t\,dt\right\} \tag{12}$$

4. おわりに

式(9)において、第2の部分$(l=0,1,\cdots,(m-n-1)/2)$は第1の部分$(l=0,1,\cdots,m)$の一部により相殺される。このことにより、$\Psi_{\mu,m,n}(x)$はかなり小さな値となる。また、式(10)において、その主要項である初項は一般化された超幾何級数の和の定理を用いることにより簡単な式で表すことができ、誤差の有用な評価式が得られた。

参考文献

1) Abramowitz,M. and Stegum,I,A:Handbook of Mathematical Functions,p.480, Dover,New York(1968).

2) 吉田年雄:漸化式を用いるベッセル関数$\int_0^x J_\nu(t)dt$の数値計算法の誤差解析,情報処理学会論文誌,Vol.35, No.5,pp.917-925(1994).