

# 領域分割法による最適化問題の近似解法

小 林 寛<sup>†</sup> 松 葉 育 雄<sup>††</sup>

シミュレーテッドアニーリング法などの確率的探索法により組合せ最適化問題を解く場合に問題となるのが、膨大な計算時間である。この点を解決するための手段として、参考となるのが、流体力学の分野において知られている領域分割法である。そこで本稿では、最適化問題に対するアプローチとして、重なりを持たせた領域分割法を提案する。重なり部には変数間の重みを考慮することで、変数どうしのつながりを補うようにした。そして、重なり部における変数間の重み分布が解に及ぼす影響、また本手法の有効性などをポートフォリオ選択問題、巡回セールスマン問題などを例に検証していく。

## Approximate Solution to Optimization Problems Using Domain Decomposition Method

HIROSHI KOBAYASHI<sup>†</sup> and IKUO MATSUBA<sup>††</sup>

Probabilistic searches such as Simulated Annealing require tremendous processing time solving for optimization problems. The domain decomposition method is known to be effective in reducing computational time, and can treat fluid behavior within a complex domain by dividing the domain into subdomains with simple geometry. In this paper, we propose the overlapped domain decomposition for optimization problems. It is shown that the proposed method works well when applied to the portfolio selection and travelling salesman problems.

### 1. はじめに

一般に組合せ最適化問題において、最適解と計算による出力との誤差  $\Delta E$ 、計算時間  $t$  の間には、要素数を  $N$  とすると、たとえば  $N$  個の要素がすべて結合しているときには  $t \propto \exp(N/\Delta E)$  という関係があり、最適解により近い値を得るためには膨大な計算時間が必要となることが知られている。その計算時間短縮のための手段の1つとして、問題をいくつかの領域に分割して、各領域にCPUを与えて並列的に計算する方法が考えられる。

分割という概念を利用した最適化手法として、コホーネンネットへ分割統治法を利用したアプローチ<sup>1)</sup>が提案されている。これは、考える解空間が小さいほど良好な解が得られやすいことを利用し、解空間を分割してコホーネンネットを適用するものであるが、並列処理は考えていない。巡回セールスマン問題に関しては、階層的に領域を分割していき、領域内の都市群

を1つの点に代表させて、あらかじめ与えられた格子パターンによって最短経路を求めていく繰込み群的アプローチ<sup>4)</sup>が提案されている。この手法は非常に高速に解を求めることができるが、解の質があまり良くない。

一方、流体力学の分野ではすでに領域分割法(Domain Decomposition Method)<sup>3)</sup>が知られている。特に、流れ現象をコンピュータを使った数値シミュレーションにより解明する数値流体力学の分野において、領域分割法がしばしば用いられている。流れのモデルはコンピュータで解析できるように、差分法、有限要素法などの数値スキームを用いて代数方程式に書き換えられる。そして、領域分割法により格子系を生成し、圧力や速度などをその上で定義する。これは、流体の占める領域が複雑な形状をしている場合には領域を一括して考えるより、複数の単純な形状の領域に分割して解析の方がより効率的であるためである。しかし問題は、各領域が速度や圧力を介して関連し合っているという点である。この点からみた流体における領域分割法は、隣接する領域間で満たされるべき連続性の条件を与えて解析するものであり、各領域間に重なりがある場合とない場合がある。流体力学においては、流速を  $v$  としたとき領域1, 2の間に、 $v_1 = v_2$ ,

<sup>†</sup> 千葉大学大学院工学研究科電気電子工学専攻  
Department of Electrical and Electronics Engineering,  
Faculty of Engineering, Chiba University

<sup>††</sup> 千葉大学工学部  
Faculty of Engineering, Chiba University

$\partial v_1/\partial x = \partial v_2/\partial x$  という関係が成り立っているの、領域に分割しても境界での適合条件を考慮すれば、各領域を重ねりなしで独立に計算することができる。しかし後に述べるような一般的なニューラルネットワークによる問題では、すべてのニューロンはそれぞれに重みを持って相互に結合しており、重ねりなしの領域分割では望ましい解が求まらなと考えられる。

そこで本稿では、最適化問題に対するアプローチとして、上記の領域分割法に重ねりの概念を取り入れた重複領域分割法 (Overlapped Domain Decomposition for Optimization, 以下 ODDO と略す) を提案する。本手法はシミュレーテッドアニーリング (Simulated Annealing, 以下 SA と略す) 法等により最適化問題を考えるときに、問題を分割して考えて領域ごとに最適化を行い計算時間を短縮し、さらに各領域間に重ねりを持たせることで通常の SA 法並みの最適化能力をそなえることを目的としている。そして、重ねり部におけるニューロン間の重み分布が解に及ぼす影響、また本手法の有効性を巡回セールスマン問題等を例に検証する。

## 2. 重複領域分割法

### 2.1 重複領域分割法 の概念

まず重複領域分割法 の概念の中心は、領域分割と重ねりの取り方である。流体においては各要素は空間的に固定された格子のようなものであり、近接する要素間での影響を考えれば十分である。これに対し、多くの変数を持つような最適化問題に領域分割を行ううえでは、隣り合う変数どうしだけでなくすべての変数は相互に結合し合っており、そのつながりの強さによって互いに影響し合っている。すなわち、単純な分割では異なる領域の変数の結合が完全に断たれてしまうと考えられる。そこで、本稿で提案する重複領域分割法では、各領域間に重ねりを持たせ、各変数どうしの結合をある程度補うことを考える。

ここでは最適化する評価関数を  $E$  とし、変数を  $\{x_1, \dots, x_i, \dots, x_M\}$  として、以下に示す式 (1) のような最小化問題に対して重複領域分割法を適用することを考える。

$$E(\{x_i\}) \rightarrow \min \quad (1)$$

SA 法では上式を  $\exp(-E/T(t))$  の最大化に置き換える。 $T(t)$  は温度スケジュールと呼ばれ、繰返し数  $t$  に依存して高温から低温へ徐々に変化させる。ここで、 $i$  に関して領域分割を行い各領域間に重ねりを持たせるわけだが、この重ねり部には、つながりの強い変数どうしを持つてくる。すなわち、異なる領域に存在す

る変数を  $x_i, x_j$  とし、 $E$  の中での  $x_i, x_j$  の相互作用がたとえば  $w_{ij}x_ix_j$  と書けたとすると、重み  $w_{ij}$  の大きな  $x_i, x_j$  を重ねり部として選ぶことにする。これは、つながりを考慮しないで単純に重ねただけでは、各領域ごとに最適化を行ったとき、つながりの強い変数の結合が完全に断たれてしまう可能性が高く、重ねりを考えない場合と同じになってしまい、各領域ごとの最適解は求まっても、全体としての評価関数最小化は行えない。この点に関しては、適当に重ねた場合との比較のシミュレーション結果を後に示してある。

### 2.2 アルゴリズム

まず、問題の分割と重ねり部の変数の選び方を以下に示しておく。

- (1) 領域分割: 変数  $x_i$  を  $i$  について  $N$  等分して、 $N$  個のグループを作り、それぞれを領域と考える。  $\{(x_1, \dots, x_{M/N}), (x_{M/N+1}, \dots, x_{M/N \times 2}), \dots, (x_{M/N \times (N-1)+1}, \dots, x_M)\}$
- (2) 重ねり部の取り方: それぞれの領域に番号をつけ、 $p$  番目の領域を  $\Omega^{(p)}$  ( $p = 1 \dots N$ ) と表す。簡単のため各領域 ( $\Omega^{(p)}$ ) は隣り合う領域 ( $\Omega^{(p-1)}, \Omega^{(p+1)}$ ) としか重ねりを持たないと考える (例、領域 2 は領域 1, 3 と重ねる)。すなわち、3 つ以上の領域が同時に重ねることはしないものとする。
- (3) 重ねり部の選び方: 隣り合った 2 つの領域 ( $\Omega^{(p)}, \Omega^{(q)}$ ) から重み  $w_{ij}$  の大きなものから順番に  $x_i^{(p)}, x_j^{(q)}$  を選び重ねり部とする。次に、すでに重ねりとして選ばれた変数以外の中で、重みの大きな  $x_i^{(p)}, x_j^{(q)}$  から一定の重ねり数になるまで、順に重ねり部としていく (ただし、 $\Omega^{(p)}$  に含まれる  $x_i$  を  $x_i^{(p)}$ 、 $\Omega^{(q)}$  に含まれる  $x_j$  を  $x_j^{(q)}$  とする)。

次に計算手順についてであるが、本稿では図 1 に示すような擬似的な並列計算を行った。すなわち、上記のように  $N$  分割された状態変数  $\{x_i\}$  に関して、ある領域  $\Omega^{(p)}$  にのみ一定の繰返し *sub-iteration* で SA 法による状態変更を行う。他の領域  $\Omega^{(q)}$  はその間固定したままで状態変更は行わない。次に状態変更を行う領域を変えて同様に一定の繰返し数 *sub-iteration* で SA 法による状態変更を行い、他の領域は固定しておく。このように変更領域と固定領域を順番に変えながら繰り返す。

ここで、重ねり部に含まれた  $x_i$  は計算途中には状態変更を行う領域にある  $x_i$  と、固定される領域にある  $x_i$  との 2 つの値を持つことになる。そこで、重ねりに含まれた  $x_i$  を  $x_k$  とし、変更領域  $\Omega^{(p)}$  に含まれ

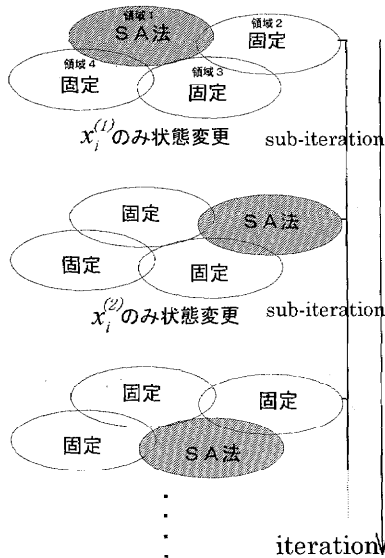


図1 重複領域分割法の概念

Fig. 1 A schematic diagram of the overlapped domain decomposition for optimization.

る  $x_k$  を  $x_k^{(p)}$ , 固定領域  $\Omega^{(q)}$  に含まれる  $x_k$  を  $x_k^{(q)}$  と表すことにする. この  $x_k^{(p)}, x_k^{(q)}$  は計算途中では異なる値をとる独立変数と見なすので, 最終的には評価関数全体として考えると, この2つの変数は同値になる必要がある. すなわち, 次のような適合性の条件が成り立つ必要がある.

$$x_k^{(p)} = x_k^{(q)} \quad (2)$$

そこでこの条件を満たすため, 以下のようなペナルティ項を評価関数に加える.

$$E_d = \frac{1}{K_{ol}} \sum_k^{K_{ol}} (x_k^{(p)} - x_k^{(q)})^2 \quad (3)$$

ここで,  $K_{ol}$  は重なり部に含まれる変数の個数を表し, 分母の  $K_{ol}$  はペナルティ項を正規化するためにこの値で割っている. すなわち, 式(1)で示した問題は以下のように書ける.

$$E(\{x^{(p)}\}, \{x^{(q)}\}) + DE_d \rightarrow \min \quad (4)$$

これにより評価関数を最小化する過程で, 式(3)の項が0に近づき, 重なり部に含まれる各領域の状態変数を等しくすることができる. ここで  $D$  は正の定数で, この項に対するペナルティである. その値としては小さすぎると重なり部での適合性の条件が満たされず, 全体として良い解は得られない. また, 大きすぎると適合性の条件に対する制約が強くなりすぎて, やはり評価関数を小さくするような良い解は得られない.

つまり問題によって最適な  $D$  を試行錯誤する必要がある. なお本稿では3つ以上の領域が同時に重なる場合は考えないものとする.

### 2.3 ランダムな系での評価

本手法の具体的な応用については3章以降で述べるが, ニューラルネットワークにおいてよく用いられるエネルギーと呼ばれる評価関数を与え, ベンチマーク的な意味から, ニューロンどうしのつながりがガウス分布を持つようなランダムな系での評価関数に対して本手法を適用してみる. このような系では一般に, 評価関数が極小値を多く含み, 解の探索が難しいという特徴がある. 評価関数は以下の形で与える.

$$E(\{x_i\}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M w_{ij} x_i x_j \quad (5)$$

ここで  $w_{ij}$  は平均0, 分散1のガウス分布,  $x_i$  は  $-1$  から  $1$  までの連続値とした. この式に2分割重複領域分割法を適用すると次のような式となる.

$$\begin{aligned} E(\{x_i\}) = & -\frac{1}{2} \left( \sum_i^{M_p} \sum_j^{M_p} w_{ij} x_i^{(p)} x_j^{(p)} \right. \\ & + \sum_i^{M_q} \sum_j^{M_q} w_{ij} x_i^{(q)} x_j^{(q)} \\ & + \sum_i^{M_p} \sum_j^{M_q} w_{ij} x_i^{(p)} x_j^{(q)} \\ & \left. + \sum_i^{K_{ol}} \sum_j^{K_{ol}} w_{ij} x_i^{(p \cap q)} x_j^{(p \cap q)} \right) \\ & + DE_d \end{aligned} \quad (6)$$

この式は, 領域  $\Omega^{(p)}$  に状態変更を行い, 領域  $\Omega^{(q)}$  にある変数は定数とした場合の式であり,  $M_p$  は  $\Omega^{(p)}$  に含まれる変数の個数を,  $M_q$  は  $\Omega^{(q)}$  に含まれる変数の個数を表す.  $N$  分割のときも同様に式定式化が可能である. この評価関数に対して, 重なり20のときの4分割重複領域分割法による最小化のようすを, 重なりがない場合との比較で図2に示した. また  $E_d$  の項の変化のようすを縦軸を右にとって示した. 各パラメータは次のとおりである. 要素数  $M = 200$ , 重なり項のペナルティ  $D = 100$ , 重なり数  $K_{ol} = 20$ , 領域変更サイクル  $\text{sub-iteration} = 50$ . ペナルティ  $D$  に関しては, 試行錯誤の結果から最も良好な解が得られたため100とした. 温度スケジュールは, 一般によく温度として用いられるギーマンのスケジュール<sup>7)</sup>を使った. すなわち, 繰返し数  $t$  に関して  $T = T_0 / \log(1+t)$  とした ( $T_0 = 10$ ).

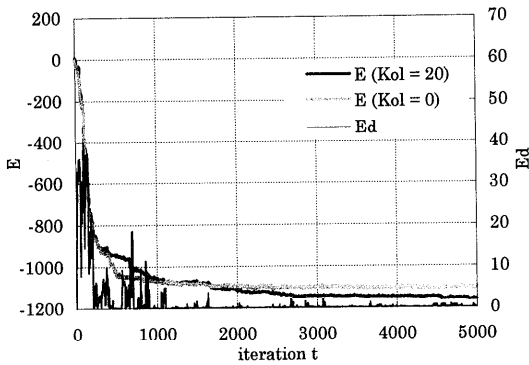


図2 4分割重複領域分割法による評価関数

Fig. 2 Cost function for 4 divided overlapped domain decomposition.

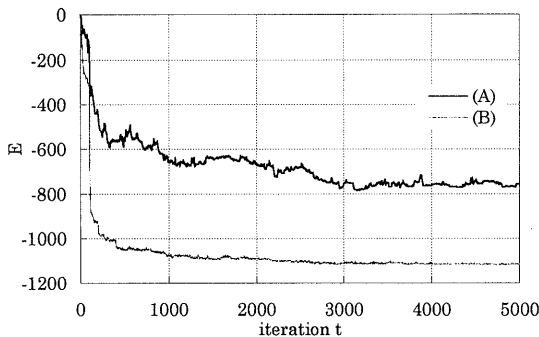


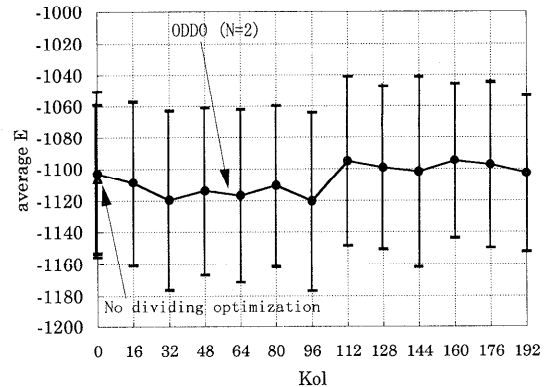
図3 重みの大きさを考慮しない場合と考慮した場合との重複領域分割法の比較

Fig. 3 Comparison between an arbitrary decomposition and the decomposition taking into account the weight distribution.

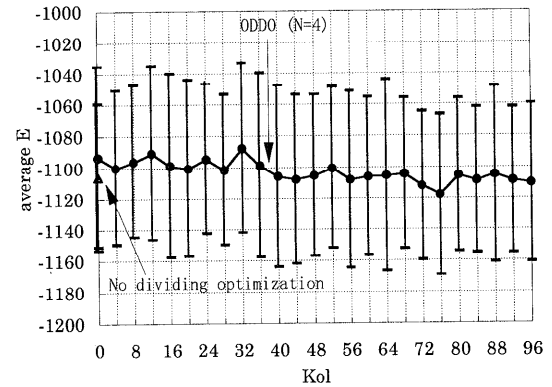
図2より評価関数の最小化とともに  $E_d$  の項が0に近づくことが分かる。ただし、繰返し数1000あたりまでは  $E_d$  が0でないため、重なりがない方が評価関数は小さくなっており、繰返し数1000以降は重なりがある方が良い値が得られている。

また図3には、重なり部のニューロンの選び方として適当に選んだ場合(図中(A))と、本手法により重みの大きなニューロンどうしを選んだ場合(図中(B))とで、2分割重複領域分割法により式(6)の最小化を行った結果を示した。なお、重なり数  $K_{ol} = 40$ ,  $sub-iteration = 100$  とした。これを見ると明らかに重みの大きさを考慮して重ねた方が良い結果が得られており、つながりの強さが決定的に解に影響してくることが分かる。

次に評価関数として50通りの  $w_{ij}$  を考えて、重なり数に対する評価関数の平均値を調べた。図4(a), (b)は2分割, 4分割のそれぞれの場合に対して、横



(a)



(b)

図4 重複領域分割法の重なり数に対する評価関数の平均値  
Fig. 4 Average cost function as a function of  $K_{ol}$ .

軸に重なり数を、縦軸に評価関数の平均値をとったものであり、比較のため領域分割なしの単純なSA法による平均評価関数値もプロットした。それぞれの図において、3つ以上の領域が同時に重なることはないという点、および分割数が異なるため横軸のスケールが違うことに注意してほしい。

図4(a)に示す2分割の場合、重なりが小さいと領域間のつながりが断たれ評価関数全体として値は悪く、また重なり数が大きすぎてもペナルティ項  $E_d$  が大きくなり評価関数値は悪くなる。つまり、最適な重なり数が存在することが分かる。図4(b)に示す4分割の場合には、各領域のニューロン数が少なくなるため、2分割のような明確な最小値は見られない。また、どの図でも半分程度の重なりを持たせると、領域分割なしの方法がそれ以下の評価関数値が得られている。これは  $w_{ij}$  の大きな要素を重なりを選んでいいため、半分程度重ねることにつながりの強い要素達がカバーされて、分割による影響が低減されているものと思われる。また、分割数が多くなると平均評価関数値が若干

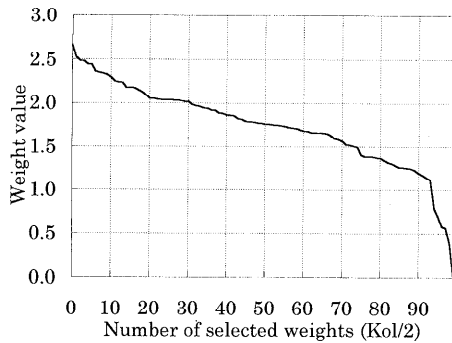


図5 重なり部における重みの分布

Fig. 5 Weight distribution in the overlapped region.

悪くなる傾向にあることから、 $x_i$  の個数（ニューロン数）によって許容できる分割数を考慮する必要があると考えられる。

図5は2分割の場合において、どのぐらいの大きさの重み選ばれて重なりを形成しているのかを調べたものである。ある重み  $w_{ij}$  に対して各領域から1つずつのニューロンが重なりとして選ばれるので、横軸は全ニューロン数200の半分までとなっている。縦軸には重みの値をとった。図4において半分程度まで重ねたときに評価関数が最小になるという結果と比較すると、図5から重みを50個程度、すなわち重みの大きさとして1.8程度までをとれば各領域間のつながりを補えるということである。どの分割においても半分程度の重なりで評価関数が小さくなっているのは、重みの大きさとして上位1/3程度までが重なり選ばれれば良好な解が得られるということであると考ええる。以下では具体的な問題に関して本手法を適用して調べていく。

### 3. 本手法の応用

前章までで分かったことは、重なりのとり方が重要であり、重みの分布によって重なりのとり方を考慮する必要があるということである。以下では本手法の応用例として、ポートフォリオ選択問題と巡回セールスマン問題を取り上げ、重みの分布と重なりのとり方について考えていく。ポートフォリオ選択問題はニューラルネットワークによる定式化が可能であり、2章で述べたランダムな系と同様なホップフィールド型のニューラルネットワークの評価関数を持つ問題である。一方、巡回セールスマン問題はこれとはまったく異なる評価関数を持つ例ではあるが、方法論としては本手法が適用できることを示すために選んだ。

#### 3.1 ポートフォリオ選択問題

まず第一の応用として、経済の投資問題であるポー

トフォリオ選択<sup>8)</sup>を考える。不確実な将来収益を持つ各種資産に対する投資家の最適投資行動に関するポートフォリオ選択理論は、1959年にマーコビッツ<sup>9)</sup>が2次計画法として定式化したのが始まりであり、目的は投資の分散化によってリスクをなるべく小さくしようとするものである。

いま、 $i$  銘柄の単位時間あたりの収益率を  $R_i$ （本稿では月単位の月間収益率データを用いた<sup>10)</sup>）、投資率を  $x_i$  とすると、 $M$  個の銘柄から  $m$  個の銘柄を選択する問題の評価関数は以下のように書ける。

$$E = \sum_{ij} w_{ij} x_i x_j - A \sum_i R_i x_i + C \left( \sum_i x_i - m \right)^2 \quad (7)$$

ここで、 $A$ 、 $C$  は正のパラメータである。上式の最小化を行うことで、得られる収益を最大にし、しかもリスクを最小化するような資産の組合せ  $\{x_i\}$  を得ることができる。ここで、結合係数  $w_{ij}$  には以下のような過去の時系列データから求めた相関関数を用いる。

$$w_{ij} = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H R_i(h) R_j(h) \quad (8)$$

ここで、 $R_i(h)$  は  $i$  銘柄のある月の月間収益率であり、 $H = 120$ （カ月）とした。

ここでは最適化手法として、SA法に遺伝的アルゴリズム（GA）<sup>11)</sup>の要素を取り入れた手法（以下 Genetic SA と呼ぶ）を用いて、2分割重複領域分割法により式(7)の最小化を行った。Genetic SA は多数の初期値から出発し、モンテカルロ法による状態変更を行う過程で良好な解の選択、コピーを行うものであり、単純なSA法よりも計算時間はかかるが良好な解が期待できる。今回のシミュレーションでは、GAの個体数に相当する値を20とした。

以下では  $M = 100$  銘柄を対象とし、同じ投資率で  $m = 10$  銘柄選択する問題を取り上げる。対象とする100銘柄は同業種に偏らないように各業種から代表的な銘柄を適当に選んだ。図6は1992年2月の収益率とリスクを、Genetic SAを用いた2分割重複領域分割法により求めたものである。比較のため、分割なしの単純なSA法による結果も示した。図の見方としては、横軸にリスク  $\sum_{ij} w_{ij} x_i x_j$ 、縦軸に収益  $\sum_i R_i x_i$  をとっているの、左上に行くほど良いポートフォリオ選択が行えているということになる。重なりに関してはポートフォリオ選択においては  $w_{ij}$  が近似的にガウス分布を持つことから、2章のガウス

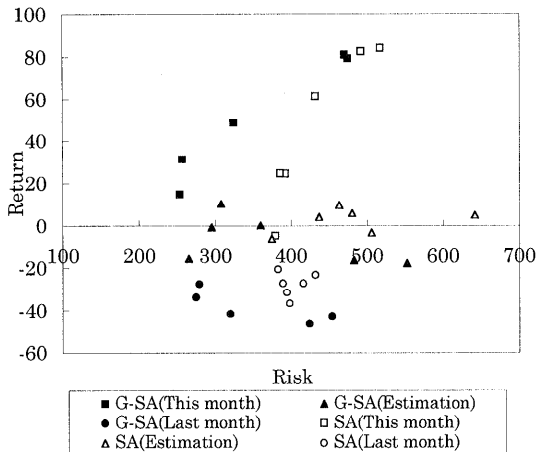


図6 ポートフォリオ最適化の結果  
Fig. 6 Result of the portfolio optimization.

分布系の結果を参考に、半分の重なり数  $K_{ol} = 50$  として良好な結果が得られた。各パラメータは以下のとおりである。重なり項のペナルティ  $D = 100$ 、全繰返し数  $t = 2000$ 、領域変更サイクル  $sub\text{-}iteration = 50$ 。

図6の■□は今月(2月)の収益率を  $R_i$  として用いた場合で、実際に1992年2月のポートフォリオ選択を行う場合には未知の値である。●○は先月(1月)の収益率を用いた結果であり、先月のトレンドが今月も続いたと仮定した場合である。そして▲△は、既知である先月までの収益率データを用いて、3層ニューラルネットワーク(ネットワーク構造:入力/中間/出力層ニューロン数=6/3/3, バックプロパゲーション学習法で学習)により今月分の収益率を予測し、その値を用いて式(7)の最小化を行った場合である。その詳しい予測方法に関しては、文献12)を参照してほしい。図中の■▲●は式(7)において  $C$  を固定し、 $A$  を変化させて Genetic SA を用いた2分割重複領域分割法により求めた値である。□△は同様に分割なしの単純な SA 法により求めた値である。つまり、固定したリスクに対して最も収益が大きくなるような組合せを選択したことになる。

図6を見ると今月、予測、先月とも収益としては Genetic SA を用いた2分割重複領域分割法でも分割なしの単純な SA 法と同レベルの値が得られている。一方、リスクとしては全体的に Genetic SA を用いた2分割重複領域分割法の方が小さい値が得られており、ポートフォリオ選択問題においても SA 法と比較して良好な値が得られることが分かる。これは Genetic SA を用いた方が Global minimum に近い Local minimum に落ち着いていることを示している。また予測

の観点から見ると、予測収益率を用いることで1カ月前の収益率を用いるよりも高い収益が見込めるようなポートフォリオが組めることが分かる。

### 3.2 巡回セールスマン問題

次に巡回セールスマン問題(Travelling Salesman Problem, 以下 TSP と略す)に対して重複領域分割法を適用する。TSP は与えられた都市をそれぞれ1度だけ通り、元に戻る巡回路のうちで最短のものを求める問題で、都市数の増加とともに組合せ爆発を起こす典型的な組合せ最適化問題である。TSP に対しては、ホップフィールド型の評価関数に帰着させて解く方法もあるが、ここではニューラルネットワークの定式化とは異なる例として、Lin らの2点交換法<sup>13)</sup>に SA 法を組み合わせた手法<sup>14)</sup>による巡路変更を用いた。都市数  $M$  のとき、評価関数としては以下の巡回距離の式を考える。

$$E = \sum_{i=1}^M \sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2} \quad (9)$$

ここで、 $(x_i, y_i)$  は  $i$  番目に通る都市の座標を表し、 $(x_{M+1}, y_{M+1})$  は  $(x_1, y_1)$  に等しいものとする。この評価関数の場合、これまで見てきたホップフィールド型の関数系とは異なり、ニューロンに相当する各都市が空間的に固定されている例である。この種の評価関数を持つ問題においては重みというものが存在しないので、空間的な距離と重なりという点から重なり具合と得られる解の関係を調べていく。都市配置は、まずアメリカ532都市を用い、座標は文献15)で用いられた都市座標を使っている。

以下では Lin の手法に SA 法を組み合わせた手法をそのまま用いた場合と、2分割重複領域分割法を適用した場合でシミュレーションを行った。2分割重複領域分割法については以下の手順で行った。

- (1) 都市の分割: 各領域の都市数がだいたい等しくなるように横軸に垂直に境界線を引いて、単純に2つの領域( $\Omega^{(1)}$ ,  $\Omega^{(2)}$ )に分ける(図7)。
- (2) 重なり部のとり方: 境界線から近い都市から順に、境界線を中心として左右に、重なり数分だけとって重なり部とする(図7中の◆)。
- (3) ペナルティ項の設定: 重なり部に含まれたある2都市  $X, Y$  ( $\Omega^{(1)}$ ,  $\Omega^{(2)}$  の両方に含まれる)が、経路としてつながっていたら1、切れていたら0をとるような変数を  $v_{XY}$  とする。そして、 $\Omega^{(1)}$  に含まれる  $v_{XY}$  を  $v_{XY}^{(1)}$ ,  $\Omega^{(2)}$  に含まれる  $v_{XY}$  を  $v_{XY}^{(2)}$  としたときに、以下のようになら与える。 $K_{ol}$  は  $v_{XY}^{(1)}, v_{XY}^{(2)}$  の少なくともとも

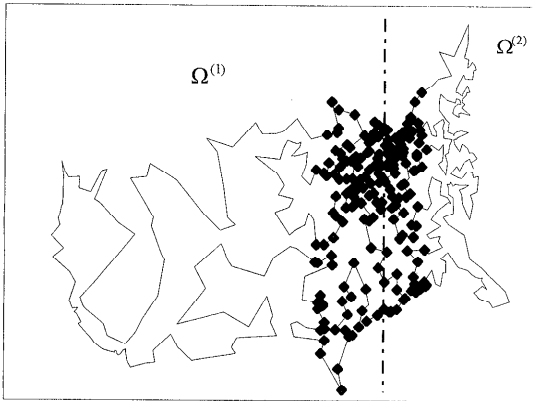


図7 アメリカの532都市に対する求めた巡回路  
Fig. 7 Obtained tour for 532 cities in the USA.

こちらが一方が1となる個数である。

$$E_d = \frac{1}{K_{ol}} \sum (v_{XY}^{(1)} - v_{XY}^{(2)})^2 \quad (10)$$

式(10)に係数  $D$  をかけて、ペナルティ項として式(9)に付け加える。このようなペナルティを与えて  $\Omega^{(1)}$ ,  $\Omega^{(2)}$  に交互に Lin の手法と SA 法を組み合わせた手法により状態変更を行うことで、変更領域と固定領域間の重なり部の経路を一致させる効果が得られる。

アニーリングスケジュール等は文献14)を参考にして、配置を 100M 回生成するか、あるいは組替えが 10M 回成功するかのどちらか一方が起こるごとに温度を 10% ずつ減らした。重複領域分割法に関しては、温度を減らすタイミングに合わせて変更領域を入れ替え、初期温度  $T_0 = 0.5$ ,  $E_d$  のパラメータ  $D = 0.1$  とした。

図8は、アメリカ532都市の境界線から各都市までの距離を示したものである。この図は前に述べたランダムな系における図5に対応するものであり、同じような形の図が得られている。この結果から、ランダムな系と同様に半分程度の重なりが適当であろうと考え、重なり部に含まれる都市数を 200 としたときに求めた巡回路の一例が図7である。図中の◆は重なりに含まれる都市を表している。得られた巡回距離は 29,669 であり、文献15)で得られた巡回距離は 27,686 であったので、図7の場合には、この値に対して 7% 程度の誤差がある。領域分割なしの場合の巡回距離が平均して 10% 程度の誤差を持つので、重なり数によっては重複領域分割法による値も同程度か、あるいはより短い巡回距離が得られることが分かる。

領域を再帰的に分割して TSP を解こうとする繰込み群論的アプローチによる解法が最近提案されている。この手法では CPU 時間が非常に少なくすむが、領

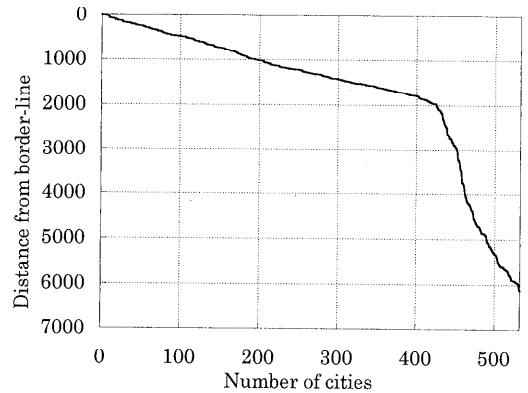


図8 重なり部における各都市からの距離の分布  
Fig. 8 Distribution of distances from each city in the overlapped region.

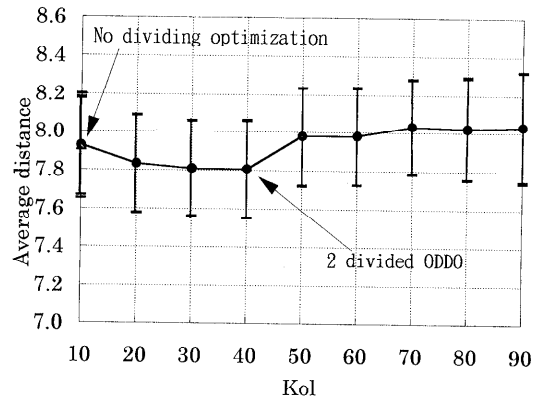


図9 重なり数に対する平均巡回距離  
Fig. 9 Average tour length as a function of  $K_{ol}$ .

域の分割を細かくしていく過程で、大きな分割段階での結果が修正されずに最終的な結果に影響を及ぼす。すなわち、本来なら分割過程で誤った経路が生成された場合、それを修正するような機構が必要であるが、そのような機構がないため、分割によって領域を細分化していくごとに誤りが積み重なっていく。それに対し重複領域分割法では、重なりを持たせたことによって各領域間の結合が保たれるので、最適化の過程である領域で誤った経路が生じて他の領域からの影響で修正し合うことができる。このような違いが結果としてアメリカ532都市問題において、繰込み群論的アプローチでは最適解からの誤差が 30% 程度残るのに対し、重複領域分割法では 7% 程度におさえられる。

次に、100都市の都市配置をランダムに 50 通り与えて得られた 50 個の巡回路の平均巡回距離を、図9に示す。横軸には重なり数をとっているため、領域分割なしの通常の SA 法に関しては、重なりがないので一定値である。図9を見ると、重なり数 40 あたりま

では巡回距離は下がっていき、さらに重なりを大きくしていくと巡回距離は大きくなってしまいうすが分かる。これは、ランダムな系における図4と同じような形になっている。つまり、TSP に関しても重複領域分割法の重なり数は、小さすぎても大きすぎてもだめで、ランダム系のときと同様に、より良好な巡回距離を得る適当な重なり数が存在するということが分かる。

また図9より、TSP のようにニューロンが空間的に固定されているような場合にも、重なりは半分程度が適当であるという結果から、結局 TSP の場合にも、ランダム系という重みとして境界線からの距離を考えれば、境界線からある程度までの距離にある都市を重なりを選ぶことが、 $w_{ij}$  の大きなニューロンを選んでいくことになっているという意味で、ランダム系と比較してみることができる。

#### 4. おわりに

本稿では、領域分割法に重みの大きさを考慮した重なりを取り入れた重複領域分割法を提案した。本手法は完全に分割するのではなく重なりを考えることで各領域間のつながりを保ち、実際に並列計算するところまではいっていないが、擬似的な並列計算シミュレーションによって、領域分割なしの通常のSA法並みの解を得ることができる可能性を示した。また、各領域を別々に計算できるようにすることで、将来的には並列計算機にも対応できると考える。重なりに関しては、本稿では半分程度が良いという結果であったが、問題ごとの結合のしかたによっては調整する必要がある。

今後の課題としては、並列計算をおこなううえでの重なり部の処理のしかたを考えること、分割する段階で  $w_{ij}$  の大きさを考慮した分割のしかたを考えること、また TSP においてより多くの都市でシミュレーションを行ったり、また別の具体的な問題に適用してみることなどがあげられる。

#### 参 考 文 献

- 1) 森, 潤田, 前田, 宮島, 村島: コホーネンネットを利用した巡回セールスマン問題の分割統治法, 信学技報, Vol.95, No.346, pp.39-46 (1995).
- 2) 松山泰男: 自己組織化できるニューラルネットワークとユークリッド空間におけるいろいろな巡回セールスマン問題, 電子情報通信学会論文誌, Vol.J74-D-II, No.3, pp.416-425 (1991).
- 3) David, E.K., Jinchao, X. (Eds.): *Domain Decomposition Methods in Scientific and Engineering Computing*, The Pennsylvania State University (1993).
- 4) 宇佐見義之, 加納義樹: 巡回セールスマン問題への繰り込み群的アプローチ, 日本物理学会誌, Vol.51, No.6, pp.434-438 (1996).
- 5) Kirkpatrick, S., Gellant, C.D. and Vecchi, M.P.: *Optimization by Simulated Annealing*, Science, Vol.220, pp.671-680 (1983).
- 6) 松葉育雄: ニューラルシステムによる情報処理, 昭晃堂 (1993).
- 7) Geman, S. and Geman, D.: Stochastic Relaxation, Gibbs Distribution, and the Bayesian Restoration of Images, *IEEE Proc. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-6, pp.721-741 (1984).
- 8) 松葉育雄ほか: ニューロ・ファジィ・カオスよりニューラルネットワークの応用技術, オーム社 (1993).
- 9) Markowitz, M.H.: *Portfolio Selection - Efficient Diversification Investments*, Yale University (1959).
- 10) 株式投資収益率, 日本証券経済研究所 (1993).
- 11) 玄 光男: 遺伝的アルゴリズムの国際会議とパッケージ1, *bit*, Vol.25, No.12, pp.52-59 (1993).
- 12) 小林 寛, 木村充宏, 松葉育雄: SA法の拡張と時系列予測を含んだ投資問題への応用, 情報処理学会研究報告, 96-AI-103-7, pp.37-42 (1996).
- 13) Lin, S.: Computer Solutions of the Traveling Salesman Problem, *Bell System Technical Journal*, Vol.44, pp.2245-2269 (1965).
- 14) Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., and Flannery, B.P.: *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press (1988).
- 15) Padberg, M. and Rinaldi, G.: Optimization of a 532-city Symmetric Travelling Salesman Problem by Branch and Cut, *Operation Research Lett.*, Vol.6, pp.1-7 (1987).

(平成8年10月11日受付)

(平成9年3月7日採録)



小林 寛 (学生会員)

昭和46年生。平成7年千葉大学工学部電気電子工学科卒業。現在、同大学院工学研究科電気電子工学専攻修士課程在学中。ニューラルネットワークによる最適化の研究に従事。

**松葉 育雄**

昭和 27 年生。昭和 55 年東京大学  
大学院理学系研究科物理学専攻博士  
課程修了。理学博士。同年（株）日  
立製作所システム開発研究所入社。  
平成 5 年千葉大学工学部教授。現在  
に至る。ニューラルネットワーク、カオスなど知的情  
報処理の研究に従事。

---