自動微分法と区間演算による陰曲面近似システムの試作と評価

3T－4

大島 生郎　星 守　大森 匡
電気通信大学 大学院 情報システム学研究科*

1 はじめに

Snyderは区間解析を用いた陰曲面近似アルゴリズムを提案しているが、そこでは各偏導関数の保証区間を評価することにより直方体内部の曲面が近似可能であるかを調べている[1]. 我々は区間版自動微分法を用いてこれらの偏導関数の保証区間を求める方法[2,3]を用いて近似システムを試作し、曲面近似の評価を行なった.

2 区間演算・自動微分法

2.1 区間演算

有限桁の数値しか扱えない計算機では、常に丸め誤差等の誤差を考慮に入れる必要がある. そこで、計算結果として一つの近似解を出すのでなく、その精度を保証した解を含む区間を結果として返す演算法(区間解析)がある. 入力区間 X に対し、関数 $f(x)$ 中の全ての基本演算を区間演算で置き換えることで関数値の保証範囲 $\Box f(X)$ を得ることが出来る.

2.2 自動微分法

自動微分法による導関数値計算は、その関数の計算手続きが分かっていれば、いわゆる合成関数の微分の公式によって基本的な導関数値計算に分解できることを利用する. 与えられた関数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ を基本演算に分解し、基本演算を節点とする計算グラフを作成する. f から x_i に向かうパス上の要素的偏導関数の積を計算し、そのようなパスに関して和をとることで、各変数の偏導関数値を求めることができる. 本研究では区間演算に対応した自動微分法を用いて計算に必要な全ての $\Box f'(X)$ を求めている.

3 陰曲面近似のアルゴリズム

3.1 Snyderの方法

陰曲面近似には3つの区間 $X=\{X_1,X_2,X_3\}$ からなる3次元直方体(以下、セルと呼ぶ)を用いる. セルは、6つの面と12本のエッジを持つ. 以下のアルゴリズムでは始めに近似したい範囲のセルの初期値、及び近似を行なうセルのサイズの最大値(ユーザーエプシロン)を与える. X_1,X_2,X_3 の大きさがユーザーエプシロン以下になるまで、2分法でセルを分割してゆく. $0\notin\Box f(X)$ ならばそのセル内に解は無いので捨てられる. 分割の終了は以下の条件(条件A)を全て満たす時である.

1. $0\in\Box f(X)$.(セル内に解が存在する.)
2. $\{X_1,X_2,X_3\}$ のいづれかのパラメータ X_i に関して $0\notin\Box\frac{\partial f}{\partial X_i}$. (これを満たせばセル内の曲面が3つの方向のどれか1つからは1価である.)
3. 6つの面に対し、面を構成する2つのパラメータ X_i,X_j のいづれかに関して $0\notin\Box\frac{\partial f}{\partial X_i}$、または $0\notin\Box\frac{\partial f}{\partial X_j}$.(これを満たせば曲面が面上に描く曲線が1価の曲線である.)

こうして求まったセルの集合に対し、ポリゴン間にすき間が生じないように小さなセルから順に次の手順で近似を行なう. まず、エッジと曲面との交点を求める. 3を満たしているので、各面上の交点はいづれかのパラメータの値でソートできる. ソート後、隣り合う2交点の間に曲面が存在するならば、2点間をリンクさせる. 交点のリンクをたどり、閉路を発見したら三角形ポリゴンで近似する. 本研究ではエッジ上の交点を求めるのに高速で精度の良い区間版ニュートン法を用いている[2,3].

3.2 他の分割終了条件

微係数を利用する手法では、曲面を表す関数がある点で解を持ち、かつ $(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})=(0,0,0)$ であると、その近辺で条件2、3を満たすまでセルを2分法で分割してゆく. そのためセルの数が非常に多くなってしまう. このような状態を避けるために別の分割終了条件を考えた.

まず、条件2を満たす場合は、セル内部で1価関数になっているので、少なくとも4本のエッジ上には交点の数は高々1つである. また条件3を満たせば、面上の曲線が1価の曲線になるので、少なくとも2本のエッジ上の交点の数が高々1つとなる. これらのことから、セルがある程度小さくて(ここではユーザーエプシロン以下としている)、もし $0\in\Box f(X)$ でセルの各エッジ上に交点が高々1つであり、合計の交点数が3つ以上であれば(条件Cとよぶ)近似可能とする方法が考えられる. しかしこの条件だけでは起伏の激しいような曲面に対しては大幅に曲面を削ってしまう可能性もある.

そこで上の条件を満たした場合にさらに次のことを調べてみる. 全微分 df は dx,dy,dz が十分小さい時 $df\approx\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$ とみなせるので、これを利用し、交点以外の場所での曲面の変化を予測することが出来る.

例えば y 軸を区間に持つエッジ上に交点 (x_0,y_0,z_0) が見つかった時は、適当な dx,dz に対して $dy+y_0$ が求ま

---

*Evaluation of Implicit Surface Approximation System with Interval Method and Automatic Differentiation
I.Ooshima, M.Hoshi, T.Ohmori (U . Electro-Comm.)

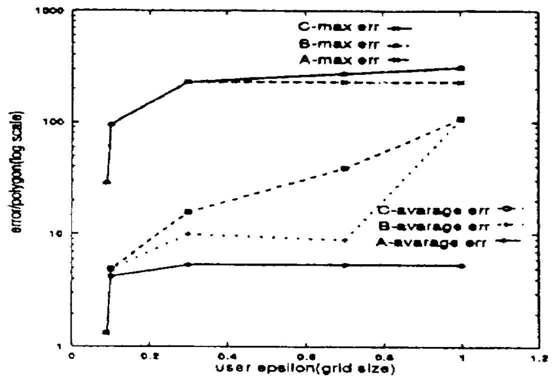

図 1: 微係数情報を使った近似とグリッドサイズでの近似における誤差. 曲面の式は $f(x,y,z)=\exp(2(-x^2-9z^2-9y^2+4))-\exp(2(-2x^2-z^2-y^2+4))-1$.

るので、その値がセルに収まっているか確かめればよい. もし $dy+y_0$ がセルから飛び出した場合 (条件Bとよぶ) は曲面の変化が激しいので、セルを分割してより精密に近似をする. dx, dz の値は、同じセル内で見つかった他の交点の x, z の値の平均値と x_0, z_0 との差分とする.

微係数情報を使う分割終了条件とこの接平面を利用することで、$(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = (0,0,0)$ となる点で解を持つような曲面の近似を適度なポリゴン数で行なうことが出来た.

4 試作・評価

これらの条件を用いたアルゴリズムに基づいてシステムを試作した. これを用いて陰曲面近似を行ない、誤差、ポリゴン数等について評価実験を行なった. 三角形ポリゴンの重心の値を陰関数に代入し、その絶対値 $|f|$ を誤差とする.

4.1 誤差の測定

この微係数情報を用いた近似法の特徴は、曲面の形状によって部分的に細かいサイズの近似を自動的に行なうことである. そのため、この手法では近似結果によりユーザーエプシロンの値をチューニングすることなく精密な近似を行なうことができる. 一方、分割終了条件を単にセルのサイズがユーザーエプシロン以下とするようなグリッドサイズでの近似ではグリッドのサイズが曲面の形状よりも大きいと上手く近似できず穴のあいた近似をしてしまう. 図1にあるように、区間分割の終了条件に微係数情報を使うとユーザーエプシロンの値にあまり影響を受けずに誤差が安定していることがわかる.

4.2 3つの終了条件の比較

先に述べた3つの終了条件での近似の違いを図1、2に示す. 区間分割の終了条件は、A：微係数情報のみ、B：微係数と接平面利用法を併用、C：交点数を確認するのみ、の3種類である.

これらを見ると、微係数情報を用いることの有効性が分る。また、図1の曲面に比べて、図2のように変化の

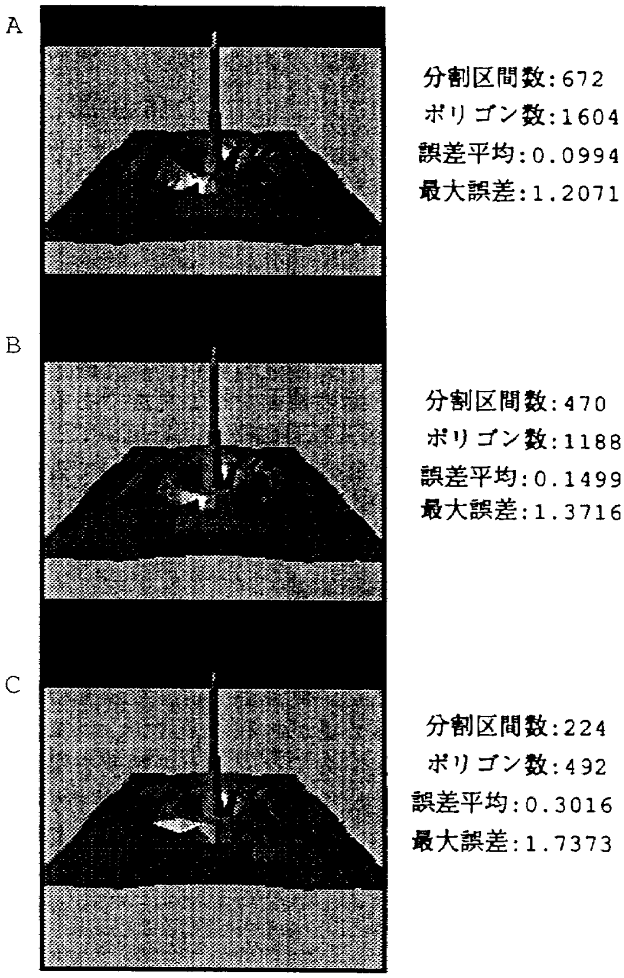

図 2: $f(x,y,z)=\cos(3\pi\sqrt{x^2+z^2})-3\pi y\sqrt{x^2+z^2}$ の近似結果. ユーザーエプシロンは全て 0.6

激しい曲面では、各条件による差異がより表れている。2つの終了条件を併用したBでは、ほど良い精度が得られ、かつセルの分割の回数を少し減らすことができることがわかる.

5 まとめ

Snyder の提案する近似法を自動微分法と組み合わせ、精度の安定した近似を行なうシステムを試作した. また、新しい分割終了条件を提案し、これによって適度な量のポリゴンで曲面近似が行なえることを示した.

参考文献

1: J.M.Snyder, *Generative Modeling for Computer Graphics and CAD*, Academic Press, 1992.

2: K.Park, M.Hoshi, T.Ohmori, H.Hara, *Computer Graphics Algorithm using Interval Analysis and FAD*, グラフィックとCADシンポジウム論文集, 情処, pp.79-85, Oct.1995.

3: 原 秀人, 高速自動微分と区間解析を用いたレイトレーシング法, 電気通信大学情報システム学研究科修士論文, 1996年.