3 L − 3

グラフの極小 Separating Set の列挙について

早川二郎*， 築山修治*， 有吉弘†
* 中央大学理工学部電気電子工学科
† 愛媛大学理工学部電気電子工学科

はじめに

連結な無向グラフ $G=[V,E]$ と始点 s および終点 t が与えられたとき，頂点と枝の集合で，それらが G から除去されると s から t への全て道が無くなるようなものを *s-t separating set* という．以下では極小な s-t separating set を *MS set* と呼び，$E_c \& V_c$ で表す．ここで E_c は枝の集合，V_c は頂点の集合である．

本文では，G の全ての MS sets を列挙する問題について考察するが，この問題はグラフ理論において基本的であり，コンピュータネットワークの信頼度解析においても重要である [1]．本文ではこの問題が MS set 一個当たり $O(m+n\alpha(n))$ で解けることを示す．ここで，$m=|E|$, $n=|V|$, $\alpha(n)$ はアッカーマン関数の逆関数である．

基本定理

G には，s-t 間のどの初等的な道にも含まれないような枝は存在しないものとする．今，G から MS set $E_c \& V_c$ を除去してできるグラフにおいて，s を含む連結成分を $G[V_s]$，t を含む連結成分を $G[V_t]$ とすると，点集合 V は，V_s, V_c, V_t および $R=V-V_s-V_c-V_t$ に分けられる．従って，MS set $E_c \& V_c$ を 3 つ組 $\langle V_s, V_c, V_t\rangle$ によって一意に表すことができ，$\omega(V_s,V_t)=\{(x,y)\in E | x\in V_s$ and $y\in V_t\}$ とすると，$E_c=\omega(V_s,V_t)$ となる．このことから，以下の (1) から (3) の条件と，$s\in V_s$, $t\in V_t$ を満たす全ての 3 つ組 $\langle V_s,V_c,V_t\rangle$ を列挙すれば，全ての MS set を列挙できることが分かる．(1) $G[V_s]$ と $G[V_t]$ は連結である．(2) $V_c\subset\Gamma^+(V_s)$ かつ $V_c\subset\Gamma^+(V_t)$ である．(3) 各点 $v\in R=V-V_s-V_c-V_t$ は $v\notin\Gamma^+(V_s)$ かつ $v\notin\Gamma^+(V_t)$ を満たす．ここで，点の集合 W に対して，$\Gamma^+(W)$ は W の点と隣接しかつ W に含まれない点の集合である．

$\mathcal{C}(S)$ を上の条件を満たすような 3 つ組 $\langle S,V_c,V_t\rangle$ の集合とすると，非空集合 $\mathcal{C}(S)$ に対して，$\mathcal{C}(S)=\{\langle S,\phi,\overline{S}\rangle\}+\mathcal{C}_V(S)$ が成立することが分かる．ここで，$\overline{S}=V-S$, $\mathcal{C}_V(S)=\{\langle S,V_c,V_t\rangle\in\mathcal{C}(S)|V_c\neq\phi\}$ であり，"+" は互いに素な集合の和集合"∪"を得る演算を表す．これより，$\langle S,\phi,\overline{S}\rangle$ はカットセット $\omega(S,\overline{S})$ と対応するから，[2] のアルゴリズムを用いてすべてのカットセットを列挙すれば，各カットセット $\langle S,\phi,\overline{S}\rangle$ に対して，$\mathcal{C}_V(S)$ の元を全て列挙すれば，すべての MS set を列挙できることが分かる．以下で，$G[W]$ は点の集合 W に関する G のセクショングラフ (両端点が W に含まれる枝からなる G の部分グラフ) である．

定理 1: $t\notin X$ かつ $X\subset\Gamma^+(S)$ をみたす非空集合 X に対して，$\langle S,X,V_t\rangle\in\mathcal{C}_V(S)$ であるための必要十分条件は，(i)$\Gamma^+(S)-X-V_t=\phi$ かつ (ii)$X\subset\Gamma^+(V_t)$ である．ここで V_t は，$G[\overline{S}-X]$ 内の t をふくむ連結成分 $G[V_t]$ の点集合である．

$\mathcal{C}_V(S)$ の全ての要素を生成するには，定理の条件を満たす全ての非空集合 X を生成する必要がある．V_t は S と X によって一意に定められるので，以後 $\langle S,X,V_t\rangle\in\mathcal{C}_V(S)$ を $\langle S,X,*\rangle$ と表す．

A_S を $G[\overline{S}]$ の切断点 (articulation point) の集合とする．切断点 $v\in A_S$ に対して点 $w\in\Gamma^+(S)$ が存在し，$G[\overline{S}]$ の中では t から w への全ての道が v を通るとき，切断点 v を $\mathcal{C}_V(S)$ の必須点と言う．$A_e(S)$ を $\mathcal{C}_V(S)$ の必須点の集合とする．明らかに $v\in\Gamma^+(S)$ が $\mathcal{C}_V(S)$ の必須点であるならば，v を X に含めると，X は上記の (i) あるいは (ii) の条件を満たさなくなるので，w が X に含まれているような場合でも，v を X に含めることはできない．

補題 1: $\overline{S}-\{t\}\neq\phi$ であるならば，$\Gamma^+(S)-\{t\}-A_e(S)\neq\phi$ である．

そこで，$\Gamma^+(S)-\{t\}-A_e(S)=\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ とし，また $B_e(S)=(\Gamma^+(S)\cap A_e(S))\cup\{t\}$ とする．さらに，$X\subset\Gamma^+(S)-\{t\}$ および $t\in B\subset\Gamma^+(S)\cup\{t\}$ を満たす点の集合 X および B に対して，$\mathcal{C}_V(S,X,B)=\{\langle S,V_c,*\rangle\in\mathcal{C}_V(S)|X\subset V_c$ and $V_c\cap B=\phi\}$ とする．この時，次の補題が成り立つ．

On Generation of Minimal Separating Sets of a Graph
Jiro Hayakawa*, Shuji Tsukiyama*, and Hiromu Ariyoshi†
* Dept. of Electrical and Electronic Eng., Chuo University
† Dept. of Electrical and Electronic Eng., Ehime University

補題 2: $\mathcal{C}_V(S) = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{C}_V(S, \{v_i\}, B_e(S) + \{v_1, \ldots, v_{i-1}\})$ である．また，各 $\mathcal{C}_V(S, \{v_i\}, B_e(S) + \{v_1, \ldots, v_{i-1}\})$ は $\langle S, \{v_i\}, *\rangle$ を含む．

$G[\overline{S} - X]$ において，t から途中で Xを通ることなく $w \in \Gamma^+(S)$ へ至るような全ての道が必ず $G[\overline{S} - X]$ の切断点 vを通るとき，vを $\mathcal{C}_V(S, X, B)$ の必須点と呼ぶ．$A_e(S+X)$ を $\mathcal{C}_V(S, X, B)$ の必須点の集合，$B_e(S+X) = (A_e(S+X) \cap \Gamma^+(S)) \cup \{t\}$ とする．

補題 3: $\mathcal{C}_V(S, X, B) \neq \phi$ かつ $\Gamma^+(S) - X - B - B_e(S+X) = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ であるならば，$\mathcal{C}_V(S, X, B) = \{\langle S, X, *\rangle\} + \sum_{i=1}^{k} \mathcal{C}_V(S, X + \{v_i\}, B \cup (B_e(S+X) + \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}))$ である．また，$k \geq 1$ であるならば，各 $\mathcal{C}_V(S, X + \{v_i\}, B \cup (B_e(S+X) + \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}))$ は非空である．

これらの補題を用いればすべての MS sets を生成するアルゴリズムを作ることができる．これは [2] のアルゴリズムによって生成されたカットセット$\omega(S, \overline{S})$ のそれぞれに対して，3 つ組 $\langle S, X, *\rangle$ が $\mathcal{C}_V(S)$ の MS set となるようなすべての集合 Xを列挙するものである．

必須点の探索

$\mathcal{C}_V(S)$ に対して，点の集合 Xを生成する作業において，$\mathcal{C}_V(S, X, B)$ の必須点の集合 $A_e(S+X)$ を見出す操作以外は，G の規模の線形時間で実行することができる．

今，$G[\overline{S} - X]$ に対して，根付き木 $BT(S+X) = [\{t\} + A_{S+X} + N_{S+X}, D_{S+X}]$ を以下のように定義する．1. 根 t は G の終点 t に対応する

2. 各点 $v \in A_{S+X}$ は $G[\overline{S} - X]$ の切断点 vに対応する．

3. 各点 $b \in N_{S+X}$ は $G[\overline{S} - X]$ の非可分成分 G_bに対応する．

4. 非可分成分 G_bが切断点 vあるいは終点 t を含むときかつそのときに限り，枝 $(v, b) \in D_{S+X}$ あるいは枝 $(u, t) \in D_{S+X}$が存在する．

さらに，$\overline{S} - X$の各点 u に対して，$BT(S+X)$ の点 $bv(u) \in A_{S+X} + N_{S+X}$を，$u$ が $G[\overline{S} - X]$ の切断点ならば，$bv(u) = u \in A_{S+X}$とし，u が $G[\overline{S} - X]$ の切断点でないならば，$bv(u) \in N_{S+X}$は $G[\overline{S} - X]$ 内の u をふくむ非可分成分と定義する．これを用いて，$w \in \Gamma^+(S) - \{t\}$ の各点に対し，$w \notin X$ならば $BCC(w) = \{bv(w)\}$ とし，$w \in X$ならば $BCC(w) = \{bv(u) \in A_{S+X} + N_{S+X} | u \in \Gamma^+(W) \cap (\overline{S} - X)\}$ と定めると，次の補題が成立する．

補題 4: 切断点 $v \in A_{S+X}$ が $\mathcal{C}_V(S, X, B)$ の必須点であるための必要十分条件は，$BT(S+X)$ において，v が $BCC(w)$ の全ての点の祖先となるような $w \in \Gamma^+(S)$ $(w \neq v)$ が存在することである．

$BT(S+X)$ において，必須点 $v \in A_{S+X}$ の祖先 $u \in A_{S+X}$ もまた必須点であるから，各 $w \in \Gamma^+(S) - \{t\}$ に対して，$BCC(w)$ の全ての点の最下位共通祖先 [3] を見つければ，それから全ての必須点を見い出すことができる．ここで，根付き木における点集合 Wの最下位共通祖先とは Wのすべての点の祖先 vで，vの真の子孫には Wの全ての点の祖先になるようなものはない点である．

今，根付き木 $BT(S+X)$ を深さ優先探索 [4] したとき，各点 vに帰りがけ順および行きがけ順に付けた番号を，それぞれ $\mathrm{preNo}(v)$ および $\mathrm{posNo}(v)$ とすると，次の補題が成り立つ．

補題 5: $\mathrm{preNo}(v) \leq min[\ \mathrm{preNo}(w)\ |w \in W]$ かつ $\mathrm{posNo}(v) \geq max[\ \mathrm{posNo}(w)\ |w \in W]$ が成立するときかつそのとときに限り，vは点集合 Wの全ての点の祖先である．

従って，[3] で述べられている 2 つの点の最下位共通祖先を求める方法と Merge-Find 集合 [4] を用いれば，$\mathcal{C}_V(S, X, B)$ の必須点は $O(m + n\alpha(n))$ で見つけることができる．ここで $\alpha(n)$ はアッカーマン関数の逆関数である．

定理 2: G のすべての MS set は，MS set 1 個当たり $O(m + n\alpha(n))$ の計算量で重複することなく列挙することができる．また，MS set を記憶しないで出力してしまうならば，必要なメモリー領域は高々$O(n^2)$ である．

結論

本文では，無向グラフ G の全ての MS set を MS set 1 個当たり $O(m + n\alpha(n))$ で列挙するアルゴリズムを提案した．今後の課題は，提案手法をプログラム化し，その性能を評価することや，オフライン最下位共通祖先を線形時間で解く単純なアルゴリズムを考えることなどである．

参考文献

[1] Ariyoshi, H.: Cut-set graph and systematic generation of separating sets, *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-19, No. 3, pp. 233–240 (1972).

[2] Tsukiyama, S., Ariyoshi, H., Shirakawa, I. and Ozaki, H.: An algorithm to enumerate all cutsets of a graph in linear time per cutset, *J.ACM*, Vol. 27, No. 4, pp. 619–632 (1980).

[3] Aho, A. V., Hopcroft, J. E. and Ullman, J. D.: On finding lowest common ancestors in trees, *SIAM J. Computing*, Vol. 5, No. 1, pp. 115–132 (1976).

[4] Aho, A. V., Hopcroft, J. E. and Ullman, J. D.: *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Addison-Wesley (1974).