3AD−2

類似した点群に対する Delaunay 三角形分割の差分的構成法

井上恵介* 伊藤貴之* 山田敦* 古畑智武**
* 日本アイ・ビー・エム株式会社 東京基礎研究所
** 日本アイ・ビー・エム株式会社 AP ソリューション開発
{inoue,itot,ayamada}@trl.ibm.co.jp, furuhata@yamato.ibm.co.jp

1 はじめに

Delaunay 三角形分割は、与えられた点群を頂点とする三角形の集合に平面を分割する手法であり、幾何的に優れた性質を持つため、よく利用されている。

一方、有限要素法や CG などの目的で CAD モデルの面領域をメッシュ分割する手法の一つに、Advancing Front 法や Mapped Mesh 法と並んで、物理シミュレーションを応用した方法がある。これは、面上に存在する点群の配置を、物理的なモデルに基づき微分方程式で記述し、それを解くことで、決定するものである。

Bubble Mesh 法 [1] はそうした手法の一つであり、水泡どうしが離れ過ぎず近過ぎず密に詰まる現象をシミュレートする。その過程で、各バブル（水泡）を表す粒子は、互いに及ぼす力によって少しずつ安定な位置に移動する。この計算は各粒子の運動方程式を繰り返し（数百回程度）解くことで行なわれるが、その間粒子どうしの隣接関係を保持するため Delaunay 三角形分割を使って、粒子を頂点とするグラフ構造が計算されている。

本稿では、少しずつ移動してゆく点群に対する Delaunay 三角形分割を効率よく構成する方法、およびそれをパラメータ表現された曲面上での疑似 Delaunay 三角形分割に応用することの利点について報告する。

2 一般的な Delaunay 三角形分割法

Delaunay 三角形分割の構成法については数多く知られているが、Sloan の方法 [2] は、単純かつ効率的であるために広く用いられている。処理手順の概略は以下の通りである。

1. 全ての頂点を囲むような大きな三角形 (super-triangle) を生成する。
2. 頂点を 1 個ずつ選択し、順に以下の処理を行う。
   - 頂点 D を内部に含む三角形 ABC を抽出する（最初の頂点では super-triangle 自身が選ばれる）。
   - 三角形 ABC を、3 つの三角形 ABD, BCD, CAD に分割する。
   - 頂点 D に接する各三角形について、D の対辺を共有する三角形がある場合には、その三角形と **Swap 処理** を行う。この処理は、頂点 D に接するすべての三角形について、Swap(入れ換え) が不要になるまで繰り返される。
3. 頂点の凸包の外側に生成された三角形を除去する。

隣接する 2 つの三角形に対する **Swap 処理**とは以下の処理である。

Swap 処理: 三角形 ABD と三角形 AEB について、ABD の外接円の内部に 点 E があるかどうかを判定する。点 E が内部にあるときには、辺 AB を消して辺 DE を追加する (4 角形 ADBE の対角線を入れ換える)。

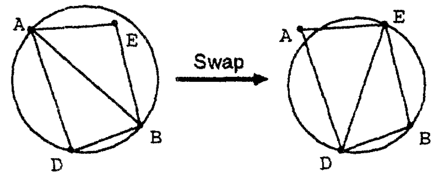

図 1: 隣接する三角形の Swap 処理

この方法は、点群に制約がついている場合、つまりいくつかの辺が予め固定されている場合にも拡張されている。

3 差分的な Delaunay 三角形分割法

前節で説明した分割アルゴリズムでは、逐次的に頂点を追加してゆく際、頂点が既にあるどの三角形に含まれるかを計算するコストが多くを占めている。このため Bubble Mesh 法のように繰り返し計算によって頂点の望ましい配置を決定する手法においては、Delaunay 三角形分割を維持しておくための計算のコストが大きくなってしまう。

そこで、頂点群が移動するような場合に Delaunay 三角形分割を以下のような方法で求めることが可能である。この方法は、点が移動する前の状態での三角形分割から出発することによって、新しい座標を持った点につ

Differential construction of Delaunay triangulation for similar set of vertices
Keisuke INOUE, Takayuki ITOH, Atsushi YAMADA, and Tomotake FURUHATA

表 1: CPU 時間の比較 [秒]

点の数	要素数	従来手法	差分手法
335	584	0.34	0.06
1190	2205	2.66	0.58
2109	3984	6.59	1.62
4597	8843	22.67	7.54

いての Delaunay 三角形分割を効率よく計算するものである。

1. 点群が既に何らかの方法で三角形分割されていることを前提とする（点群が辺で結ばれていても、三角形が重なったりすき間があったりすると、「正常な」分割とはみなされないので、この手法は適用できない）。
2. 全ての「2つの三角形に共有されている辺」をスタックに積む。(「固定された」辺は除外する。)
3. スタックから一つの辺を取り出し両側の三角形について **Swap 処理**を行なう。Swap が行なわれたときは、2つの新たな三角形の外側の辺4本を、スタックに積む (既にスタック中にあるものは除く)。
4. 3のステップをスタックが空になるまで繰り返す。

実際の問題で、計算時間が向上したようすを表1に示す。実験は、同一の形状を異なる粗さでメッシュ生成したときのもので、通常の方法に比べて3〜5倍程度の性能の向上が得られている。

移動点群に対する Delaunay 三角形分割では、点の移動量が少ないほどこの手法の効果は顕著である。逆に移動量が大きく、三角形要素が反転して前回の分割の整合性が失われる場合は、この手法は適用できない。結局、反転三角形の有無を確かめ、あるときは従来の Sloan の方法を用いる。

この方法のもう一つの特徴として、幾何的な評価を行なう箇所が Swap の条件判定の一箇所に限定されていることがある。

4 曲面上の疑似 Delaunay への応用

曲面上に散在する点群についても、疑似的な Delaunay 三角形分割を行なうことができる。本研究では以下のような Swap の条件を用いて、uv 空間で定義された多項式曲面についての Delaunay 三角形分割を試みた。

曲面版の Swap 処理: 三角形 ABD と三角形 AEB があるとき、$\angle ADB + \angle AEB > \angle DAE + \angle DBE$ であれば、AB を入れ換えて三角形 ADE と三角形 BDE を作る。

曲面上の点について差分的な方法を適用した場合、都合がよいのは以下のようなことである。

- 元になる分割の領域の外での幾何的な評価が必要ない。平面上の点群についても同様だが、曲面上の点群ではこのことは大きな利点となる。つまり、曲面は必要な領域の外でも定義されているとは限らず、このため super-triangle を使う方法は不安定要因を避けられない。
- 元になる分割は、パラメタ空間での三角形分割でもよい。移動前／後の点群の類似性は、すなわち三角形要素が反転していないことである。通常のパラメータ表現の曲面は、全領域で Jacobian が非退化でありこの条件を満たす。従って、一旦パラメータ空間で何らかの三角形分割をした後に差分的な方法を適用することができる。図2はそのようにして曲面上の点群の疑似 Delaunay 三角形分割を求めた例である。

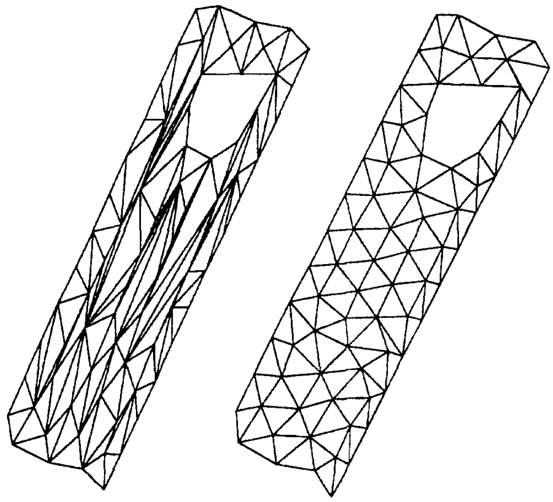

図 2: uv 空間での初期分割 (左) と最終的な分割 (右)

5 まとめ

本稿では、ある点群に対して行なった三角形分割の結果をもとに、それぞれの点が移動した点群に対する Delaunay 三角形分割を、効率よく行なう方法を提案した。この方法は、拘束付き Delaunay 分割問題や曲面上での疑似 Delaunay 分割問題への応用にも適した性質を持つ。

参考文献

[1] 嶋田憲司, 物理モデルによる自動メッシュ分割, 日本シミュレーション学会誌, Vol. 12, No. 1, pp. 11-20, 1993.

[2] Sloan S. W., *A fast algorithm for constructing Delaunay triangulations in the plane,* Advanced Engineering Software, Vol. 9, No. 1, pp. 34-55, 1987.