

曲率が弧長の区分0~2次関数となる複合補間曲線の統一的設計法*

2V-4 ○ 黒田 満† 東 正 毅†
豊田工業大斉 藤 剛†† 渡辺由美子††
東京電機大

1. は じ め に

弧長, 接線, 曲率といった本来の幾何情報だけから補間曲線形状を設計したいという考え方は CAD の初期からあって¹⁾, 研究されてきた。

Nutbourne ら^{1, 2)}や Meek ら³⁾は曲率が弧長の区分線形関数となるクロソイドスプライン補間曲線をスパンごとに逐次伸ばしてゆく方法を開発した。しかし, 形状が初期値に大きく依存するし, インタラクティブな補助または注意深い扱いを必要とした。

一方, Mehlum は曲率自乗積分を最小化する C^2 補間曲線を解析してクロソイドスプライン補間曲線に至り, これを任意精度で円弧近似する方法を実用化した⁴⁾。Stoer はこの最小化クロソイドスプライン補間曲線を導いた⁵⁾が, 点配置によっては解が存在しない曲線に対する手法としては複雑すぎて必ずしも実用的ではなかった。

そこで著者らは汎用数式処理システム (Mathematica[®]) を用いて曲率が弧長の区分 1~2 次関数となる補間曲線を手軽に導く方法を示した^{6, 7)}。本研究ではこれらを総合化して発展させ, 直線分や円弧を含む複数セグメントから成るスパンの複合補間曲線を, 弧長をパラメータとする B-スプラインで記述する曲率プロファイルを直接制御して統一的に形状設計できる方法を示す。

2. 接線角の記述と未知数

曲線 $\mathbf{r}$, 単位接線ベクトル $\mathbf{r}'$ と曲率 $\kappa(s)$ の関係は

$$\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}, \quad \kappa(s) = \frac{d\psi(s)}{ds}, \quad (1)$$

である。接線角 $\psi(s)$ は $\mathbf{r}'$ が x 軸となす角である。曲線を決定するこの接線角 $\psi(s)$ を弧長をパラメータとする 3 次の B-スプラインで表す。したがって曲率は 2 次の B-スプラインで表される。これに周知の B-ス

プライン形状制御手法を適用して曲率プロファイルと曲線形状を制御してゆく。

Δ を前進差分演算子とし, 以下の表記法を用いる。

● 節点: $v_{-2}, v_{-1}, \dots, v_q$

両端を 3 重節点。いずれの節点も弧長半直線上で曲線分のいずれかの端点に対応する。図 1 参照。

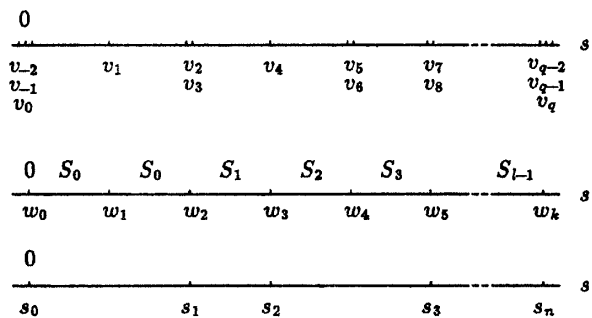


図 1 $\{v_{-1}, v_0, \dots, v_q\}$, $\{w_0, w_1, \dots, w_k\}$, $\{S_0, S_1, \dots, S_{l-1}\}$, $\{s_0, s_1, \dots, s_n\}$ の例

○ 曲線分弧長: $\Delta w_0, \Delta w_1, \dots, \Delta w_{k-1}$

節点差分のうちでゼロでないもの。

○ 独立な曲線分弧長: $S_0, S_1, \dots, S_{l-1}$

上記のうちで互いに独立なもの。

○ 補間曲線のスパン弧長: $\Delta s_0, \Delta s_1, \dots, \Delta s_{n-1}$

○ 節点差分リスト: 多重節点およびスパンの曲線分構成を簡単にわかりやすく示すものである。まず全ての節点の差分リストを作って複数曲線分から成るスパンについてはサブリスト化する。図 1 の場合は

$$\{0, 0, \{S_0, S_0\}, 0, S_1, \{S_2, 0, S_3\}, \dots, 0, 0\}.$$

● de Boor 縦座標: $B_0, B_1, \dots, B_q$

B_i には Greville 横座標 $(v_{i-2} + v_{i-1} + v_i)/3$ が対応する。

● Bézier 縦座標: $b_0, b_1, \dots, b_{3k}$

接線角 $\psi(s)$ を取り扱いやすくするために局所変数を使った Bézier 関数表現にする。

独立な曲線分弧長列と de Boor 縦座標列を未知数ベクトル $\mathbf{u}$ としてまとめて, 後のために別名をつける。

$$\mathbf{u} \equiv (u_0, u_1, \dots, u_{l+q})^t \\ \equiv (S_0, S_1, \dots, S_{l-1}, B_0, B_1, \dots, B_q)^t. \quad (2)$$

*Unified design for composite interpolants whose curvatures are piecewise zero to 2nd order polynomial of arc-length Mitsuru Kuroda, Higashi Masatake, Tsuyoshi Saitoh and Yumiko Watanabe

†Toyota Technological Institute

2-12-1 Hisakata, Tempaku, Nagoya 468, Japan

††Tokyo Denki University

2-2 Kanda-Nishiki, Chiyoda, Tokyo 101, JaPan

®Wolfram Research, Inc.

3. 方程式

曲線が与点を次々と通過する x, y 成分あわせて $2n$ 個の補間条件 (3) がある. 節点差分リストを参照して i 番目のスパンの曲線分についての和を $\sum_{i\text{-th span}}$ としうまくとることができる.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_{2i} \\ f_{2i+1} \end{pmatrix} &\equiv \begin{pmatrix} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \cos \psi(s) ds \\ \int_{s_i}^{s_{i+1}} \sin \psi(s) ds \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i\text{-th span}} \Delta w_j \begin{pmatrix} \int_0^1 \cos \psi_j(t) dt \\ \int_0^1 \sin \psi_j(t) dt \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{pmatrix} = 0, \quad (3) \\ i &= 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

未知数は $l+q+1$ 個あるので, ほかに $l+q-2n+1$ 個の拘束条件を付加することができる. 例えば, 節点における単位接線ベクトルや曲率・曲率半径を指定するとか, 特定の曲線分の次数を低減して円弧や直線分とすることができる. これ等の互いに独立な拘束条件を次のように表す.

$$f_i(u) = 0, \quad i = 2n, 2n+1, \dots, m, \quad m \leq l+q. \quad (4)$$

4. 曲線の導出

未知数 u に関する連立方程式 (5) をニュートン法で解く. このとき, パラメトリック 3 次の C^2 補間曲線から良い初期値 $u^{(0)}$ を利用することができる.

$$f(u) \equiv (f_0, f_1, \dots, f_m)^t = 0, \quad m \leq l+q. \quad (5)$$

$$\begin{cases} u^{(i+1)} = u^{(i)} - J^{-1} f(u^{(i)}) \\ J \equiv \frac{\partial(f_0, f_1, \dots, f_m)}{\partial(u_0, u_1, \dots, u_{l+q})} \Big|_{u=u^{(i)}} \end{cases} \quad (6)$$

もし追加拘束条件 (4) が $m < l+q$ のときには, デフォルトの拘束条件を C^2 補間曲線等から設定するか, J の逆行列を非正方のムーアペンローズ逆行列で置き換える.

5. 曲線例

図 2 に文献²⁾からのデータに対する曲線例を示す. 閉じた曲線なので付加条件として両端の曲率が等しいことと接線角に 2π の差があることを与えた. 図 3 では ④, ⑦, ⑨には円弧の条件をその他の番号をふった曲線分には直線分の条件を課して曲線生成した. 通過点列データと収束時の節点差分リストは次のようである.

$$\begin{aligned} &\{(9, 1), (4, 1), (1, 3), (1, 6), (2, 7), (7, 7), (10, 3.5), \\ &(14, 3.5), (14, 6), (15, 7), (17, 4.2), (20, 3), (22, 3)\}. \end{aligned}$$

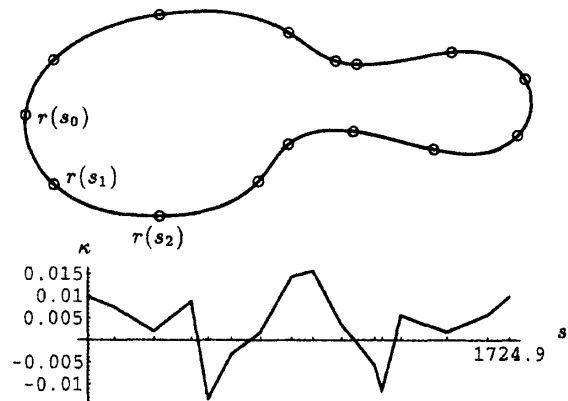


図 2 G^2 クロソイドスプライン補間曲線

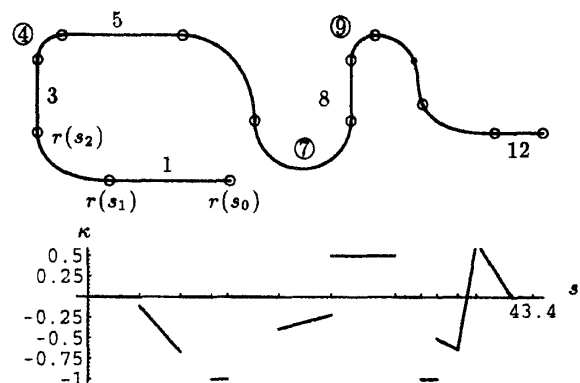


図 3 直線分や円弧を含む曲線

$$\{0, 5.000, 0, 4.018, 0, 3.000, 0, 1.571, 0, 5.000, 0, 5.123, 0, 6.282, 0, 2.500, 0, 1.571, 0, \{2.053, 1.806\}, 3.430, 2.000, 0\}.$$

参考文献

- 1) A. W. Nutbourne, P. M. McLellan and R. M. L. Ken-sit: Curvature Profiles for Plane Curves, *Computer Aided Design*, 4, 4 (1972) 176.
- 2) T. K. Pal, "Intrinsic Spline Curve With Local Control", *Computer Aided Design*, 10, 1 (1978) 19.
- 3) D. S. Meek and R. S. D. Thomas: A Guided Clothoid Spline, *Computer Aided Geometric Design*, 8 (1991) 163.
- 4) E. Mehlum: Nonlinear Splines, *Computer Aided Geometric Design*, R. E. Barnhill and R. F. Riesenfeld (eds.), Academic Press, New York (1974) 173.
- 5) J. Stoer: Curve Fitting With Clothoidal Splines, *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 87, 4 (1982) 317.
- 6) 黒田 満, 東 正毅, 齊藤 剛, 渡辺由美子: 数式処理システムによるクロソイドスプライン補間曲線, *精密工学* 会誌, 62, 12 (1996) 1717.
- 7) 黒田 満, 齊藤 剛, 渡辺由美子, 東 正毅: 曲率が弧長の区分 2 次関数となる G^3 補間曲線, *情報処理学会論文誌* (掲載予定).