

コンピュータシステムの自動スリープ機能による省電力効果 I ——再生過程によるモデル化

岡村 寛之[†] 土肥 正[†] 尾崎 俊治[†]

近年、コンピュータシステムにおいて、ハードディスクやディスプレイの自動スリープ機能が省電力の観点から重要視されるようになってきた。本論文では、コンピュータへのアクセスがない状況において、省電力の観点からユーザがいつハードディスクをスリープ状態に切り替えるべきかについての問題を取り上げ、定常状態における期待消費電力を最小にする最適スリープ時刻を求めるための確率モデルを提案する。特に、ユーザによるコンピュータへのアクセス要求が到着した後、その処理期間中に到着する他のアクセス要求はキャンセルされるような使用環境を想定する。アクセス要求が同次ポアソン過程に従って到着する場合、期待消費電力を最小にする最適自動スリープ時刻が解析的に導出される。より一般的な到着パターンに対しては、2種類の近似解が提供される。

On the Effect of Power Saving by Auto-sleep Function of a Computer System I—Modeling by a Renewal Process

HIROYUKI OKAMURA,[†] TADASHI DOHI[†] and SHUNJI OSAKI[†]

Recently, the automatic sleep function of the hard disk or the display in a computer system is rapidly recognized to be important in terms of power management. This paper addresses a problem of how to determine the optimal sleep timing when the computer user should turn the hard disk or the display off in order to save the electric power after the computer has not been accessed. We propose a stochastic model to obtain the optimal sleep timing strategy which minimizes the expected power consumed per unit time in the steady-state, when the access requirements arrive at a computer according to a renewal process. In this model, if the first transaction is accessed, the other transactions arrived later are canceled until completing the process of the first one. We derive the optimal auto-sleep strategy analytically when the access requirements arrive in accordance with a homogeneous Poisson process, and provide two approximated solutions for more general cases.

1. はじめに

近年、コンピュータを構成する部品や周辺機器の高速化・高機能化にともなう性能の向上により、我々の周りにおけるコンピュータの利用機会は急激に広まっている。このような状況に対して、コンピュータの信頼性や操作性に加え、コンピュータのパワーマネジメントと呼ばれる省電力技術の重要性が注目されるようになってきている。パワーマネジメントの必要性は、米国の環境保護庁省エネルギー奨励策（Energy Star Computers Program: EPS）が発表されて以来世界的な関心を集めており、わが国においてもすでに ESP 基準に適合したワークステーションが販売されるに至っている。また、コンピュータの省電力化の需要が

最も必要なものとして、ノートブック PC があげられる。ノートブック PC の重要な特徴である高い携帯性を実現するために、バッテリー駆動時間の延長や低電圧かつ高速クロックで駆動する回路を最小化するデバイスの開発など、多くの未解決問題が山積みされているのが現状である^{1),2)}。

一般に、コンピュータやその周辺機器の省電力化を実現するためには、消費電力の低い電子部品を開発するなど新しいハードウェアの研究開発が本質的に重要となるが、一方でアプリケーションやユーザの操作履歴に従ってソフト的に省電力を実践することも必要である。たとえば、CPU の消費電力をリアルタイムで表示する機能、アプリケーションプログラムにおけるアイドル状態の検出機能、回路のクロック速度に対する可変制御機能などがあげられる。中でも、ハードウェア本体やアプリケーションプログラムをアイドル状態から低消費電力状態へ移行させるための自動スリー

[†] 広島大学工学部第二類（電気系）

Faculty of Engineering, Cluster II (Electrical and Industrial Engineering), Hiroshima University

ブ機能 (auto-sleep function) は、最近のほとんどのデスクトップ PC ならびにノートブック PC に標準装備されている。ここで、コンピュータのアイドル状態からスリープモードに移行するタイミングを推定することは重要な設計上の問題となる。すなわち、コンピュータのハードディスクを例にとれば、ハードディスクの起動に要する電力は通常運転時の定回転動作に要する電力よりも数倍大きいので、アイドル状態からただちにスリープモードに移行することは操作性だけでなく省電力の観点からもつねに有効であるとはいえない。

このような問題に対して、平越ら³⁾、Sandoh ら^{4),5)}、土肥ら⁶⁾は、コンピュータのアイドル状態からいつスリープモードに移行すべきかの時期を推定するための確率モデルを提案し、期待消費電力を最小にする最適スリープ時間を求める問題について議論している。一般に、コンピュータの消費電力は、ユーザによるコンピュータの使用頻度や使用時間に大きく影響されるものと考えられる。換言すれば、コンピュータへのアクセス要求の時間的振舞いは、不確実性をともなうある種の確率過程によって記述されるべきであり、従来の文献3)~6)においてはそのような試みがなされていなかった。そこで本論文では、コンピュータへのアクセスがない状況において、省電力の観点からユーザがいつハードディスクをスリープ状態に切り替えるべきかについての問題を再定式化し、定常状態における期待消費電力を最小にする最適スリープ時刻を求めるための新しい確率モデルを提案する^{7),8)}。特に本論文では、ユーザによるコンピュータへのアクセス要求が到着した後、その処理期間中に到着する他のアクセス要求はキャンセルされる状況をモデル化する。これは、マルチユースを想定したデスクトップ型コンピュータの使用形態を忠実に表現しているものと考えられる。

本論文の構成は次のとおりである。まず2章において、モデルの概要を述べた後、コンピュータへのアクセス要求の発生回数が再生過程に従って生起する場合の定常状態における単位時間あたりの期待消費電力を定式化する。続いて3章において、アクセス要求の発生回数が同次ポアソン過程に従って到着する場合に着目し、期待消費電力を最小にする最適自動スリープ時刻を解析的に導出する。4章では、アクセス要求の一般的な到着パターンに対して2種類の近似解法を提案する。5章では、4章で提案した近似解法の精度を比較するための数値実験を行う。さらに、実際に採集したコンピュータへのアクセス要求時間間隔データとトランザクションの処理時間データを用いて、ワークス

テーションの自動スリープ機能を設計した事例について報告する。最後に6章において、結論と今後の課題を述べる。

2. コンピュータシステムの自動スリープ機能

ここでは、コンピュータシステムにおいて省電力化を効率的に実現するための1つの手段である自動スリープ機能について述べる。最初に、モデル化を行うために必要な記号の定義を行う。

s : コンピュータへのアクセス (call) が行われた後、コンピュータを起動するために必要な時間 (正定数)

τ : アクセス要求後、実際に処理を開始するまでに要する準備時間 (正定数)

X_k : k ($= 1, 2, \dots$) 番目のアクセス要求発生時間間隔 (非負値確率変数)

S_k : k 番目のアクセス要求 (トランザクション) に対する処理時間 (非負値確率変数)

t_0 : スリープ開始時間 ($0 \leq t_0 < \infty$)

P_1 : コンピュータの稼働状態において発生する単位時間あたりの消費電力

P_2 : コンピュータの起動状態において発生する単位時間あたりの消費電力 ($P_2 > P_1 > 0$)。

Sandoh ら⁴⁾に従って、本論文で対象とする自動スリープ機能を有するシステムは、以下に示す4つの状態を推移するものと仮定する (図1を参照)。

スリープモード (sleep): 電源 OFF とは異なるシステムの休止状態であり、アクセス要求が発生すると起動状態へただちに移行する。スリープモードにおいて発生する消費電力は P_1 や P_2 と比較して相対的に非常に小さいことが知られており、本論文ではスリープモードにおける消費電力は0であると仮定する。

起動状態 (warm-up): システムが起動中の状態であり、ある一定期間 ($0, s]$ 経過すると待機状態へ移行する。この状態での消費電力は通常の消費電力と比較して非常に大きく、単位時間あたり P_2 の起動電力が消費される。

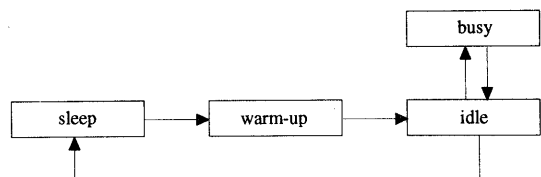


図1 自動スリープシステムの概念図

Fig.1 Configuration of an auto-sleep system.

待機状態 (idle): アクセス要求に対して待機している状態であり、アクセス要求が発生するとただちに稼働状態へ移行する。ここで、ある一定期間 $(0, t_0]$ 中アクセス要求が発生しない場合、ただちにスリープモードへ移行する。待機状態では単位時間あたり P_1 の通常電力が消費される。

稼働状態 (busy): システムが実際にアクセスに対する処理を行っている状態であり、アクセスの処理を開始するまでに要する準備時間 $(0, \tau]$ を経過した後、処理を開始する。1つのトランザクションの処理が完了すると待機状態へ移行する。稼働状態では単位時間あたり P_1 の通常電力が消費される。

いま、コンピュータに対するアクセス要求は確率的に生起するものとし、 $k-1$ 番目のアクセス要求の発生から k 番目のアクセス要求の発生までの時間間隔を X_k ($k=1, 2, \dots$) とし、アクセス要求発生時間間隔 X_k は互いに独立で同一な確率変数列とする。すなわち、アクセス要求回数 $\{N(t), t \geq 0\}$ は一般の再生過程^{9),10)}に従うものと仮定する。アクセス要求発生時間間隔 X_k の確率分布関数を $F(t) = \Pr\{X_k \leq t\}$ 、平均と分散を、それぞれ $E[X_k] = 1/\lambda$ ならびに $\text{Var}[X_k] = \sigma_a^2$ とする。

各トランザクションに対する処理時間もまた互いに独立で同一な確率変数列であり、 k ($k=1, 2, \dots$) 番目に発生したアクセス要求に対する処理時間を S_k とする。ここで、 S_k の確率分布関数を $G(t) = \Pr\{S_k \leq t\}$ 、平均と分散を、それぞれ $E[S_k] = 1/\mu$ ならびに $\text{Var}[S_k] = \sigma_s^2$ と表記する。以降では簡単のため、 X_k および S_k の添字 k を省略し、 X および S のように略記する。

3. 再生過程によるモデル化

定常状態における単位時間あたりの期待消費電力を定式化し、それを最小にする最適な自動スリープ時間 t_0^* を求めることを考える。期待消費電力を定式化するために、アクセス要求回数 $\{N(t), t \geq 0\}$ に対して残存寿命 (residual life) γ_t とその確率分布関数 $H(x|t) = \Pr\{\gamma_t \leq x | t\}$ を定義する。ここで γ_t は、時刻 t から次のアクセス要求が発生するまでの時間を表す。 γ_t の確率分布関数および期待値は、 $\{N(t), t \geq 0\}$ に対する再生関数 $M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t)$ を用いて、

$$H(x|t) = F(t+x) - \int_0^t \bar{F}(t+x-y) dM(y), \quad (1)$$

$$E[\gamma_t] = (1 + M(t))/\lambda - t \quad (2)$$

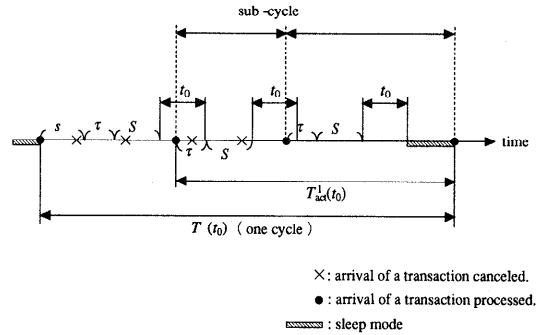


図2 確率システムの挙動例
Fig. 2 Possible realization of the stochastic system.

のように表される。ここで、 $F^{(n)}(t)$ は確率分布関数 $F(t)$ の n 重畳み込みであり、 $\bar{F}(\cdot) = 1 - F(\cdot)$ とする。

コンピュータシステムの起動開始時点から次の起動開始時点までの期間を1サイクルとすれば、各々の起動開始時点が再生点¹¹⁾となる。いま、図2のように、システムの稼働状態においてアクセス要求が発生した時点から次のスリープモードが終了するまでの期待時間を $T_{act}(t_0)$ とし、1サイクルの期待時間を $T(t_0)$ とおく。ここで、 $T(t_0)$ と $T_{act}(t_0)$ の間には次のような関係式が成立することが分かる。

$$T(t_0) = \int_0^\infty \int_0^{t_0} \left\{ s + \tau + x + t + T_{act}(t_0) \right\} \times dH(x | s + \tau + t) dG(t) + \int_0^\infty \int_{t_0}^\infty \left\{ s + \tau + x + t \right\} \times dH(x | s + \tau + t) dG(t), \quad (3)$$

$$T_{act}(t_0) = \int_0^\infty \int_0^{t_0} \left\{ \tau + x + t + T_{act}(t_0) \right\} \times dH(x | \tau + t) dG(t) + \int_0^\infty \int_{t_0}^\infty \left\{ \tau + x + t \right\} \times dH(x | \tau + t) dG(t). \quad (4)$$

図2に示されるように、システムが稼働状態で、アクセスの要求が発生した時点から次のスリープモードが終了するまでの期間中に、スリープモードに移行することなくトランザクションの処理を行った回数を N とおく。明らかに N は、1回目の処理が終了した後にスリープモードに移行する確率が $E[H(t_0 | s + \tau + S)]$ 、2回目以降の処理でスリープモードに移行する確率が $E[H(t_0 | \tau + S)]$ の幾何分布に従うため、

$$E[N] = \frac{\int_0^\infty H(t_0 | s + \tau + x) dG(x)}{\int_0^\infty \bar{H}(t_0 | \tau + x) dG(x)} \quad (5)$$

となる。これより、1サイクルの期待時間は

$$\begin{aligned}
T(t_0) = & s + \tau + 1/\mu \\
& + \int_0^\infty E[\gamma_{s+\tau+x}]dG(x) \\
& + E[N]\left\{\tau + 1/\mu\right. \\
& \left.+ \int_0^\infty E[\gamma_{\tau+x}]dG(x)\right\} \quad (6)
\end{aligned}$$

となる。

同様にして、期間 $T_{\text{act}}(t_0)$ に生じる総期待消費電力を $C_{\text{act}}(t_0)$ 、1 サイクル中に生じる総期待消費電力を $C(t_0)$ とすれば、

$$\begin{aligned}
C(t_0) = & \int_0^\infty \int_0^{t_0} \left\{ P_2 s + P_1(\tau + t + x) \right. \\
& \left. + C_{\text{act}}(t_0) \right\} dH(x | s + \tau + t) \\
& \times dG(t) + \int_0^\infty \int_{t_0}^\infty \left\{ P_2 s + P_1(\tau \right. \\
& \left. + t + t_0) \right\} dH(x | s + \tau + t) dG(t), \quad (7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{\text{act}}(t_0) = & \int_0^\infty \int_0^{t_0} \left\{ P_1(\tau + t + x) \right. \\
& \left. + C_{\text{act}}(t_0) \right\} dH(x | \tau + t) dG(t) \\
& + \int_0^\infty \int_{t_0}^\infty \left\{ P_1(\tau + t + t_0) \right\} \\
& \times dH(x | \tau + t) dG(t) \quad (8)
\end{aligned}$$

を得る。よって、1 サイクル中に生じる総期待消費電力は

$$\begin{aligned}
C(t_0) = & P_2 s + P_1(\tau + 1/\mu) \\
& + P_1 \int_0^\infty E[\gamma_{s+\tau+x} \wedge t_0] dG(x) \\
& + E[N]\left\{ P_1(\tau + 1/\mu) \right. \\
& \left. + P_1 \int_0^\infty E[\gamma_{\tau+x} \wedge t_0] dG(x) \right\} \quad (9)
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
E[\gamma_t \wedge t_0] &= E[\min(\gamma_t, t_0)] \\
&= \int_0^{t_0} u dH(u | t) + t_0 \bar{H}(t_0 | t) \quad (10)
\end{aligned}$$

である。

ゆえに、定常状態における単位時間あたりの期待消費電力 $V(t_0)$ は、よく知られた再生定理¹¹⁾を用いて、

$$\begin{aligned}
V(t_0) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[(0, t] \text{ における総消費電力}]}{t} \\
&= C(t_0)/T(t_0) \quad (11)
\end{aligned}$$

となる。これより、問題は

$$\min_{0 \leq t_0 < \infty} V(t_0) \quad (12)$$

によって定式化される。次章では特別な場合として、アクセス要求の発生回数が同次ポアソン過程に従う場合について解析を行う。

4. ポアソン到着の場合

ここでは再生過程の特別な場合として、アクセス要求の発生回数がパラメータ λ (> 0) のポアソン過程に従う場合を考える。すなわち、

$$F(t) = 1 - \exp(-\lambda t). \quad (13)$$

ポアソン過程に対応する再生関数は $M(t) = \lambda t$ であるので、残存寿命分布 $H(x | t)$ もまたパラメータ λ (> 0) の指数分布となり、残存寿命の期待値はそれぞれ $E[\gamma_t] = 1/\lambda$ および $E[\gamma_t \wedge t_0] = \{1 - \exp(-\lambda t_0)\}/\lambda$ となる。式 (13) を式 (6) に代入することによって、1 サイクルの期待時間は

$$T_{\text{poi}}(t_0) = \exp(\lambda t_0) \left\{ \tau + 1/\mu + 1/\lambda \right\} + s \quad (14)$$

となり、式 (13) を式 (9) に代入することによって、1 サイクル中に生じる総期待消費電力は

$$\begin{aligned}
C_{\text{poi}}(t_0) = & P_1 \exp(\lambda t_0) \left\{ \tau + 1/\mu \right. \\
& \left. + \frac{1 - \exp(-\lambda t_0)}{\lambda} \right\} + P_2 s \quad (15)
\end{aligned}$$

となる。したがって、ポアソン到着の場合の定常状態における単位時間あたりの期待消費電力は

$$V_{\text{poi}}(t_0) = C_{\text{poi}}(t_0)/T_{\text{poi}}(t_0) \quad (16)$$

となる。

定常状態における単位時間あたりの期待消費電力 $V_{\text{poi}}(t_0)$ を最小にする最適スリープ時間 t_0^* に関して以下の結果を得る。

定理 4.1: $P_2/P_1 < 1 + 1/(\lambda s)$ ならば、定常状態における単位時間あたりの期待消費電力 $V_{\text{poi}}(t_0)$ を最小にする最適スリープ時間は $t_0^* = 0$ 、すなわちアクセスの処理が完了したと同時にスリープモードに入ることが最適となり、そのときの最小期待消費電力は

$$V_{\text{poi}}(0) = \frac{P_1(\tau + 1/\mu) + P_2 s}{\tau + 1/\mu + 1/\lambda + s} \quad (17)$$

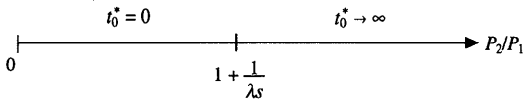


図3 ポアソン到着の場合に対する最適スリープ戦略

Fig. 3 Optimal sleeping strategy for the Poisson arrival case.

となる。逆に $P_2/P_1 \geq 1 + 1/(\lambda s)$ ならば $t_0^* \rightarrow \infty$, すなわちまったくスリープモードに入らないことが最適となり, そのときの最小期待消費電力は

$$V_{\text{poi}}(\infty) = P_1 \quad (18)$$

となる。

定理 4.1 の証明は付録に与えられる。上述の結果より, コンピュータへのアクセス要求の発生頻度が時間に関して一定である場合, トランザクションの処理終了後ただちにスリープモードに移行するか, まったくスリープを行わないことが最適となる。図 3 は, ポアソン到着の場合の最適スリープ時間とパラメータ比 P_2/P_1 の関係を示したものである。この図より, スリープ時間の設定は電力比 P_2/P_1 の大きさによって単純に 2 種類に分類され, 一定のアクセス要求発生頻度が期待できるシステムに対しては, スリープ機能の設定は電力比, アクセス準備時間, アクセスの到着率だけに従属することが分かる。

5. 近似モデル

一般の再生過程に対して残存寿命分布 $H(x|t)$ を求めるためには, 再生関数 $M(t)$ を特定する必要がある。しかしながら, 再生関数を解析的に求めることはつねに容易であるとは限らないことに注意しなければならない。そこで, 残存寿命分布 $H(x|t)$ の近似表現を用いることにより, 定常状態における単位時間あたりの期待消費電力を近似することを考える。ここでは, 以下の 2 つの近似手法を提案する。

5.1 均衡分布による近似 (近似 1)

残存寿命分布 $H(x|t)$ に対して, $F(t)$ の均衡分布を用いた近似を適用する。すなわち,

$$\begin{aligned} H(x|t) &\approx H_{\text{APP1}}(x) \\ &= \lambda \int_0^x \bar{F}(u) du. \end{aligned} \quad (19)$$

式 (19) によって与えられる近似は, 定常状態において残存寿命分布が均衡分布に一致するという性質から得られたものである⁹⁾。つまり,

$$\begin{aligned} H_{\text{APP1}}(x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr\{\gamma_t \leq x\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} H(x|t) \end{aligned} \quad (20)$$

という関係が成立している。これより, ただちに

$$\begin{aligned} E[\gamma_t] &\approx E[\gamma_{\text{APP1}}] \\ &= (\lambda^2 \sigma_a^2 + 1)/(2\lambda), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} E[\gamma_t \wedge t_0] &\approx E[\gamma_{\text{APP1}} \wedge t_0] \\ &= \lambda \int_0^{t_0} \int_x^\infty \bar{F}(u) du dx \end{aligned} \quad (22)$$

を得る。関数 $H_{\text{APP1}}(x)$ が t に依存しないことに注意して, 式 (6) の 1 サイクルの期待時間と式 (9) の 1 サイクルにおける総期待消費電力は, 式 (21) と (22) から,

$$\begin{aligned} T(t_0) &\approx T_{\text{APP1}}(t_0) \\ &= \frac{1}{\bar{H}_{\text{APP1}}(t_0)} \left\{ \tau + 1/\mu \right. \\ &\quad \left. + E[\gamma_{\text{APP1}}] \right\} + s, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} C(t_0) &\approx C_{\text{APP1}}(t_0) \\ &= \frac{P_1}{\bar{H}_{\text{APP1}}(t_0)} \left\{ \tau + 1/\mu \right. \\ &\quad \left. + E[\gamma_{\text{APP1}} \wedge t_0] \right\} + P_2 s \end{aligned} \quad (24)$$

となる。よって, 定常状態における単位時間あたりの期待消費電力に対して,

$$\begin{aligned} V(t_0) &\approx V_{\text{APP1}}(t_0) \\ &= C_{\text{APP1}}(t_0)/T_{\text{APP1}}(t_0) \end{aligned} \quad (25)$$

のような近似表現を得ることができる。式 (25) で与えられる期待消費電力の近似に対して, 次のような非線形関数を定義する。

$$\begin{aligned} q_{\text{APP1}}(t_0) &\equiv \left\{ P_1 - P_2 r_{\text{APP1}}(t_0) \right\} \bar{H}_{\text{APP1}}(t_0) \\ &\quad \times T_{\text{APP1}}(t_0) + r_{\text{APP1}}(t_0) s \\ &\quad \times \bar{H}_{\text{APP1}}(t_0) C_{\text{APP1}}(t_0). \end{aligned} \quad (26)$$

ここで,

$$r_{\text{APP1}}(t) \equiv \frac{\bar{F}(t)}{\int_t^\infty \bar{F}(u) du} \quad (27)$$

は確率分布関数 $H_{\text{APP1}}(t)$ のハザード率である。

以上より, 近似期待消費電力 $V_{\text{APP1}}(t_0)$ を最小にする最適スリープ時間 t_0^* に関する次の結果が得られる。

定理 5.1 (近似 1): 仮定 $P_2 > V_{\text{APP1}}(t_0)$ の下で,

(1) アクセス要求時間間隔の確率分布関数 $F(t)$ が狭義 DHR (Decreasing Hazard Rate) とする。

(i) $q_{\text{APP1}}(0) < 0$ かつ $q_{\text{APP1}}(\infty) > 0$ ならば, 定常状態における単位時間あたりの期待消費

電力を最小にする有限で唯一の最適スリープ時間の近似値 $t_0^* \in (0, \infty)$ が存在し、非線形方程式 $q_{APP1}(t_0^*) = 0$ を満足する。そのときの最小期待消費電力は、

$$V_{APP1}(t_0^*) = P_2 - \frac{P_1}{s} \int_{t_0^*}^{\infty} \frac{\bar{F}(u)}{\bar{F}(t_0^*)} du \quad (28)$$

となる。

- (ii) $q_{APP1}(0) \geq 0$ ならば最適スリープ時間の近似値は $t_0^* = 0$ となり、最小期待消費電力は

$$V_{APP1}(0) = \frac{P_1(\tau + 1/\mu) + P_2 s}{\tau + 1/\mu + E[\gamma_{APP1}] + s} \quad (29)$$

となる。

- (iii) $q_{APP1}(\infty) \leq 0$ ならば最適スリープ時間の近似値は $t_0^* \rightarrow \infty$ となり、最小期待消費電力は

$$V_{APP1}(\infty) = P_1 \quad (30)$$

となる。

- (2) アクセス要求時間間隔の確率分布関数 $F(t)$ が IHR (Increasing Hazard Rate) とする。このとき、

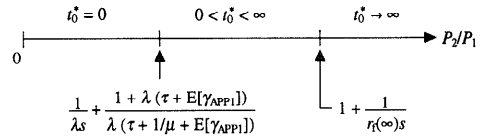
- (i) $P_2/P_1 < 1 + E[\gamma_{APP1}]/s$ ならば $t_0^* = 0$ となる。
(ii) $P_2/P_1 \geq 1 + E[\gamma_{APP1}]/s$ ならば $t_0^* \rightarrow \infty$ となる。

証明は定理 4.1 と同様であるので省略する。定理 5.1 の仮定 $P_2 > V_{APP1}(t_0)$ は、定常状態においてシステムが確率 1 で起動状態にあることはありえないことを示唆している。もし逆の不等号が成立するならば、定常状態においてシステムはつねに最大電力以上の電力を消費することになり、これは明らかにモデルの設定に矛盾する。また、アクセス要求発生時間間隔分布が DHR ならば、アクセス要求の頻度が時間とともに減少することを意味している。図 4 は定理 5.1 の内容を整理したものである。ここで、図中の $r_f(t)$ はアクセス要求時間分布 $F(t)$ のハザード率である。この図から、スリープ時間の設定はポアソン到着の場合よりも複雑になり、IHR 特性を持つ場合には電力比、起動時間、アクセス準備時間、アクセス要求時間間隔のモーメントとそのハザード率などが最適な自動スリープ機能の設定に必要となる。

5.2 指数分布による近似 (近似 2)

次に、残存寿命分布を指数分布により近似すること

(I) DHR case



(II) IHR case

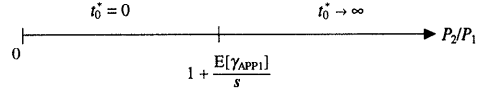


図 4 近似 1 に基づいた最適スリープ戦略

Fig. 4 Optimal sleeping strategy based on approximation 1.

を考える。すなわち、

$$\begin{aligned} H(x|t) &\approx H_{APP2}(x) \\ &= 1 - \frac{\int_0^{\infty} \exp(-\mu u) \bar{F}(x+u) du}{\int_0^{\infty} \exp(-\mu u) \bar{F}(u) du}. \end{aligned} \quad (31)$$

近似 2 は処理時間分布に指数分布を仮定し、 $X > S$ の条件の下で $X - S$ を残存寿命として近似している。

式 (31) の近似を適用することにより、

$$\begin{aligned} E[\gamma_t] &\approx E[\gamma_{APP2}] \\ &= \frac{1}{\lambda \mu \int_0^{\infty} \exp(-\mu u) \bar{F}(u) du} - \frac{1}{\mu}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} E[\gamma_t \wedge t_0] &\approx E[\gamma_{APP2} \wedge t_0] \\ &= \int_0^{t_0} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-\mu u) \bar{F}(x+u) du dx}{\int_0^{\infty} \exp(-\mu u) \bar{F}(u) du} \end{aligned} \quad (33)$$

を得る。関数 $H_{APP2}(x)$ が t に依存しないことに注意して、1 サイクルの期待時間と 1 サイクルの総期待消費電力は、それぞれ

$$\begin{aligned} T(t_0) &\approx T_{APP2}(t_0) \\ &= \frac{1}{\bar{H}_{APP2}(t_0)} \left\{ \tau + 1/\mu \right. \\ &\quad \left. + E[\gamma_{APP2}] \right\} + s, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} C(t_0) &\approx C_{APP2}(t_0) \\ &= \frac{P_1}{\bar{H}_{APP2}(t_0)} \left\{ \tau + 1/\mu \right. \\ &\quad \left. + E[\gamma_{APP2} \wedge t_0] \right\} + P_2 s \end{aligned} \quad (35)$$

のように近似できる。よって、定常状態における単位時間あたりの期待消費電力は

$$\begin{aligned} V(t_0) &\approx V_{APP2}(t_0) \\ &= C_{APP2}(t_0)/T_{APP2}(t_0) \end{aligned} \quad (36)$$

となる。式 (36) で与えられる定常状態における単位時間あたりの期待消費電力の近似表現に対して、非線形関数

$$\begin{aligned} q_{APP2}(t_0) \equiv & \left\{ P_1 - P_2 r_{APP2}(t_0) s \right\} \\ & \times \bar{H}_{APP2}(t_0) T_{APP2}(t_0) \\ & + r_{APP2}(t_0) s \bar{H}_{APP2}(t_0) C_{APP2}(t_0) \end{aligned} \quad (37)$$

を定義する。ここで、 $r_{APP2}(t)$ は確率分布 $H_{APP2}(t)$ のハザード率であり、

$$r_{APP2}(t) \equiv \frac{\exp(-\mu t) \bar{F}(t)}{\int_t^\infty \exp(-\mu u) \bar{F}(u) du} - \mu \quad (38)$$

である。

以上より、近似期待消費電力 $V_{APP2}(t_0)$ を最小にする最適スリープ時間 t_0^* に関する次の定理が得られる。

定理 5.2 (近似 2)： 仮定 $P_2 > V_{APP2}(t_0)$ の下で、

(1) アクセス要求時間間隔の確率分布関数 $F(t)$ が狭義 DHR とする。

(i) $q_{APP2}(0) < 0$ かつ $q_{APP2}(\infty) > 0$ ならば、定常状態における単位時間あたりの期待消費電力を最小にする有限で唯一の最適スリープ時間の近似値 $t_0^* \in (0, \infty)$ が存在し、非線形方程式 $q_{APP2}(t_0^*) = 0$ を満足する。そのときの最小期待消費電力は

$$V_{APP2}(t_0^*) = P_2 - \frac{P_1}{r_{APP2}(t_0^*)s} \quad (39)$$

となる。

(ii) $q_{APP2}(0) \geq 0$ ならば最適スリープ時間の近似値は $t_0^* = 0$ となり、最小期待消費電力は

$$V_{APP2}(0) = \frac{P_1(\tau + 1/\mu) + P_2s}{\tau + 1/\mu + E[\gamma_{APP2}] + s} \quad (40)$$

となる。

(iii) $q_{APP2}(\infty) \leq 0$ ならば最適スリープ時間の近似値は $t_0^* \rightarrow \infty$ となり、最小期待消費電力は

$$V_{APP2}(\infty) = P_1 \quad (41)$$

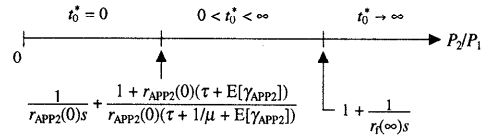
となる。

(2) アクセス要求時間間隔の確率分布関数 $F(t)$ が IHR とする。このとき、

(i) $P_2/P_1 < 1 + E[\gamma_{APP2}]/s$ ならば $t_0^* = 0$ となる。

(ii) $P_2/P_1 \geq 1 + E[\gamma_{APP2}]/s$ ならば $t_0^* \rightarrow \infty$ となる。

(I) DHR case



(II) IHR case

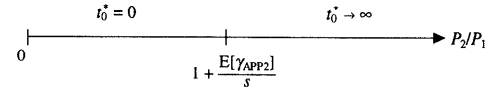


図 5 近似 2 に基づいた最適スリープ戦略

Fig. 5 Optimal sleeping strategy based on approximation 2.

同様に証明は省略する。図 5 は定理 5.2 の内容を図示したものである。ここで興味深いことは、有限で非零の最適スリープ時間が存在するための条件が定理 5.1 と 5.2 ではかなり似通っている点である。これは、式 (31) において、 $\mu \rightarrow 0$ かつ X が有限の場合を想定すれば式 (19) が導出できることに起因している。

6. 数 値 例

6.1 近似モデルの評価

ここでは、アクセス要求発生時間間隔分布に既知の理論分布を仮定することによって、厳密に最適スリープ時間とそれに対応する評価関数の値を求め、提案された近似解の精度を比較する。アクセス時間を連続時間マルコフ連鎖においてある状態に吸収されるまでの時間と見なすことにより、次のような位相型分布 (phase-type distribution) を仮定する。

$$F(t) = 1 - \alpha \exp(Tt)e. \quad (42)$$

ここで、 α は $\xi (> 0)$ の長さを持つ確率ベクトル、 e はすべての要素が 1 である長さ ξ の列ベクトル、 T は対角要素は負で非対角要素は正であるような $\xi \times \xi$ 行列であり、 Te の各要素は非正であるとする。また、 $F(t)$ に位相型分布を仮定すること自体が再生関数の良好な近似を与えるという事実に注目すべきである¹²⁾。

上述の位相型分布を適用すると、式 (1) の残存寿命分布は以下のように求められる。

$$H(x|t) = 1 - \alpha \exp(Q^*t) \exp(Tx)e. \quad (43)$$

ここで、 $Q^* = T - Te\alpha$ である。また、アクセス処理時間分布にはパラメータ $\mu (> 0)$ の指数分布

$$G(t) = 1 - \exp(-\mu t). \quad (44)$$

を仮定する。 $\xi = 2$ の場合において、確率分布のパラメータを以下のように設定する。

表 1 近似方法の比較
Table 1 Comparison of approximation methods.

λ	exact		approximation 1			approximation 2		
	t_0^*	$V(t_0^*)$	t_0^*	$V_{APP1}(t_0^*)$	error (%)	t_0^*	$V_{APP2}(t_0^*)$	error (%)
0.1	0.000	0.337	0.000	0.221	-34.241	0.000	0.359	6.518
0.2	0.000	0.538	0.000	0.400	-25.587	0.000	0.588	9.357
0.3	0.230	0.678	0.000	0.547	-19.369	1.523	0.718	5.787
0.4	1.231	0.766	0.362	0.667	-12.891	1.859	0.790	3.141
0.5	1.510	0.826	0.777	0.756	-8.457	1.923	0.843	2.030
0.6	1.626	0.873	1.016	0.825	-5.533	1.926	0.885	1.346
0.7	1.704	0.911	1.188	0.879	-3.522	1.933	0.919	0.865
0.8	1.792	0.943	1.347	0.923	-2.098	1.969	0.948	0.511
0.9	1.934	0.969	1.546	0.959	-1.072	2.084	0.972	0.249

($\mu = 1.0$, $\tau = 0.05$, $s = 1.2$, $P_1 = 1.0$, $P_2 = 3.0$)

$$T = \lambda \begin{bmatrix} -2.22 & 0.44 \\ 0.22 & -0.44 \end{bmatrix}, \quad \alpha = (1.0, 0.0),$$

$$\mu = 1.0, \quad \lambda = 0.1, 0.2, \dots, 0.9.$$

また、モデルパラメータを $\tau = 0.05$, $P_1 = 1.0$, $P_2 = 3.0$, $s = 1.2$ とし、アクセス要求発生時間間隔のパラメータ λ を変化させた場合の最適スリープ時間とその場合の最小期待消費電力を数値的に求める。近似精度の評価には、次のような相対誤差を用いる。

$$\frac{(\text{近似値}) - (\text{実際値})}{(\text{実際値})} \times 100 (\%).$$

図 6 は、スリープ時間 t_0 に対する定常状態における単位時間あたりの期待消費電力の振舞いを図示している。これより、近似 1 と近似 2 に基づいて算出された総期待消費電力はそれぞれ実際の値よりも低めあるいは高めに見積もられることが分かる。すなわち、アクセス要求時間間隔分布に位相型分布を仮定した場合、 $V_{APP1}(t_0)$ と $V_{APP2}(t_0)$ は関数 $V(t_0)$ の下界と上界をそれぞれ形成しており、楽観的な意思決定を行う場合には近似 2 を、悲観的な意思決定を行う場合には近似 1 をそれぞれ代替的に適用することができる。表 1 は、最小期待消費電力の近似精度を相対誤差の観点から比較したものである。これより、実際に生じるであろう総期待消費電力を求めるためには近似 2 を用いた方が良いことが分かる。この結果は、他のモデルパラメータを用いた数値計算においても同様に確認されている。近似 1 ではアクセス要求時間間隔分布として均衡分布を仮定しており、アクセス要求時間間隔分布のモーメントの情報だけで構成された近似であるといえる。一方、近似 2 はアクセス要求時間の分布に関する情報に加えて、アクセス処理時間分布のパラメータ μ の情報も考慮していることが特徴としてあげられる。一般に、残存寿命分布の近似に上記のいずれの方法が適しているかを結論づけることは容易ではないが、本

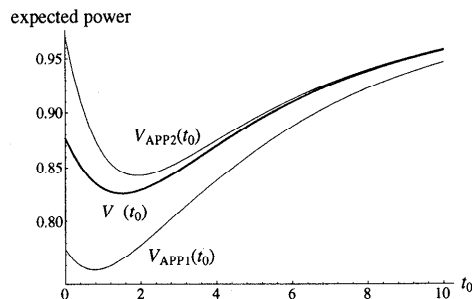


図 6 定常状態における単位時間あたりの期待消費電力の振舞い ($\lambda = 0.5$, $\mu = 1.0$, $\tau = 0.05$, $s = 1.2$, $P_1 = 1.0$, $P_2 = 3.0$)
Fig. 6 Behaviour of expected power consumed per unit time in the steady-state.

論文で扱っている確率モデルに対しては平均的に近似 2 が有効であることが分かる。

次に、トラフィック強度 λ/μ の値が変化したときの最適スリープ時間の比較結果を図 7 に示す。この図から、トラフィック強度の値が比較的大きい場合、最適スリープ時間に対する近似の精度に関しても、近似 1 より近似 2 の方が良いことが分かる。しかしながら、トラフィック強度の値が 0.3 以下になると、近似 2 による誤差が極端に増大する傾向が読み取れる。アクセス要求時間間隔の平均が増加すると必然的に最適スリープ時間が減少するので、最適スリープ時間の近似値に対する誤差はスリープ時間が小さな値をとるときの近似精度に依存すると考えられる。たとえば、図 6 のスリープ時間が小さい領域において、近似 1 と近似 2 の両方とも $V(t_0)$ の形状を正確にとらえることができていないことに注意されたい。このことは、アクセス要求時間間隔の平均が増加するにつれて、もしくはアクセス処理時間の平均が減少するにつれて顕著になる傾向がある。また、図 7 において求められた誤差が相対的に大きい場合、近似手法の有効性が懸念されるかもしれない。そこで、近似的に導出された最適スリー

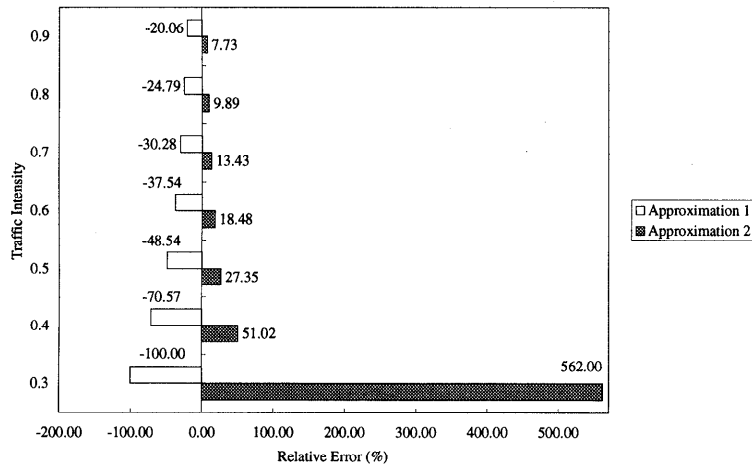


図7 期待消費電力の相対誤差におけるトラフィック強度の従属性
 $(\mu = 1.0, \tau = 0.05, s = 1.2, P_1 = 1.0, P_2 = 3.0)$

Fig. 7 Dependence of traffic intensity in relative error of expected power consumed.

表2 定常状態における単位時間あたりの期待消費電力に関する相対誤差の評価

Table 2 Evaluation of relative error on expected power consumed per unit time in the steady state.

λ	approximation 1			approximation 2		
	t_{APP1}^*	$V(t_{APP1}^*)$	error (%)	t_{APP2}^*	$V(t_{APP2}^*)$	error (%)
0.1	0.000	0.337	0.000	0.000	0.337	0.000
0.2	0.000	0.538	0.000	0.000	0.538	0.000
0.3	0.000	0.679	0.052	1.523	0.689	1.540
0.4	0.362	0.777	1.365	1.859	0.770	0.547
0.5	0.777	0.836	1.238	1.923	0.828	0.279
0.6	1.016	0.881	0.929	1.926	0.874	0.155
0.7	1.188	0.917	0.633	1.933	0.912	0.086
0.8	1.347	0.947	0.394	1.969	0.943	0.043
0.9	1.546	0.971	0.209	2.084	0.969	0.020

$(\mu = 1.0, \tau = 0.05, s = 1.2, P_1 = 1.0, P_2 = 3.0)$

ブ時間を総期待消費電力 $V(t_0)$ に代入した結果を表2に示す。表の結果から、最適スリープ時間の誤差による影響は、近似1で1.3%程度、近似2では最大でも1.5%程度であり、いずれの近似方法を用いても現実的に有効な省電力化を実現できるものと考えられる。

6.2 実データの解析

ここでは、実際の観測データに基づいた最適スリープ機能の設計事例について報告する。著者らの所属する広島大学工学部第二類計数工学教育科目に設置してある3台のワークステーションに対して、アクセス要求時間間隔と使用時間のデータを収集した。データの収集期間は3ヵ月であり、観測データ数はそれぞれ、アクセス要求時間間隔データ247個、使用時間データ226個である。

まず最初に、得られたデータの年齢特性を調べるた

めに総試験時間プロット (total time on test plot, 以下 TTT プロット)^{13),14)} と呼ばれる確率打点法を適用する。TTT プロットとは、確率分布関数の年齢特性をノンパラメトリックに調べる手法である。いま、絶対連続で未知の確率分布関数 $F(\cdot)$ の標本である n 個の順序統計量 $0 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ が得られているものとすれば、この標本に基づいた TTT 統計量は

$$T_i \equiv \sum_{j=1}^i (n-j+1)(x_j - x_{j-1}),$$

$$i = 1, 2, \dots, n; T_0 = 0$$

のように定義され、さらに、標準 TTT 統計量は

$$u_i \equiv \frac{T_i}{T_n}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

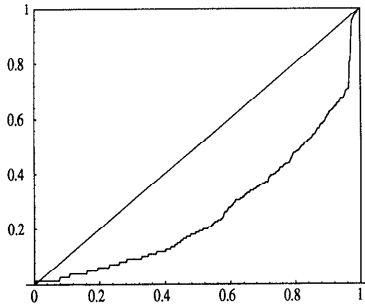


図8 到着時間データに対する標準 TTT プロット
Fig. 8 Scaled TTT-plot for the arrival time data.

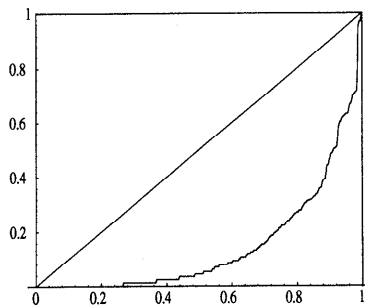


図9 処理時間データに対する標準 TTT プロット
Fig. 9 Scaled TTT-plot for the processing time data.

となる。 (x, y) 二次元平面上に $(i/n, u_i) \in [0, 1] \times [0, 1]$ を打点し、それらを線分で区分的につなげることににより標準 TTT プロットを得る。標準 TTT プロットの形状が対角線 $y = x$ よりも下の領域で凸であれば、標本の母集団に対する分布関数は DHR であり、逆に上に凸であれば IHR であると判定する。アクセス要求時間間隔データとアクセス処理時間データの標準 TTT プロットをそれぞれ図 8 と図 9 に示す。これより、アクセス要求時間間隔分布とアクセス処理時間分布はともに DHR 特性を持つことが分かる。

次に、DHR 特性を持つ確率分布として次のようなガンマ分布とワイブル分布を仮定する。

ガンマ分布：

$$F(x) = \int_0^x \frac{(t/\beta)^{m-1}}{\beta \Gamma(m)} \exp\{-t/\beta\} dt,$$

ワイブル分布：

$$F(x) = 1 - \exp\{-(x/\beta)^m\}.$$

ここで、 $\beta (> 0)$ と $m (> 0)$ は、それぞれの分布に対する尺度パラメータと形状パラメータであり、もし確率分布関数が DHR (IHR) 特性を持つならば $m < (>) 1$ となる。また、 $\Gamma(\cdot)$ は標準ガンマ関数を表す。最尤法により、アクセス要求時間間隔分布とアクセス処理時間分布のパラメータを推定した結果、次のようになった。アクセス要求時間間隔分布としてのガンマ分布：

表 3 事例研究における最適スリープ戦略の推定

Table 3 Estimation of optimal sleeping strategy in the empirical study.

s	approximation 1		approximation 2	
	t_{APP1}^*	$V_{APP1}(t_{APP1}^*)$	t_{APP2}^*	$V_{APP2}(t_{APP2}^*)$
1.0	0.000	0.353	0.000	0.423
2.0	0.000	0.405	0.000	0.485
3.0	0.000	0.457	0.000	0.546
4.0	0.000	0.507	0.000	0.606
5.0	0.000	0.558	0.626	0.665
6.0	0.000	0.607	4.405	0.721
7.0	0.000	0.657	11.246	0.771
8.0	1.918	0.705	21.139	0.816
9.0	7.305	0.751	34.163	0.853
10.0	15.916	0.792	50.442	0.885

($m_a = 0.618$, $\beta_a = 45.781$, $m_s = 0.149$, $\beta_s = 370.263$, $\tau = 0.0$, $P_1 = 1.0$, $P_2 = 10.0$)

$m_a = 0.493$, $\beta_a = 147.832$

アクセス処理時間分布としてのガンマ分布：

$m_s = 0.149$, $\beta_s = 370.263$

アクセス要求時間間隔分布としてのワイブル分布：

$m_a = 0.618$, $\beta_a = 45.781$

アクセス処理時間分布としてのアクセス処理時間分布：

$m_s = 0.229$, $\beta_s = 5.586$

推定された分布関数の適合性を調べるため、 χ^2 適合度検定を行う (たとえば文献 15) を参照)。 χ^2 適合度検定によって標本が確率分布 $F(\cdot)$ から採取されたという帰無仮説を上側 5% 有意水準で検定した結果、アクセス要求時間間隔にはワイブル分布、アクセス処理時間にはガンマ分布が適合していることが分かった。これより、アクセス要求時間間隔分布としてパラメータ $m_a = 0.618$ と $\beta_a = 45.781$ のワイブル分布を、アクセス処理時間分布としてパラメータ $m_s = 0.149$ と $\beta_s = 370.263$ のガンマ分布をそれぞれ仮定する。これより、アクセス要求時間間隔の平均と分散は、それぞれ $\beta_a \Gamma(1 + 1/m_a) = 66.3517$ (分)、 $\beta_a^2 [\Gamma(1 + 2/m_a) - \{\Gamma(1 + 1/m_a)\}^2] = 12.6491 \times 10^3$ となり、アクセス処理時間間隔の平均と分散は、それぞれ $m_s \beta_s = 55.1692$ (分)、 $m_s \beta_s^2 = 20.4271 \times 10^3$ となる。

これより、最適スリープ時間を数値的に求めることにより、実際のコンピュータシステムにおける省電力機能を定量的に評価する。使用されるモデルパラメータは以下のように設定した。

$$\begin{aligned} s &= 1, 2, \dots, 10, & \tau &= 0.0, \\ P_1 &= 1.0, & P_2 &= 10.0. \end{aligned}$$

4 章と 5 章において明らかにされたように、最適ス

リープ時間は電力比 P_2/P_1 に依存するため、ここでは簡単のため $P_1 = 1.0$ と設定した。表 3 は、パラメータ s の変化に対する最適スリープ時間の近似値および最小期待消費電力の近似値の従属性を調べたものである。たとえば $s = 1.0$ のとき、各近似に基づいた最小期待消費電力は約 0.4 ワットとなるが、スリープ機能を持たないコンピュータの単位時間あたりの期待消費電力 ($t_0^* \rightarrow \infty$ の場合) が約 1 ワットになることを考慮すれば、通常に消費する総電力の約 50% 程の節電効果があり、本論文で議論した手法の有効性を確認することができる。

7. 結 論

本論文では、アクセス要求をキャンセルすることができるようなシステムに対して、定常状態における単位時間あたりの期待消費電力を定式化し、それを最小にするような最適自動スリープ時間を求める手続きを提案した。アクセス要求が同次ポアソン過程に従う場合、最適スリープ時間は 0 が無限大となり、コンピュータのアイドル状態を検出するとただちにスリープモードに移行するか、もしくはまったくスリープモードに移行しないことが最適となる。また、アクセス要求の時間間隔が一般分布に従う場合に対して 2 種類の近似解法を提案した。いずれの解法も実利用上有効であり、観測データに基づいた実証研究においても自動スリープ機能は省電力の観点から有効であることを示した。

本論文で議論した自動スリープ機能の設定方法は期待消費電力の最小化のみを念頭においており、ユーザの操作性などの要因はまったく考慮されていない。この問題は、コンピュータのアイドル状態に引き続き、ユーザがあらかじめ設定する予備稼働時間をモデルに組み入れることにより、容易に解決することが可能である。また、本論文では 1 台のコンピュータを複数のユーザで共有するマルチユースを想定し、処理中に到着したアクセス要求は自動的にキャンセルされるシステムについて考察を行ったが、他の様々な使用形態を想定することにより、各種コンピュータシステムの省電力性を定量的に評価するためのモデル化が可能である。たとえば、アクセス要求がバッファ内で待ち行列を形成するモデルが考えられるが、それらは本論文の続編において詳細に議論されるであろう。

謝辞 本研究の一部は文部省科学研究費奨励研究 (A) Grant No.09780411 および文部省科学研究費基盤研究 (C) Grant No.09898007 の助成の下で行われたものである。

参 考 文 献

- 1) 下遠野享: ノートブック PC のパワーマネージメント, 情報処理, Vol.38, No.2, pp.135-142 (1997).
- 2) 相原 達, 関家一雄, 黒田昭裕: ノートブック PC におけるローパワーシステム技術, 電子情報通信学会誌, Vol.80, No.4, pp.370-376 (1997).
- 3) 平越裕之, 三道弘明: ノートパソコンにおけるハードディスクの省電力方策に関する考察, オペレーションズ・リサーチ, Vol.39, No.3, pp.164-168 (1994).
- 4) Sandoh, H., Hirakoshi, H. and Kawai, H.: An Optimal Time to Sleep for An Auto-Sleep System, *Computers & Ops. Res.*, Vol.23, No.3, pp.221-227 (1996).
- 5) Sandoh, H. and Hirakoshi, H.: An Optimal Time to Sleep for An Auto-Sleep System Considering Two Usage States, *Proc. 2nd Australia-Japan Workshop on Stochastic Models in Engineering, Technology and Management*, Wilson, R.J., Murthy, D.N.P. and Osaki, S. (Eds.), pp.206-215, Technology Management Centre, The University of Queensland (1996), (forthcoming in *Mathematical and Computer Modelling*).
- 6) 土肥 正, 海生直人, 尾崎俊治: ノート型パーソナルコンピュータの省電力方策に対するノンパラメトリックアプローチ, 電子情報通信学会論文誌, Vol.J78-A, No.9, pp.1157-1165 (1995).
- 7) 岡村寛之, 土肥 正, 尾崎俊治: コンピュータシステムの自動スリープ機能に対する確率モデル, 電子情報通信学会技術研究報告, Vol.96, No.423, pp.7-12 (1996).
- 8) 岡村寛之, 土肥 正, 尾崎俊治: コンピュータシステムの自動スリープ機能における省電力効果, 情報処理学会研究報告, Vol.97, No.11, pp.49-56 (1997).
- 9) Cox, D.R.: *Renewal Theory*, John Wiley & Sons, London (1962).
- 10) Tijms, H.C.: *Stochastic Models: An Algorithmic Approach*, John Wiley & Sons, New York (1994).
- 11) Ross, S.M.: *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Holden-Day, San Francisco (1970).
- 12) Neuts, M.F.: Computation and Applications of Geometric Mixtures of Convolutions, *Naval Research Logistics*, Vol.35, pp.529-53 (1988).
- 13) Barlow, R.E. and Campo, R.: Total Time on Test Procedures and Applications to Failure Data Analysis, *Reliability and Fault Tree Analysis*, Barlow, R.E., Fussell, J. and Singpurwalla, N.D. (Eds.), pp.451-481, SIAM, Philadelphia (1975).

- 14) Dohi, T., Aoki, T., Kaio, N. and Osaki, S.: Performance Evaluation of Nonparametric Age Replacement Methods - Survey and Comparison, *Stochastic Modelling in Innovative Manufacturing*, Christer, A.H., Osaki, S. and Thomas, L.C. (Eds.), Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol.445, pp.165-187, Springer-Verlag, Berlin (1997).
- 15) Guttman, I. and Wilks, S.S.: *Introductory Engineering Statistics*, John Wiley & Sons, New York (1965).

付 録

定理 4.1 の証明： 以下のような記号を定義する.

$$AT_{\text{poi}}(t_0) \equiv \exp(-\lambda t_0) T_{\text{poi}}(t_0), \quad (45)$$

$$AC_{\text{poi}}(t_0) \equiv \exp(-\lambda t_0) C_{\text{poi}}(t_0). \quad (46)$$

式 (14) と (15) を用いて, 定常状態における単位時間あたりの期待消費電力 $V_{\text{poi}}(t_0)$ は

$$\begin{aligned} V_{\text{poi}}(t_0) &= C_{\text{poi}}(t_0)/T_{\text{poi}}(t_0) \\ &= AC_{\text{poi}}(t_0)/AT_{\text{poi}}(t_0) \end{aligned} \quad (47)$$

によって表現される. さらに, 関数 $V_{\text{poi}}(t_0)$ の 1 階導関数を求めると,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_0} V_{\text{poi}}(t_0) &= \frac{1}{AT_{\text{poi}}(t_0)^2} \left\{ (P_1 - P_2 \lambda s) \right. \\ &\quad \times e^{-\lambda t_0} AT_{\text{poi}}(t_0) + \lambda s e^{-\lambda t_0} \\ &\quad \times AC_{\text{poi}}(t_0) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (48)$$

ここで, 次のような非線形関数 $q_{\text{poi}}(t_0)$ を定義する.

$$\begin{aligned} q_{\text{poi}}(t_0) &\equiv \frac{AT_{\text{poi}}(t_0)^2}{e^{-\lambda t_0}} \frac{d}{dt_0} V_{\text{poi}}(t_0) \\ &= (P_1 - P_2 \lambda s) AT_{\text{poi}}(t_0) \\ &\quad + \lambda s AC_{\text{poi}}(t_0). \end{aligned} \quad (49)$$

非線形関数 $q_{\text{poi}}(t_0)$ の符号は $V_{\text{poi}}(t_0)$ の 1 階導関数の符号と等しいので, $q_{\text{poi}}(t_0)$ を t_0 について微分すると $dq_{\text{poi}}(t_0)/dt_0 = 0$ となる. すなわち,

$$q_{\text{poi}}(t_0) = \left\{ P_1 - \lambda s (P_2 - P_1) \right\} (\tau + 1/\mu + 1/\lambda) \quad (50)$$

となる. ここで, 関数 $q_{\text{poi}}(t_0)$ の符号と $V_{\text{poi}}(t_0)$ の 1 階導関数の符号が等しいので, $P_1 - \lambda s (P_2 - P_1) > 0$ ならば $V_{\text{poi}}(t_0)$ は t_0 の単調増加関数となり, $V_{\text{poi}}(t_0)$ を最小にする最適スリープ時間は $t_0^* = 0$ となる. 逆に, $P_1 - \lambda s (P_2 - P_1) \leq 0$ ならば, $V_{\text{poi}}(t_0)$ は単調減少関数となり, 最適スリープ時間は $t_0^* \rightarrow \infty$ となる.

(平成 9 年 6 月 30 日受付)

(平成 10 年 3 月 6 日採録)

岡村 寛之

昭和 47 年生. 平成 7 年広島大学工学部第二類卒業. 平成 9 年同大学院工学研究科システム工学専攻博士課程前期修了. 同年 CSK (株) 入社. 在学中, 待ち行列理論, コンピュータシステムの性能評価の研究に従事.



土肥 正



昭和 40 年生. 平成元年広島大学工学部第二類卒業. 平成 4 年同大学院工学研究科システム工学専攻博士課程後期中途退学. 同年同大学工学部助手. 平成 8 年同助教授. 博士 (工学). 平成 4 年ブリティッシュ・コロンビア大学 (カナダ) 客員研究員. 主として, 信頼性理論および数理システムの研究に従事. 日本 OR 学会, 日本応用数理学会, 電子情報通信学会, システム制御情報学会, 計測自動制御学会, Society of Economic Dynamics and Control 各会員. *Communications on Dependability and Quality Management in Engineering* の International Editorial Member.

尾崎 俊治 (正会員)



昭和 16 年生. 昭和 45 年京都大学大学院工学研究科数理工学専攻博士課程修了. 同年広島大学工学部経営工学科講師, 同年同助教授, 昭和 61 年広島大学工学部第二類教授. 工学博士. 主に, 応用確率論, 信頼性工学およびシステム工学の研究に従事. 昭和 45 年から 47 年まで南カリフォルニア大 (アメリカ) 客員研究員. 昭和 51 年から 52 年までマンチェスター大 (イギリス) 客員研究員. 日本 OR 学会第 4 回大西文献賞受賞. 著書「応用確率論」, 「品質管理・信頼性のための統計分布ハンドブック」, 「確率モデル入門」, 「Stochastic System Reliability Modeling」, 「Applied Stochastic System Modeling」等. 編著「Stochastic Models in Reliability Theory」, 「Reliability Theory and Applications」等. 日本 OR 学会フェロー, 日本経営工学会, 電子情報通信学会, システム制御情報学会各会員. *RAIRO-Operations Research, Computers & Mathematics with Applications, Applied Stochastic Models and Data Analysis, Reliability, Quality and Safety Engineering, IIE Transactions on Quality and Reliability Engineering* 等の Editorial Member.