離散的有限フレネル変換の画像処理への応用について

4N－1

五十幡 幸宏　大坪 紘一　青柳 宣生
東洋大学 工学部

1　はじめに

レーダ工学の分野において、レーダの分解能を向上させる技術の一つにレーダホログラフィという考え方があり、これはフレネル回折の現象を応用したものである。このような画質の改善などに用いられているフレネル回折に、離散的有限フーリエ変換のアナロジーを用いて、標本化や周期性を持たせた離散的有限フレネル変換を導いた。そこで、本研究としては、離散的有限フレネル変換を行列化し、固有関数によって行列式を展開することから離散的有限フーリエ変換との関係を導き出し、フレネル変換とフーリエ変換とベクトル変換との関係を示す。そして、離散的有限フレネル変換を含む直交変換の総合評価を行う。

2　離散的有限フレネル変換

離散的有限フーリエ変換のアナロジーを用いて、フレネル回折に標本化や周期性を持たせた離散的有限フレネル変換を表現すると、

$$G(l) = \frac{1}{\sqrt{iN}} \sum_{k=0}^{N-1} g(k) e^{\frac{i\pi}{N}(k-l)^2} \qquad (1)$$

$$(l = 0, 1, \cdots, N-1)$$

となる。また、これの逆変換は、

$$g(k) = \sqrt{\frac{i}{N}} \sum_{l=0}^{N-1} G(l) e^{-\frac{i\pi}{N}(k-l)^2} \qquad (2)$$

$$(k = 0, 1, \cdots, N-1)$$

と表現できる。

3　フレネル変換行列の固有函数展開

離散的有限フレネル変換の行列表現を行なうと、入力行列 X と出力行列 Y とし、離散的有限フレネル変換の変換核行列 Fr とすると、行列式は $Y = FrX$ となり、巡回行列 P と反転巡回行列を Q を次のように定義すると、

Nが偶数の場合　　Nが奇数の場合

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Frは、Nが偶数のとき、この巡回行列 Pの多項式によって表わすことができる。

$$Fr = \frac{1}{\sqrt{iN}} \sum_{m=0}^{N-1} w^{m^2} P^m \qquad (3)$$

巡回行列 Pの固有値 q_mは、$w = e^{\frac{i\pi}{N}}$とすると、$q_m = w^{2m}$ となり、固有函数 u_mは、

$$u_m = \frac{1}{N}(1, w^{2m}, \cdots, w^{2m(N-1)})^t \qquad (4)$$

$$(m = 0, 1, \cdots, N-1)$$

フレネル変換核行列の固有値μ_mは、変換核行列が巡回行列の多項式で表わすことができるから、

$$\mu_m = \frac{1}{\sqrt{iN}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{i\pi}{N}k^2} q_m^k \qquad (5)$$

固有函数は、巡回行列の固有函数と同じ u_mとなる。

u_mが正規直交系を形成していることから、入力行列 Xは、

$$X = \sum_{m=0}^{N-1} c_m u_m \qquad (6)$$

Xとu_mの内積c_mとu_mとで表わすことができるので、行列式 $(Y = FrX)$ をこの固有函数で展開し、出力行列 Yは、係数と固有函数で表わすことができる。

$$Y = \sum_{m=0}^{N-1} c_m \mu_m u_m \qquad (7)$$

固有函数 u_mがフーリエ変換を表わしていることから、フーリエ変換に関係があることが示された。

Discrete Finite Fresnel Transformation and Their Applications for Image Processing
Sachihiro ISOHATA, Kouichi OHTUBO, Nobuo AOYAGI
Faculty of Engineering, Toyo University

また、Nが奇数のときの反転巡回行列の場合でも同様なことが言える。この反転巡回行列は、ベクトル変換の変換核行列を表わしていることから、ベクトル変換は、離散的有限フレネル変換に含まれているということがわかる。

このことから、離散的有限フレネル変換は、N が奇数の場合、ベクトル変換から求めることができ、N が偶数の場合、離散的有限フーリエ変換からも求めることができる。

4 総合評価

Fig.1のような画像処理の流れで、画像データの評価を同じ条件で行う。

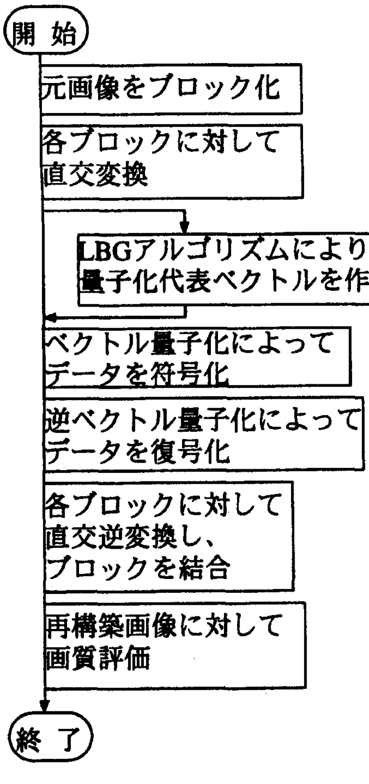

Fig. 1: 画像処理の流れ図

評価方法としては、元画像 $x(m,n)$ とその再構成画像$\tilde{x}(m,n)$ との間の平均区間量子化誤り *(MSE)* を用いたピーク雑音信号率 *(PSNR)* を用いる。

$$MSE = \frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}[x(m,n)-\tilde{x}(m,n)]^2$$

$$PSNR = 10\log_{10}\left(\frac{255^2}{MSE}\right) \quad [dB]$$

下の表は、各直交変換のビット率に対するピーク雑音信号率を表わしている。

直交変換	0.141	0.156	0.172
FFrT	32.03	34.08	36.81
FFT	32.21	34.05	36.43
WHT	30.23	31.97	33.71
DCT	30.34	32.08	34.59
vector	31.03	32.63	35.15
normal	30.35	32.23	34.55

Table 1: 8×8 Block Size

直交変換	0.0352	0.0391	0.0430
FFrT	32.16	35.62	38.15
FFT	32.02	34.45	36.13
DCT	30.62	33.73	35.61
WHT	29.85	31.68	32.70
vector	30.65	33.14	34.72
normal	30.67	33.05	34.35

Table 2: 16×16 Block Size

ただし、FFrT は離散的有限フレネル変換、FFT は離散的有限フーリエ変換、DCT は離散的コサイン変換、WHT はウォルシュ・アダマール変換、vector はベクトル変換、normal は無変換を表わしている。

5 結言

離散的有限フレネル変換の行列式を求め、固有函数によって展開することによって離散的有限フーリエ変換を用いることによって求めることができることがわかった。また、ブロックサイズを大きくし、ビット率を少なくすると、離散的有限フーリエ変換より離散的有限フレネル変換はPSNR を大きい値を得ることができた。このことは、ブロックサイズを大きくしたことで生ずるブロックひずみを離散的有限フレネル変換が緩和したことと思われる。

詳細は当日発表する。

参考文献

[1] 五十幡 幸宏, 田所正史, 大坪紘一, 青柳宣生, 「離散的有限フレネル変換とベクトル変換について 3」電子情報通信学会総合大会講演論文集, A-215 (1996)