3Ｂ－3

状態変換システムのシステム情報量に関する検討

古閑　政
九州東海大学工学部経営管理学科

1．はじめに　相補的分枝構造と称しているグラフ構造を有する状態変換システムは、その基本的性質により情報エントロピーに基づくシステム情報量を定義することができるので、それがどのような性質を有するかを報告する。

2．定義と表現　状態変換システムとは、図１に示すようなグラフ構造をもち、その各枝に付与される値が（１）式を満たし、かつ全要素値が非負であるものをいう。

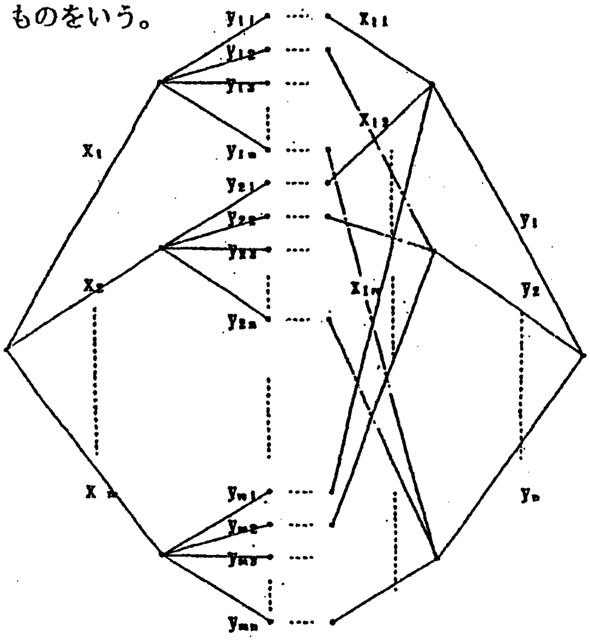

図１　状態変換システムの分枝構造図

$$\left.\begin{aligned}
&x_1+x_2+\cdots\cdots+x_m=1\\
&y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n=1\\
&y_{11}+y_{12}+y_{13}\cdots\cdots+y_{1n}=1\\
&y_{21}+y_{22}+y_{23}\cdots\cdots+y_{2n}=1\\
&\quad\vdots\\
&y_{m1}+y_{m2}+y_{m3}\cdots\cdots+y_{mn}=1\\
&x_{11}+x_{12}+x_{13}\cdots\cdots+x_{1m}=1\\
&x_{21}+x_{22}+x_{23}\cdots\cdots+x_{2m}=1\\
&\quad\vdots\\
&x_{n1}+x_{n2}+x_{n3}\cdots\cdots+x_{nm}=1
\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

また、複合事象の各要素値の積については次式に示す関係がある。

$$x_i y_{ik} = y_k x_{ki} \qquad (2)$$

なお、この場合ＸとＹの２次元であり、それぞれの要素数がm，nであることから図１の場合

$$\mathrm{STS}(2, m\text{-}n) \qquad (3)$$

と表現する。一般的にａ次元で、要素数がb_1．b_2．$b_3 \cdots b_l$ ならば、次のように表す。

$$\mathrm{STS}(a, b_1\text{-}b_2 \cdots\ \text{-}b_l) \qquad (4)$$

3．システム情報量の定義と性質

本論文の対象とする事象は、確率値または構成比を要素（元）とする集合であるから、その値に対して情報エントロピーを定義できる。すなわち、図１で示される事象については次式で与えられる。

$$H(X) = -\Sigma P(x_i)\log P(x_i) \qquad (5)$$
$$(i=1,2,\cdots l)$$

$$H(Y) = -\Sigma P(y_j)\log P(y_j) \qquad (6)$$
$$(j=1,2,\cdots m)$$

これに第３番目の事象Ｚが加わると（このときの分枝構造は省略）、

$$H(Z) = -\Sigma P(z_k)\log P(z_k) \qquad (7)$$
$$(k=1,2,\cdots n)$$

そして同一のベースシステム上にＸ，Ｙ，Ｚの３事象が存在するとき、この状態変換システムのシステム情報量を次式で定義する。

$$S(X;Y;Z)=H(X)+H(Y)+H(Z)-H(XYZ) \qquad (8)$$

これは事象Ｘ，Ｙ，Ｚ間の関係の強さを表す量と言える。また、このシステムの任意の２事象間については次のように表せる。

$$S(X;Y)=H(X)+H(Y)-H(XY) \qquad (9)$$
$$S(Y;Z)=H(Y)+H(Z)-H(YZ) \qquad (10)$$
$$S(Z;X)=H(Z)+H(X)-H(ZX) \qquad (11)$$

ここで、H(XYZ), H(XY), H(YZ), H(ZX)は同時確率の情報エントロピーである。したがってその定義式は下

A Study of System Information in State Transformation System　Masashi Koga
Kyushutokai University　9-1-1 Toroku, Kumamoto City　862, Japan

記に示す通りである。(i=1~l, j=1~m, k=1~n)

$$H(XYZ)=-\sum_{ijk} P(x_i, y_j, z_k)\cdot\log P(x_i, y_j, z_k) \qquad (12)$$

$$H(XY)=-\sum_{ij} P(x_i, y_j)\log P(x_i, y_j) \qquad (13)$$

$$H(YZ)=-\sum_{jk} P(y_j, z_k)\log P(y_j, z_k) \qquad (14)$$

$$H(ZX)=-\sum_{kl} P(z_k, x_i)\log P(z_k, x_i) \qquad (15)$$

そして次式(判別式)

$$\sum_{ijk} P(y_j|x_i)P(z_k|y_j)P(x_i|z_k) \leqq 1 \qquad (16)$$

が成立するとき、3次元システム情報量と2次元システム情報量との間には次に示す関係(システム間関係定理)がみられる。

$$S(X;Y;Z) \geqq S(X;Y)+S(Y;Z)+S(Z;X) \qquad (17)$$

一般的多次元の場合、システム情報量は

$$S(X_1;X_2;\cdots X_n)=\Sigma H(X_i)-H(X_1X_2\cdots X_n) \qquad (18)$$

で与えられるので、システム間関係定理は

$$S(X_1;X_2;\cdots X_n) \geqq S(X_1;X_2)+S(X_2;X_3)+\cdots\cdots+S(X_{n-1};X_n) \qquad (19)$$

この式の右側には $_nC_2$ 通りの項が現れる。なお、(16)式もn個の条件付確率の積となる。

4. 具体例

ひとつの例として3次元(3事象)で、要素数が全て2の場合、つまり STS(3, 2-2-2) と記号表現される状態変換システムについて検討する。その分枝構造図は以下に示す通りである。

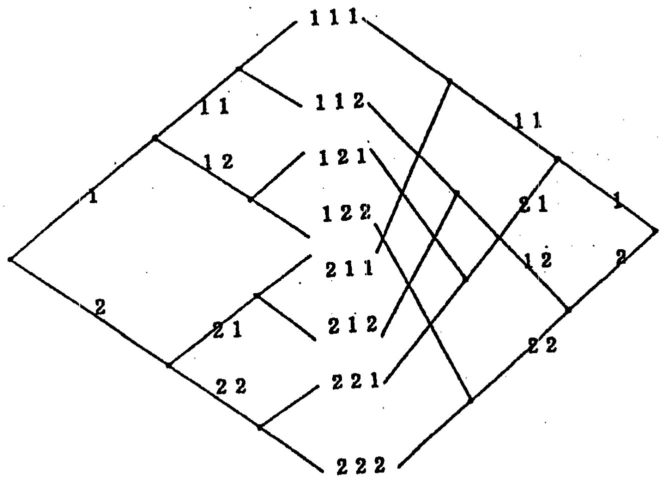

図2　3次元状態変換システムの構造

そして、(16)式の判別式から1を引いた値は

$$D=\{P(y_1|x_1)-P(y_1|x_2)\}\cdot\{P(z_1|y_1)-P(z_1|y_2)\}\cdot\{P(x_1|z_1)-P(x_1|z_2)\} \leqq 0 \qquad (20)$$

この式における $P(y_1|x_1), P(y_1|x_2), P(z_1|y_1), P(z_1|y_2), P(x_1|z_1), P(x_1|z_2)$ 等を求めなければならない。そのためには3種類の2次元状態変換システム(XY間、YZ間とZX間)を図2から導出する。それらを図3に掲示する。る。それらを図3に掲示する。

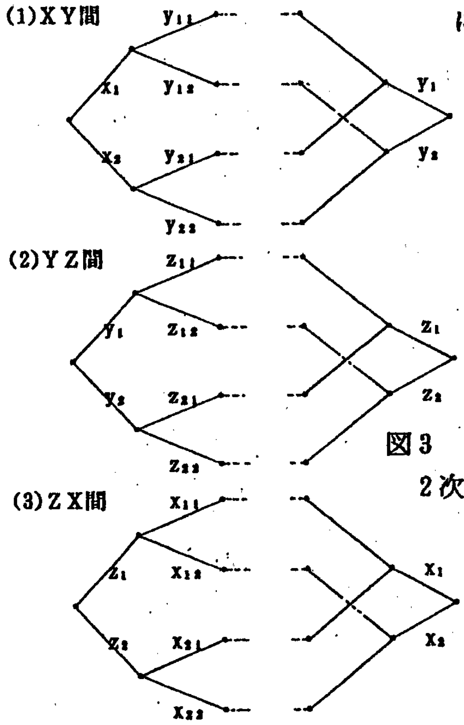

図3　3種類の2次元STS

この図に表示された記号を使えば、(20)式は

$$D=(x_{11}-x_{21})(y_{11}-y_{21})(z_{11}-z_{21}) \qquad (21)$$

具体的な数値例として(詳細構造は省略)状態ベクトルが x=[0.333 0.667], y=[0.483 0.517] z=[0.355 0.645] と表される場合

$x_{11}=0.2$　$y_{11}=0.25$　$z_{11}=0.195$

$x_{21}=0.407$　$y_{21}=0.6$　$z_{21}=0.511$

となるので、D = −0.023 が得られる。従って、(17)式が成立するが、実際に計算すると S(X;Y;Z)=0.413, S(X;Y)+S(Y;Z)+S(Z;X)=0.2 となっている。

5. おわりに

一般的にシステム情報量は非負であると言える(証明は省略)が、(19)式で示唆したように、2次元に分解したときそのシステム情報量の総和より大きくなるための条件がある。なおこの研究は、文部省科研費(No. 06808042)の補助によることを付記する。

—参考文献—

古閑:複合事象システムの情報量評価について 情処研報 95-87, pp. 1-8(1995/9)