一次分数変換を利用した連立代数方程式の高精度計算法 *

5 E－5

鈴木秀男　東京職業能力開発短大・情報処理 †

小林英恒　日本大学理工・数学 ‡

1. はじめに

筆者らは、数値計算によって連立代数方程式の交点での重複度を求めることを研究してきた[1)]。その成果として Z-Algorithm と呼ばれるアルゴリズムを考案した。この方法は、数値計算により、ある程度分離性を保ちつつ、真の重複度をプラス方向とマイナス方向から挟み込むものである[2)]。しかし、アルゴリズムの性質上、非常に近接した根が現われる可能性があり、もしそのような場合に、近接根を分離できなければもとの根の重複度が求まらない。そこで、筆者らは一次分数変換を利用し近接根の分離を行なった[3)]。ここでは、一次分数変換による近接根の分離を取り上げ、これを利用すれば一般の連立代数方程式の近似解を精度良く求められることを示す。

2. 一次分数変換

斉次座標系 $(X_0, X_1, \cdots, X_n)$ を用いて表現された多項式 $F(X_0, X_1, \cdots, X_n)$ を次の射影変換を用いて座標の変換を行なう。

$$
\begin{aligned}
U_0 &= a_{00}X_0 + a_{01}X_1 + \cdots + a_{0n}X_n \\
U_1 &= a_{10}X_0 + a_{11}X_1 + \cdots + a_{1n}X_n \\
&\cdots \\
U_n &= a_{n0}X_0 + a_{n1}X_1 + \cdots + a_{nn}X_n
\end{aligned}
$$

ここで、係数行列は正則であるから、逆変換も同様に定義することができる。

このとき、連比にアフィン空間の点

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (X_1/X_0, X_2/X_0, \cdots, X_n/X_0)$$

を対応させることで射影空間の点とアフィン空間の点とが対応付けられる。すなわち、アフィン空間での各座標は一次分数変換の形で与えられる。

係数の取り方により各種の一次分数変換が存在する。

*Highly accurate calculation method of systems of algebraic equations in which the linear fraction transformation is used

†Hideo Suzuki, Tokyo Polytechnic College, 2-32-1 Ogawa-nishi Kodaira Tokyo 187 Japan

‡Hidetsune Kobayashi, Nihon University, 1-8-14 Kanda-surugadai Chiyoda Tokyo 101 Japan

射影変換をうまく選んで直線 $U_0 = 0$ は、元の方程式の根でないようにとって、この直線 $U_0 = 0$ を新たな無限遠直線とするとき有限部分での方程式の根が元の方程式の根と重複度も含めて１対１に対応する。

3. 一次分数変換の型

連立代数方程式の根（近接根、重根であっても良い）を高精度で計算するための具体的な一次分数変換の型を示す。はじめに、高精度に求めたい根の範囲を次のように決める。適当な複素数αと実数ϵに対し

$$W(\alpha; \epsilon) = \{z \in C \mid |z - \alpha| < \epsilon\}$$

とするとき、複素数α_jと実数$\epsilon_j, j = 1, \cdots, n$ に対し

$$W(\alpha_1, \cdots, \alpha_n; \epsilon_1, \cdots, \epsilon_n) = W(\alpha_1; \epsilon_1) \times \cdots \times W(\alpha_n; \epsilon_n)$$

とし、この範囲にある根を高精度で計算する。ただし、ϵは、正で１より小さい数とする。

一次分数変換の具体的な型として

$$\sum_{j\in I} x_j - \sum_{j\in I} \alpha_j + \sum_{j\in I} \gamma_j = 0$$

を新たな無限遠直線に変換するような一次分数変換を考える。ここで、Iは添字の集合であり、$\gamma_j = k_j\epsilon_j$ $(k_j \geq 1)$ である。集合 Iの選び方により、種々の無限遠直線を決めることができる。

逆に、もとの無限遠直線は

$$\sum_{j\in I} u_j - 1 = 0$$

と変換される。

具体的には係数行列を

$$
\begin{pmatrix}
\delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \cdots & \delta_n & \sum_{j\in I}(\alpha_j - \gamma_j) \\
-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\
0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_2 \\
\vdots & & & & &
\end{pmatrix}
$$

と選べばよい。ここに、$\delta_i = -1 (i \in I), \delta_i = 0 (i \notin I)$ である。

4. 根の移動

具体的な一次分数変換の型が定まったので、次にこれらの変換により元の空間での根がどのように変換されるかを考察する。

一般の点 $x = (x_1, \cdots, x_n)^T$ は

$$u_j = \frac{x_j - \alpha_j}{\sum_{l \in I}(x_l - \alpha_l + \gamma_l)}$$

を要素に持つ点 $u = (u_1, \cdots, u_n)^T$ へ変換される。

領域 $W(\alpha_1, \cdots, \alpha_n; \epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$ に含まれる点については、その要素が $x_j = \alpha_j + c_j\epsilon_j$ $(|c_j| \leq 1)$ と書けるから

$$u_j = \frac{c_j\epsilon_j}{\sum_{l \in I}(k + c_l)\epsilon_l}$$

となる。$|c_l| \leq 1, |\epsilon| \leq 1$ であるから kの値をある程度大きくしても、各 u_jは元の空間での値に比べ分離されていることが分かる。とくに$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \cdots = \epsilon$のときは $u_j = c_j / \sum_{l \in I}(k + c_l)$ となりϵに関係しない。

また領域 Wに含まれない点については

$$\sum_{j \in I} u_j = \frac{\sum_{j \in I}(x_j - \alpha_j)}{\sum_{l \in I}(x_l - \alpha_l) + \sum_{l \in I}\gamma_l} = \frac{1}{1 + \sum_{l \in I}\frac{\gamma_l}{x_j - \alpha_j}}$$

となり、$O(\sum \gamma_l / (x_l - \alpha_l))$ の割合で右辺の値は 1 へ近づくことが分かる。したがって領域 Wに含まれない点は、領域から離れるほど、あるいはϵが小さくなるほど直線$\sum_{j \in I} u_j - 1 = 0$ に近づくことになる。

5. 一次分数変換による誤差と擬局所化

一次分数変換された連立代数方程式 $H(u) = 0$ $(u \in R^n, H(u) \in R^n)$ を数値計算で解いた場合の誤差については、次が成り立つ。

命題 1　$H(u) = 0$ の近似解を $u = (u_1, \cdots, u_n)$ とし、厳密解$\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \cdots, \tilde{u}_n)$ との差を$\Delta u_j = u_j - \tilde{u}_j$ とする。また、u をもとの空間へ逆変換したときの誤差を$\Delta x_j = x_j \tilde{x}_j$とおくとき、次が成り立つ。

$$|\Delta x_j| \fallingdotseq \sum_{l \in I} \gamma_l |\Delta u_j|$$

したがって、$\sum \gamma_l << 1$ となるようにγ_lを選べば、変換された方程式を解いて、その近似解を元の空間へ戻しても精度が保証される。

さらに、領域 Wから離れている根は、ある特定の直線に近づく。この性質を利用すれば、擬局所化が行なえる。文献には、1 変数の場合の擬局所化が述べられている。

6. 数値例

$\sum \gamma_l^{(0)} < 1$ であるような領域から計算を始め、得られた近似解から$\sum \gamma_l^{(1)} < \sum \gamma_l^{(0)}$ となる$\gamma_l^{(1)}$を決める。以下同様の繰り返し計算により、領域内の近似解の精度を向上させることができる。

以下では、1 変数代数方程式に連立法を適用した例を示す。ここで元の方程式 $f(x)$ は、$x = 1$ で重根 (重複度 10) を持ち、$x = 100$ と $x = 1000$ はそれぞれ単根とする。また、αは、得られた近似解の実部の平均を取り、ϵはその値からの最大のずれとした。

方程式を一次分数変換し数値計算で解き、その解を逆分数変換すると次のようになる。ただし、虚部は省略した。

表 1 分数変換による数値解

回数	計算結果	誤差
1	1.0020610841	(1.0046125922,0.99908852483)
2	1.0000478538	(1.0001009949,0.99998096791)
3	1.0000010951	(1.0000037597,0.99999786030)
4	1.0000000806	(1.0000001678,0.99999997938)
5	1.0000000032	(1.0000000067,0.99999999918)

この結果から、数回の繰り返しの後、重根が十分な精度で計算されていることが分かる。

参考文献

1) H. Kobayashi & H. Suzuki. : The multiplicity of a solution of a system of algebraic equations, Proc. of the 1992 International Workshop on Mathematics Mechanization, pp 53-64.

2) H. Kobayashi , H. Suzuki. & Y. Sakai. : The multiplicity of a solution of a system of algebraic equations II, Proc. of the 1994 Winter Workshop on Computer Algebra , pp 11-15.

3) 小林, 鈴木, 酒井 : 分数変換による近接根の分離について, 数式処理 vol.2 no.2 pp.2-7 (1993)

4) H. Kobayashi., H. Suzuki. & Y. Sakai. : Separation of close roots by linear fraction transformation, Proc. of ASIAN symposium on computer mathematics, pp 1-10 (1995)