

単位4元数積分曲線による点列の内挿

三浦 憲二郎[†]

本研究では、4元数を用いて定義される、美しさを追求した自由曲線：単位4元数積分曲線によって、3次元空間の点列を内挿する方法を提案する。単位4元数積分曲線は、これまでのBézier曲線やNURBS曲線といったパラメトリック曲線よりも、曲率や曲率の変化率を直接的に制御するために、点列を内挿して得られる曲線も、より滑らかに曲率が変化する。

Interpolation of 3D Points by Unit Quaternion Integral Curves

KENJIRO T. MIURA[†]

This paper proposes a new interpolation method by the unit quaternion integral curve: a type of free-form curves which has been developed for fairness. Since we use quaternion curves to specify the tangent of the curves in order to more directly manipulate its curvature and variation of curvature than is possible for the traditional parametric representations like Bézier and NURBS curves, we can generate free-form curves whose curvature changes more smoothly.

1. はじめに

“美しい(fair)”，あるいは“見た目に心地よい(visually pleasing)”曲線の生成は様々な分野で重要であり、特に工業デザインやスタイリング分野では製品の良否を決定する主要因となっている。単位4元積分曲線(unit integral quaternion: QI curve)は、三浦^{9),10)}により考案された、滑らかで美しい曲線の生成を目的とする自由曲線である。

美しい曲線とは何か、どのような性質を持つべきかに関する明確な数学的定義は存在しないし、美しい曲線や曲面を生成する決定的な方法は存在しない。しかしながら、美しさを決定する要因として「曲率」や「曲率の変化率」が重要であることは共通の認識であり、曲線の接線方向だけでなく曲率や曲率の変化率を、より直接的に制御できる方法が望ましい。

より直接的に曲率や曲率の変化率を規定して定義される曲線はクロソイド曲線である^{1)~3)}。クロソイド曲線(コルニュの螺旋)はきわめて滑らかな(したがって、美しい)2次元曲線(平面曲線)として知られ、高速道路の設計やロボットのコーナ軌道制御⁴⁾に用いられている。この曲線はフレネル(Fresnel)積分を用い

て以下のように定義される³⁾:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \pi B \begin{pmatrix} C_s(t) \\ S_n(t) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

ここで、スケーリング係数 πB は正であり、フレネル積分は、

$$\begin{aligned} C_s(t) &= \int_0^t \cos \frac{\pi t^2}{2} dt, \\ S_n(t) &= \int_0^t \sin \frac{\pi t^2}{2} dt \end{aligned} \quad (2)$$

である。クロソイド曲線は、曲線の長さに比例して曲率が連続的に変化する。曲線の形状を得るために積分が必要となるが、弧長の定数倍をパラメータとする三角関数によって一定の大きさ(ノルム)を持つ接線ベクトルを指定して曲線を定義するのが、クロソイド曲線の構成法である。

一定のノルムを持つベクトルの向きを指定することは剛体の向きを指定することで可能と考えられ、QI曲線では方向ベクトルを単位4元数曲線を使って指定する。したがって、QI曲線はクロソイド曲線を3次元に拡張・一般化した曲線となっている。本研究では、QI曲線を用いて3次元の点列を内挿する方法を提案する。

[†] 静岡大学工学部機械工学科

Department of Mechanical Engineering, Shizuoka University

2. 4 元数の性質

2.1 4 元数の 4 則演算⁸⁾

複素数 z が $z = a + bi$ ($a, b \in R$) と表されるように、4 元数 (quaternion) q は、

$$q = a + bi + cj + dk \quad (3)$$

と表される。ここで、 $a, b, c, d \in R$ であり、 i, j, k は異なる虚数単位である。2 つの 4 元数 $q_0 = a_0 + b_0i + c_0j + d_0k$ と $q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$ の和 $q_0 + q_1$ を求める加算は、

$$\begin{aligned} q_0 + q_1 &= (a_0 + a_1) + (b_0 + b_1)i \\ &\quad + (c_0 + c_1)j + (d_0 + d_1)k \end{aligned} \quad (4)$$

と定義される。また、差を求める減算は加算の逆演算として定義される。

乗算は、 i, j, k の間の積として、

$$\begin{aligned} i^2 &= -1, \quad j^2 = -1, \quad k^2 = -1, \\ ij &= k, \quad ji = -k, \\ jk &= i, \quad kj = -i, \\ ki &= j, \quad ik = -j \end{aligned} \quad (5)$$

が定義され、したがって、

$$\begin{aligned} q_0 q_1 &= (a_0 a_1 - b_0 b_1 - c_0 c_1 - d_0 d_1) \\ &\quad + (a_0 b_1 + b_0 a_1 + c_0 d_1 - d_0 c_1)i \\ &\quad + (a_0 c_1 + c_0 a_1 + d_0 b_1 - b_0 d_1)j \\ &\quad + (a_0 d_1 + d_0 a_1 + b_0 c_1 - c_0 b_1)k \end{aligned} \quad (6)$$

と定義される。この式から分かるように、一般に $qq' \neq q'q$ である。商を求める除算は乗算の逆演算として定義されるが、乗算は積の順序に依存するので、右商 (right quotient) と左商 (left quotient) が存在する。

$q = a + bi + cj + dk$ の共役 (conjugate) \bar{q} は、

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk \quad (7)$$

で与えられる。このとき、

$$q\bar{q} = \bar{q}q = |q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \quad (8)$$

ここで、 $|q|$ を q のノルムと呼ぶ。ノルムに関して次の性質が成り立つ：2 つの 4 元数 q_0 と q_1 のノルムは積によって不変である、すなわち、

$$|q_0 q_1| = |q_0| |q_1|. \quad (9)$$

$q = a + bi + cj + dk$ の逆元 (inverse) q^{-1} は $qq^{-1} = 1$ を満たす 4 元数であり、

$$\begin{aligned} q^{-1} &= \frac{1}{|q|^2} (a - bi - cj - dk) \\ &= \frac{\bar{q}}{|q|^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

通常、乗算はその順序に依存するが、共役との乗算は順序に依存せず、

$$q^{-1}q = 1 \quad (11)$$

となり、逆元を前から掛けても結果は 1 となる。

2 つの純粹なベクトル 4 元数 (pure vector quaternion: 実数部が 0 である 4 元数) $q_0 = b_0i + c_0j + d_0k$ と $q_1 = b_1i + c_1j + d_1k$ の乗算は、式 (6) より、

$$q_0 q_1 = -(q_0, q_1) + [q_0, q_1] \quad (12)$$

と表せる。ここで、 (q_0, q_1) と $[q_0, q_1]$ は 2 つのベクトル 4 元数の内積

$$(q_0, q_1) = b_0 b_1 + c_0 c_1 + d_0 d_1 \quad (13)$$

と外積

$$\begin{aligned} [q_0, q_1] &= (c_0 d_1 - d_0 c_1)i + (d_0 b_1 - b_0 d_1)j \\ &\quad + (b_0 c_1 - c_0 b_1)k \end{aligned} \quad (14)$$

を表す。これらは i, j, k が x, y, z 軸にそれぞれ対応すると考えると、3 次元空間のベクトルの内積、外積に一致する。

2.2 4 元数と回転

与えられた単位 4 元数 $q \in S^3$ によって、3 次元空間での回転 $R_q \in SO(3)$ が以下のように定義される：

$$R_q(p) = qpq^{-1}, \quad \text{for } p \in R^3. \quad (15)$$

ここで、 $p = (x, y, z)$ は 4 元数 $(0, x, y, z)$ と解釈し、積として 4 元数の乗算を行う。単位 4 元数 q は、角度 θ と単位ベクトル $\hat{v} \in S^2$ を用いて、 $q = \cos \theta + \hat{v} \sin \theta \in S^3$ と表される。このとき、 R_q は \hat{v} 軸回りの 2θ の回転である⁸⁾。2 つの対心点 q と $-q \in S^3$ は $SO(3)$ 空間の同じ回転を表し、 $R_q \equiv R_{-q}$ といえる。滑らかな回転曲線 (rotation curve) $R_{q(t)} \in SO(3)$ の角速度が $2\omega(t) \in R^3$ であれば、単位 4 元数曲線 (unit quaternion curve) $q(t) \in S^3$ は次式を満たす：

$$\frac{dq(t)}{dt} = q(t)\omega(t). \quad (16)$$

前節で述べたように 4 元数の乗算では交換法則が成り立たず、したがって乗算の順序が重要となる。 q_0, q_1, \dots, q_n を一連の回転とし、個々の q_i をグローバル座標系で定義すれば、積 $q_n q_{n-1} \dots q_0$ が全体としての回転を表す。しかしながら、 q_i をローカル座標で定義すれば、積 $q_0 q_1 \dots q_n$ が全体としての回転を表す。この回転はグローバル座標系で q_n, q_{n-1}, \dots, q_0 の順序で回転を施した場合に一致する。ローカル座標系を用いると、回転の順序と乗算の順序が一致するので、Kim ら⁷⁾は滑らかな回転曲線を得るためにローカル座標系を用いて 4 元数曲線を定義した。この論文でもローカル座標系を用いて回転を定義する。

2.3 指数関数と対数関数

与えられたベクトル $v = \theta \hat{v} \in R^3$ と単位ベクトル $\hat{v} \in S^2$ に対して、 v の指数関数值：

$$\exp(v) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{v^i}{i!} = \cos \theta + \hat{v} \sin \theta \in S^3 \quad (17)$$

は単位 4 元数であり、 \hat{v} を軸として角度 2θ の回転を表す。ここで、 v^i は 4 元数の乗算を用いて計算される。指数関数 \exp は、 S^3 空間の値として与えられる角速度ベクトルから、回転を表す単位 4 元数への写像を定義している。指数関数 \exp の定義域を $|\theta| < \pi$ に制限すれば 1 対 1 の写像となり、その逆関数として対数関数 \log を単位 4 元数に対して定義することができる。単位 4 元数 q を実数値 α を指數とするベキ (power) q^α は、

$$q^\alpha = \exp(\alpha \log q) \quad (18)$$

と定義される。

3. 単位 4 元数積分曲線^{9),10)}

3.1 単位 4 元数積分曲線の定義

単位 4 元数積分 (QI) 曲線は次式で定義される：

$$C(s) = P_0 + \int_0^s q(s) \hat{v}_0 q^{-1}(s) ds. \quad (19)$$

ここで、 $q(s)$ は単位 4 元数曲線、 \hat{v}_0 は単位定数ベクトルとする。

3.2 接線ベクトルと曲率、曲率の変化率

QI 曲線の接線ベクトル $t(s)$ は非常に簡単な次式で与えられ、

$$t(s) = \frac{dC(s)}{ds} = q(s) \hat{v}_0 q^{-1}(s) \quad (20)$$

そのノルムはつねに 1 である。曲線の曲率 $\kappa(s)$ はベクトル $d^2C(s)/ds^2$ のノルムとして与えられ、

$$\kappa(s) = \left| \frac{d^2C(s)}{ds^2} \right| \quad (21)$$

$$= \left| \frac{dq(s)}{ds} \hat{v}_0 q^{-1}(s) + q(s) \hat{v}_0 \frac{dq^{-1}(s)}{ds} \right| \quad (22)$$

と表される。この式は複雑に見えるが、以下に述べるように簡単化することができる。

単位 4 元数曲線 $q(s)$ の微分 $dq(s)/ds$ は、2 章で述べたように、

$$\frac{dq(s)}{ds} = q(s) \omega(s) \quad (23)$$

と表せる。ここで、 $\omega(s)$ は純粹なベクトル 4 元数である。また、

$$\frac{dq^{-1}(s)}{ds} = \left\{ \frac{dq(s)}{ds} \right\}^{-1}. \quad (24)$$

したがって、

$$\kappa(s) = \left| q(s) \omega(s) \hat{v}_0 q^{-1}(s) + q(s) \hat{v}_0 \{q(s) \omega(s)\}^{-1} \right| \quad (25)$$

$$= \left| q(s) (w(s) \hat{v}_0 - \hat{v}_0 w(s)) q^{-1}(s) \right|. \quad (26)$$

式 (9) に示したように 4 元数のノルムは乗算によっても不变であり、2 つの純粹なベクトル 4 元数 α と β の乗算は、式 (12) のように、

$$\alpha \beta = -(\alpha, \beta) + [\alpha, \beta], \quad (27)$$

と表せるので、式 (26) は次式に変形できる：

$$\kappa(s) = 2 \left| [\omega(s), \hat{v}_0] \right|. \quad (28)$$

上式より、曲率の変化率 $\mu(s)$ は、

$$\begin{aligned} \mu(s) &= \frac{d\kappa(s)}{ds} \\ &= \frac{4}{\kappa(s)} \left(\left[\frac{d\omega(s)}{ds}, \hat{v}_0 \right], [\omega(s), \hat{v}_0] \right) \end{aligned} \quad (29)$$

である。

3.3 点列の内挿に用いる QI 曲線

この節では本研究で提案する点列の内挿法に用いる、三浦^{9),10)}によって提案された QI 曲線について述べる。その定義に用いる単位 4 元数曲線は Bézier 曲線の形式を利用する。

曲線の全長を l 、パラメータ $t = s/l$ 、 $\hat{v}_0 = \hat{v}_x = (1, 0, 0)$ として式 (19) を以下のように書き改める：

$$\begin{aligned} C(s) &= P_0 + \int_0^s q\left(\frac{s}{l}\right) \hat{v}_x q^{-1}\left(\frac{s}{l}\right) ds \\ &= P_0 + l \int_0^t q(t) \hat{v}_x q^{-1}(t) dt, \quad 0 \leq t \leq 1. \end{aligned} \quad (30)$$

この式の $q(t)$ を、次数 n の Bézier 曲線を利用して以下のように定義する：

$$\begin{aligned} q(t) &= \exp(\hat{v}(t) \beta(t)) \\ &= \cos(\beta(t)) + \hat{v}(t) \sin(\beta(t)). \end{aligned} \quad (31)$$

ここで、

$$\hat{v}(t) = (0, 0, \cos(\alpha(t)), \sin(\alpha(t))), \quad (32)$$

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i B_{n,i}(t), \quad (33)$$

$$\beta(t) = \sum_{i=0}^n \beta_i B_{n,i}(t). \quad (34)$$

Bernstein 基底関数 $B_{n,i}(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$ である。図 1 に示したように、 α_i と β_i を曲座標値として次式で与えられる 4 元数 $v_i \in R^3$ 、 $i = 0, \dots, n$ は、

$$v_i = (0, 0, \beta_i \cos(\alpha_i), \beta_i \sin(\alpha_i)) \quad (35)$$

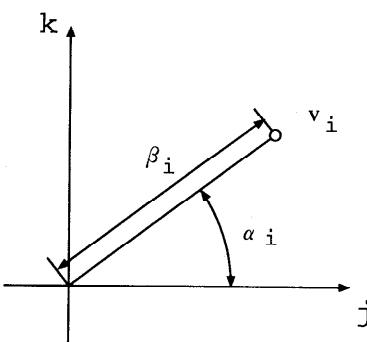


図1 制御4元数
Fig. 1 Control quaternion.

と制限され、その結果 $v_i \in R^2$ となる。この制限により式(31)で表される単位4元数曲線は $q(t) \in S^2$ となり、それによって表される回転の回転軸はつねに \hat{v}_x に直交する。

$q(t)$ は、

$$\begin{aligned} q(t) = & (\cos(\beta(t)), 0, \cos(\alpha(t)) \sin(\beta(t)), \\ & \sin(\alpha(t)) \sin(\beta(t))) \end{aligned} \quad (36)$$

と書けるので、

$$\begin{aligned} \frac{dq(t)}{dt} = & \left(-\sin(\beta(t)) \frac{d\beta(t)}{dt}, 0, \right. \\ & -\sin(\alpha(t)) \sin(\beta(t)) \frac{d\alpha(t)}{dt} \\ & + \cos(\alpha(t)) \cos(\beta(t)) \frac{d\beta(t)}{dt}, \\ & \cos(\alpha(t)) \sin(\beta(t)) \frac{d\alpha(t)}{dt} \\ & \left. + \sin(\alpha(t)) \cos(\beta(t)) \frac{d\beta(t)}{dt} \right) \end{aligned} \quad (37)$$

であり、式(28)の $[\omega(t), \hat{v}_x]$ は、

$$\begin{aligned} [\omega(t), \hat{v}_x] = & (0, 0, \cos(\alpha(t)), \\ & \sin(\alpha(t)) \frac{d\alpha(t)}{dt} \sin(\beta(t)) \cos(\beta(t)) \\ & + (0, 0, \sin(\alpha(t)), -\cos(\alpha(t))) \frac{d\beta(t)}{dt}). \end{aligned} \quad (38)$$

したがって、QI曲線の曲率 $\kappa(s)$ は、式(28)より、

$$\kappa(s) = \sqrt{\left(\frac{d\alpha(t)}{dt}\right)^2 \sin^2(2\beta(t)) + 4\left(\frac{d\beta(t)}{dt}\right)^2} \quad (39)$$

となる。

本研究では、式(31)で定義される単位4元数曲線を Bézier 4元数曲線と呼ぶ。また、Bézier 4元数曲線を用いて定義される QI 曲線を Bézier QI 曲線と呼ぶ。Bézier 4元数曲線の次数が n であるとき、Bézier QI 曲線の次数は積分されるので実質的には $n+1$ であるが、定義に用いられる次数を重視して、QI 曲線の次

数も n ということにする。

4. 2次 Bézier QI 曲線による点列の内挿

この章では、QI 曲線を用いて与えられた 3 次元の点列を内挿する方法について述べる。内挿に用いる QI 曲線は、式(30)で表される Bézier QI 曲線の $n=2$ の場合、すなわち 2 次 Bézier QI 曲線とする。2 つの連続する点の間を 1 本の Bézier QI 曲線で内挿し、それらの曲線は G^2 連続性（曲率まで連続）を保ちながら接続させる。与えられた $n+1$ 個の点列を $P_i, i=0, \dots, n$ とし、 n 本の 2 次 Bézier QI 曲線を $C_i(s), i=0, \dots, n-1$ とする。 $C_i(s)$ は P_i を始点とするので、

$$C_i(s) = P_i + \int_0^s q_i\left(\frac{s}{l_i}\right) \hat{v}_x q_i^{-1}\left(\frac{s}{l_i}\right) ds, \quad (40)$$

$$0 \leq s \leq l_i,$$

$$= P_i + l_i \int_0^{\frac{s}{l_i}} q_i(t) \hat{v}_x q_i^{-1}(t) dt, \quad (41)$$

と表すことができる。ここで、 l_i は曲線 $C_i(s)$ の全長であり、 $t = s/l_i$ である。また、 $q_i(t)$ は、

$$\begin{aligned} q_i(t) = & \exp(\hat{v}_i(t)\beta_i(t)) \\ = & \cos(\beta_i(t)) + \hat{v}_i(t) \sin(\beta_i(t)). \end{aligned} \quad (42)$$

ここで、

$$\hat{v}_i(t) = (0, 0, \cos(\alpha_i(t)), \sin(\alpha_i(t))), \quad (43)$$

$$\alpha_i(t) = \sum_{j=0}^2 \alpha_{i,j} B_{2,j}(t), \quad (44)$$

$$\beta_i(t) = \sum_{j=0}^2 \beta_{i,j} B_{2,j}(t). \quad (45)$$

さらに、以下の説明の便宜を図るために、

$$\hat{v}_{i,j} = (0, 0, \cos(\alpha_{i,j}), \sin(\alpha_{i,j})), \quad (46)$$

$$q_{i,j} = \exp(\hat{v}_{i,j}\beta_{i,j}) \quad (47)$$

とする。1本の曲線を定めるには、 $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}, j=0, 1, 2$ 、および l_i が必要なので、変数の数は全体として $(2 \times 3 + 1) \times n = 7n$ 個である。

付録 A.2 に示したように、 $C_i(s)$ の 1 次微分、2 次微分は次式で与えられる：

$$\frac{dC_i(s)}{ds} = q_i(t) \hat{v}_x q_i^{-1}(t), \quad (48)$$

$$\frac{d^2C_i(s)}{ds^2} = \frac{2}{l_i} q_i(t) [\omega_i(t), \hat{v}_x] q_i^{-1}(t). \quad (49)$$

曲線の接続部での G^0 (位置) 連続性を保証する条件は、

$$C(l_i) = P_{i+1}, \quad i=0, \dots, n-1 \quad (50)$$

で与えられる。また、 G^1 (接線) 連続性の条件は、

$$q_{i+1,0} = q_{i,2}, \quad (51)$$

すなわち、

$$\alpha_{i+1,0} = \alpha_{i,2}, \quad \beta_{i+1,0} = \beta_{i,2}, \\ i = 0, \dots, n-2 \quad (52)$$

である。 G^2 (曲率) 連続性の条件は,

$$\begin{aligned} \frac{1}{l_{i+1}} q_{i+1,0} [\omega_{i+1}(0), \hat{\mathbf{v}}_x] q_{i+1,0}^{-1} \\ = \frac{1}{l_i} q_{i,2} [\omega_i(1), \hat{\mathbf{v}}_x] q_{i,2}^{-1}, \end{aligned} \quad (53)$$

すなわち,

$$\begin{aligned} \frac{1}{l_{i+1}} (\alpha_{i+1,1} - \alpha_{i+1,0}) &= \frac{1}{l_i} (\alpha_{i,2} - \alpha_{i,1}), \\ \frac{1}{l_{i+1}} (\beta_{i+1,1} - \beta_{i+1,0}) &= \frac{1}{l_i} (\beta_{i,2} - \beta_{i,1}), \\ i &= 0, \dots, n-2 \end{aligned} \quad (54)$$

である。条件式の個数は、 G^0 に関するものが x, y, z の各座標を考慮して $3n$ 個、 G^1 に関するものが $2(n-1)$ 個、 G^2 に関するものが同じく $2(n-1)$ 個である。したがって、全体としては $7n-4$ 個となる。変数の個数 $7n$ と比較すると 4 だけ少ないので、曲線全体の両端点での接線方向を指定する。すなわち、 $\alpha_{0,0}$ と $\beta_{0,0}, \alpha_{n-1,2}, \beta_{n-1,2}$ を指定する。変数と式の個数が一致するので、Newton-Raphson 法といった数値解析手法によって変数を求めることができる。

5. アルゴリズムの実装と内挿例

この章では、Newton-Raphson 法により内挿曲線を算出する方法について述べる。Newton-Raphson 法は数値計算により多変数の非線形方程式:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \quad (55)$$

の解を算出する。ただし、 $\mathbf{f} = (f_0, \dots, f_m)$ であり、 $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_m)$ である。 $\mathbf{x}^0 = (x_0^0, \dots, x_m^0)$ を解の初期値として,

$$\mathbf{M}^i \delta \mathbf{x}^i = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^i) \quad (56)$$

$$\left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_0(\mathbf{x}^i)}{\partial x_0} & \frac{\partial f_0(\mathbf{x}^i)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_0(\mathbf{x}^i)}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^i)}{\partial x_0} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^i)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^i)}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x}^i)}{\partial x_0} & \frac{\partial f_m(\mathbf{x}^i)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x}^i)}{\partial x_m} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \delta x_0 \\ \delta x_1 \\ \vdots \\ \delta x_m \end{array} \right]$$

$$= - \left[\begin{array}{c} f_0(\mathbf{x}^i) \\ f_1(\mathbf{x}^i) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}^i) \end{array} \right] \quad (57)$$

を解いて $\delta \mathbf{x}^i$ を算出し,

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \delta \mathbf{x}^i \quad (58)$$

の処理を繰り返し実行する。処理の終了条件は、あらかじめ定めた許容値 ϵ に対して,

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}^i)|^2 < \epsilon \quad (59)$$

とする。したがって、アルゴリズムの実行には初期値と許容値が必要である。

5.1 求めるべき方程式

アルゴリズムの実装においては計算の効率を考慮し、式 (51) を考慮して変数を $\alpha_{0,1}, \beta_{0,1}$ と $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}, i = 1, \dots, n-1, j = 0, 1$ 、および $l_i, i = 0, \dots, n-1$ とする。したがって、変数の個数は $5n-2$ となる。

式 (50), (54) の条件より,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i &= \mathbf{F}_i(\alpha_{i,0}, \beta_{i,0}, \alpha_{i,1}, \beta_{i,1}, \alpha_{i,2}, \beta_{i,2}, l_i), \\ &= l_i \int_0^1 q_i(t) \hat{\mathbf{v}}_x q_i^{-1}(t) dt - \mathbf{P}_{i+1} + \mathbf{P}_i, \\ i &= 0, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} G_i &= G_i(\alpha_{i,1}, \alpha_{i+1,0}, \alpha_{i+1,1}, l_i, l_{i+1}) \\ &= \frac{1}{l_{i+1}} (\alpha_{i+1,1} - \alpha_{i+1,0}) - \frac{1}{l_i} (\alpha_{i,2} - \alpha_{i,1}), \\ i &= 0, \dots, n-2, \end{aligned} \quad (61)$$

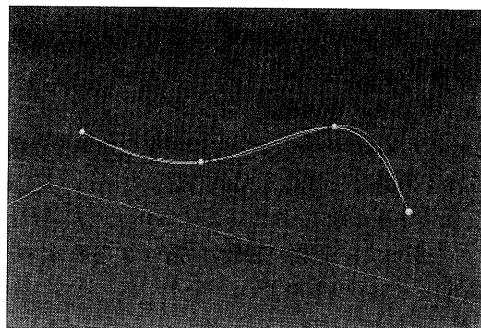
$$\begin{aligned} H_i &= H_i((\beta_{i,1}, \beta_{i+1,0}, \beta_{i+1,1}, l_i, l_{i+1}) \\ &= \frac{1}{l_{i+1}} (\beta_{i+1,1} - \beta_{i+1,0}) - \frac{1}{l_i} (\beta_{i,2} - \beta_{i,1}), \\ i &= 0, \dots, n-2, \end{aligned} \quad (62)$$

と定義し、これらの方程式をすべて 0 とする解を求める。 G_i, H_i を各変数で偏微分し微分係数を求めるは容易であるが、 \mathbf{F}_i の偏微分は積分形式となる。積分は各 Bézier QI 曲線のパラメータを 100 に等分割し Simpson 則を用いて数値積分を行う。

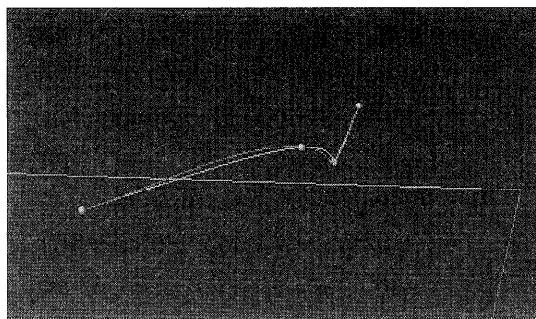
5.2 初期値と許容値

アルゴリズムの実装においては、まず 2 次微分まで連続である 3 次スプライン曲線を用いて点列を内挿し、各点での接線方向を求める。3 次スプライン曲線算出のための終端条件の代表的な方法は 2 種類あり、1 つは曲線の始点と終点での接線ベクトルを指定する方法と、もう 1 つはそこでの 2 次微分を 0 (自然終端条件) とする方法がある。終端条件の違いによる内挿曲線の違いについては次節で述べる。 $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}, i = 0, \dots, n-1, j = 0, 2$ の初期値はそれらの接線方向に一致するように、 $\alpha_{i,1}, \beta_{i,1}, i = 0, \dots, n-1$ は、3 次スプライン曲線のセグメントのパラメータの中央値での接線方向と、2 次 Bézier QI 曲線の中央での接線方向が一致するように与える。

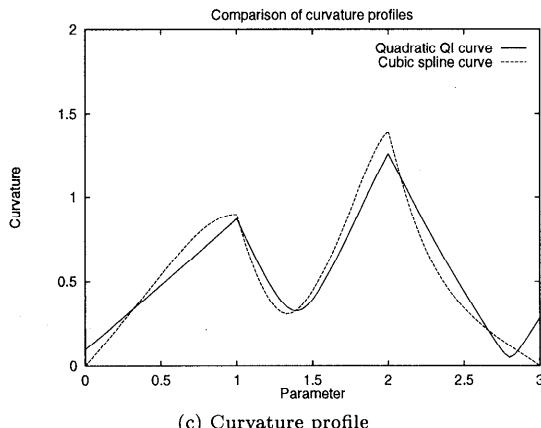
初期値で注意すべきことは、2.2 節で述べたように、2 つの単位 4 元数 q と $-q$ とが同じ回転を表しているので、 (α, β) と $(\alpha \pm (2n+1)\pi, -\beta)$ (n は 0 を含む自然数) とが同じ接線方向を指定することである。より滑らかな曲線を得るために、始点での接線方向を指定する $(\alpha_{0,0}, \beta_{0,0})$ との差の 2 乗和が最小となる接線方向を保つ (α, β) の組合せを $(\alpha_{0,1}, \beta_{0,1})$ とする。次に



(a) Example No.1



(b) The same curves in (a) from a different viewpoint



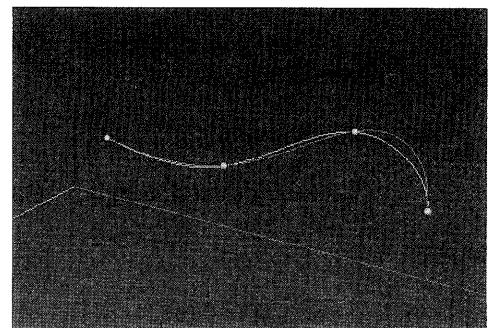
(c) Curvature profile

図2 内挿例 No.1 (自然終端条件), 緑色: QI 曲線, 赤色: 3次スプライン曲線

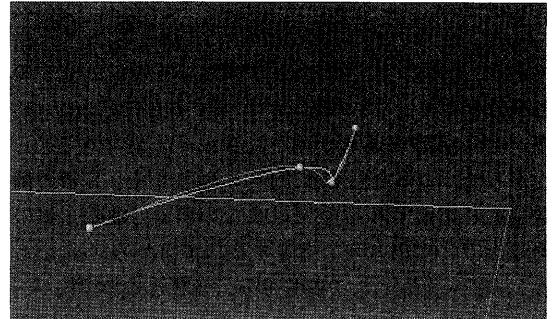
Fig. 2 Example No.1 (specify tangents at the end points), Green: QI curves, Red: cubic spline curves.

$(\alpha_{0,1}, \beta_{0,1})$ との差の2乗和が最小となる $(\alpha_{1,0}, \beta_{1,0})$ を求める。この処理を曲線の制御4元数の配列の順序に従って順次行って初期値とする。

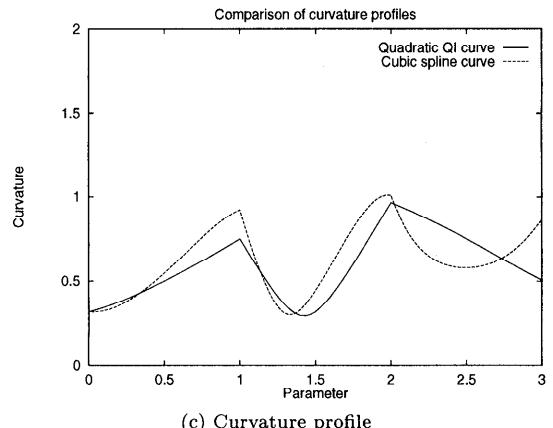
終了条件のために与える許容値は、セグメントの全長の0.05%程度（セグメントの全長が1程度であり、 $\epsilon = 0.0005$ と設定）である。次節で示すようにこの程度の許容値で曲線は与えられた点列を通過している



(a) Example No.2



(b) The same curves in (a) from a different viewpoint



(c) Curvature profile

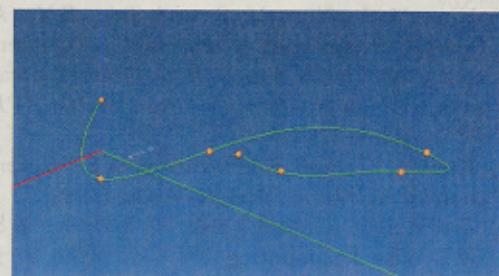
図3 内挿例 No.2 (始点・終点で接線を指定した場合), 緑色: QI 曲線, 赤色: 3次スプライン曲線

Fig. 3 Example No.2 (specify tangents at the end points), Green: QI curves, Red: cubic spline curves.

ように表示される。

5.3 内挿例

図2と図3に3本の2次Bézier QI曲線による4点を内挿した例とその曲率のグラフを示す。図2、図3ともに図(a)と図(b)との位置関係を明らかにする目的でx軸、y軸、z軸を、それぞれ赤、緑、青の線で示している。比較のために3次スプライン曲線とそ



(a) Initial curve (error = 6.52)



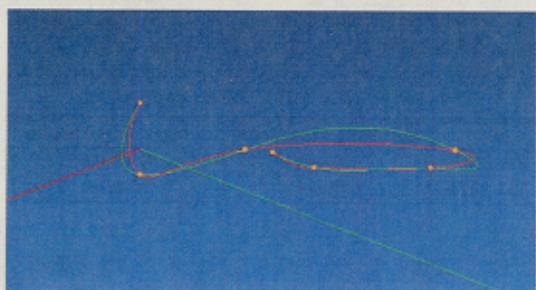
(b) After one iteration (error = 0.123)



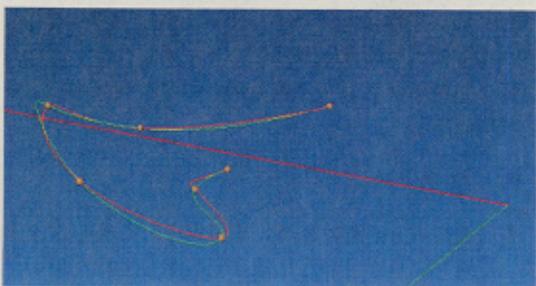
(c) After two iteration (error = 0.000303)

図4 内挿例No.3 (始点・終点で接線を指定した場合)
Fig. 4 Example No.3 (specify tangents at the end points).

の曲率のグラフも示す。図2は(c)の曲率グラフから分かるように、スプライン曲線に対しては自然終端条件を課しているが、QI曲線では始点・終点での接線方向を利用しているだけでその条件は課していない。始点・終点で接線を指定する場合(図3の場合)、それぞれ最初の3点を通る円弧、および最後の3点を通る円弧に一致するように接線方向を定め、その大きさはQI曲線では1、スプライン曲線にはパラメータの違いを考慮して($t = s/l_i$)、始点では先頭のQI曲線の長さ、終点では最後のQI曲線の長さとしている。図2と図3の曲率グラフを見ると、どちらの場合も大局的には類似した曲率の変化をしている。しかしながら、1本のQI曲線とそれに対応するスプライン曲線の曲率を比較すると、QI曲線の曲率がクロソイド曲線のように直線的に単純に変化しているのに対して、



(a) Example No.3



(b) The same curves in (a) from a different viewpoint

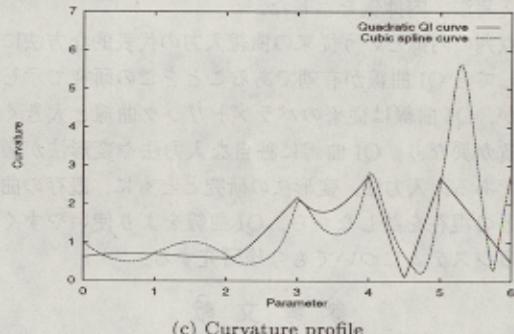


図5 内挿例No.3 (始点・終点で接線を指定した場合)
Fig. 5 Example No.3 (specify tangents at the end points).

スプライン曲線では曲率の増加率や減少率が変化し、変化の仕方が一様でない。

図4に6本の2次Bézier QI曲線による内挿例によってNewton-Raphson法の収束の様子を示す。左上の点を始点として曲線を順次計算しており、終点に進むに従って誤差が蓄積していく。(a)は初期値による曲線であり、いくつかの中間点や終点を通過していないことが分かる。(b), (c)と繰返し計算を行うことによってすべての点を通過するように収束していく。図中の誤差(error)は式(59)で示した $|f(x^i)|^2$ の値である。

図5では、図4の内挿曲線とスプライン曲線とを比較している。この例でも、QI曲線の曲率が単純に

表 1 Indy MIPS R4600 64 M バイトによる曲線生成・表示のための処理時間

Table 1 Processing time for generation and display of QI curves by Indy MIPS R4600 64 Mbyte.

	Cal. of quaternions	Integration+Display
Ex. No.1	0.10 sec	0.19 sec
Ex. No.3	0.38 sec	0.40 sec

滑らかに変化しているのに対して、スプライン曲線では曲率の増加率や減少率が変化し、特に 6 本目のスプライン曲線（パラメータ値 t は $5 \leq t \leq 6$ ）では接線方向を終点で指定していることもあり、増加、減少、さらに増加とやや激しく変化している。

表 1 に制御 4 元数の計算時間、および積分+表示の処理時間を示す。

6. おわりに

本研究では、4 元数を用いて定義される美しさを追求した新しい自由曲線：単位 4 元数積分曲線を用いて点列を内挿する方法を提案した。特に、2 次 Bézier QI 曲線によって点列を内挿する方法について詳述し、その実装法、内挿例を示した。

点列の内挿という従来の曲線入力の代表的な方法に対しても QI 曲線が有効であることをこの研究で示したが、QI 曲線は従来のパラメトリック曲線と大きく性質が異なり、QI 曲線に独自な入力法や変形法が必要である。入力法、変形法の研究とともに、既存の曲線との混在を許しながら、QI 曲線をより使いやすくするシステムについても今後研究する。

参考文献

- Mehlum, E.: Nonlinear Splines, *Computer Aided Geometric Design*, Barnhill, R.E. and Riesenfeld, R.F. (Eds.), pp.173–207, Academic Press (1974).
- Walton, D.J. and Meek, D.S.: Clothoidal Splines, *Computers and Graphics*, Vol.14, No.1, pp.95–100 (1990).
- Meek, D.S. and Thomas, R.S.D.: A Guided Clothoid Spline, *Computer Aided Geometric Design*, Vol.8, pp.163–174 (1991).
- Makino, H. and Suda, H.: Continuous Path Control Using Clothoidal Interpolation, *Proc. 20th ISIR*, Tokyo, p.1159 (1989).
- Shoemake, K.: Animating Rotation with Quaternion Curves, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '85)*, pp.245–254 (1985).
- Shoemake, K.: Quaternion Calculus for Animation, *Math of SIGGRAPH (ACM SIGGRAPH '91 Course Notes #2)* (1991).

- Kim, M.-J., Kim, M.-S. and Shin, S.Y.: A General Construction Scheme for Unit Quaternion Curves with Simple High Order Derivatives, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '95)*, pp.369–376 (1995).
- Kantor, I.L. and Solodovnikov, A.S.: *Hypercomplex Numbers*, Springer-Verlag (1989).
- 三浦憲二郎：4 元数積分曲線、グラフィックスと CAD/Visual Computing 合同シンポジウム'97 予稿集, pp.101–109 (1997).
- 三浦憲二郎：単位 4 元数積分曲線、情報処理学会論文誌, Vol.38, No.11, pp.2227–2236 (1997).

付 錄

A.1 Bézier 4 元数曲線の 1 次微分

Bézier 4 元数曲線 $q(t)$ が次式で与えられているとする：

$$\begin{aligned} q(t) &= \exp(\hat{v}(t)\beta(t)) \\ &= \cos(\beta(t)) + \hat{v}(t) \sin(\beta(t)). \end{aligned} \quad (63)$$

ここで、

$$\hat{v}(t) = (0, 0, \cos(\alpha(t)), \sin(\alpha(t))), \quad (64)$$

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^n B_{n,i}(t)\alpha_i, \quad (65)$$

$$\beta(t) = \sum_{i=0}^n B_{n,i}(t)\beta_i. \quad (66)$$

1 次微分 $dq(t)/dt$ は、

$$\frac{dq(t)}{dt} = q(t)\omega(t) \quad (67)$$

で与えられ、

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \frac{1}{2}(0, -\sin^2(\beta(t)), -\sin(\alpha(t)), \\ &\quad \cos(\alpha(t))) \sin(2\beta(t)) \frac{d\alpha(t)}{dt} + \\ &\quad (0, 0, \cos(\alpha(t)), \sin(\alpha(t))) \frac{d\beta(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (68)$$

したがって、 $\omega(0)$ と $\omega(1)$ は、

$$\begin{aligned} \omega(0) &= \frac{n}{2}(0, -\sin^2(\beta_0), -\sin(\alpha_0), \\ &\quad \cos(\alpha_0)) \sin(2\beta_0)(\alpha_1 - \alpha_0) + \\ &\quad n(0, 0, \cos(\alpha_0), \sin(\alpha_0))(\beta_1 - \beta_0), \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \omega(1) &= \frac{n}{2}(0, -\sin^2(\beta_n), -\sin(\alpha_n), \\ &\quad \cos(\alpha_n)) \sin(2\beta_n)(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + \\ &\quad n(0, 0, \cos(\alpha_n), \sin(\alpha_n))(\beta_n - \beta_{n-1}). \end{aligned} \quad (70)$$

A.2 Bézier QI 曲線の 1 次、2 次微分

長さが l である Bézier QI 曲線は、

$$\mathbf{C}(s) = \mathbf{P}_0 + \int_0^s q\left(\frac{s}{l}\right) \hat{\mathbf{v}}_0 q^{-1}\left(\frac{s}{l}\right) ds \quad (71)$$

$$= \mathbf{P}_0 + l \int_0^t q(t) \hat{\mathbf{v}}_0 q^{-1}(t) dt, \quad (72)$$

と表される。ここで、 $u = s/l$ であり、 $q(t)$ は式(63)で与えられるとする。1次微分： $d\mathbf{C}(s)/ds$ 、2次微分： $d^2\mathbf{C}(s)/ds^2$ は、

$$\frac{d\mathbf{C}(s)}{ds} = q(t) \hat{\mathbf{v}}_0 q^{-1}(t), \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{C}(s)}{ds^2} &= \frac{1}{l} \left(\frac{dq(t)}{dt} \hat{\mathbf{v}}_0 q^{-1}(t) \right. \\ &\quad \left. + q(t) \hat{\mathbf{v}}_0 \frac{dq^{-1}(t)}{dt} \right) \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{l} \left(q(t) \omega(t) \hat{\mathbf{v}}_0 q^{-1}(t) \right. \\ &\quad \left. - q(t) \hat{\mathbf{v}}_0 \omega(t) q^{-1}(t) \right) \end{aligned} \quad (75)$$

$$= \frac{2}{l} q(t) [\omega(t), \hat{\mathbf{v}}_0] q^{-1}(t) \quad (76)$$

となる。ここで、 $[,]$ は 2 つの純粹なベクトル 4 元数の外積を意味し、 $\omega(s)$ は式(68)で与えられる。式(69)と(70)で与えられる $\omega(0)$ 、と $\omega(1)$ を用いて、 $d^2\mathbf{C}(0)/ds^2$ と $d^2\mathbf{C}(l)/ds^2$ は、

$$\frac{d^2\mathbf{C}(0)}{ds^2} = \frac{2}{l} q(0) [\omega(0), \hat{\mathbf{v}}_0] q^{-1}(0), \quad (77)$$

$$\frac{d^2\mathbf{C}(l)}{ds^2} = \frac{2}{l} q(1) [\omega(1), \hat{\mathbf{v}}_0] q^{-1}(1) \quad (78)$$

となる。

(平成 9 年 6 月 13 日受付)

(平成 10 年 5 月 8 日採録)

三浦憲二郎（正会員）



昭和 34 年生。昭和 57 年東京大学工学部精密機械工学科卒業。昭和 59 年同大学院修士課程修了。同年、キヤノン（株）入社。機械系 CAD/CAM システムの開発に従事。平成 3 年コーネル大学機械工学科博士課程修了。平成 5 年会津大学コンピュータ理工学部コンピュータソフトウェア学科助教授。平成 9 年静岡大学工学部機械工学科助教授。Ph.D. 曲線・曲面の設計、CAD/CAM、要素自動分割、マイクロマシン等に興味を持つ。ACM, ASME 各会員。