Nourein 公式を用いた Padé 近似計算について

椎 原 浩 輔†

Padé 近似は幅広い応用を持つことが知られている．しかしながら一般に，任意に与えられた関数に対し，その Padé 近似を高次まで計算する際，Padé 近似の係数を厳密に求めようとすると，従来の計算方法では多くの場合，膨大な計算時間を必要とする．本論文では，べき級数に対して適用される Nourein 公式を利用することにより，一定の条件を満たす代数関数に対して非常に高速に，ある特定の高次数の Padé 近似が計算可能であることを示す．また，本算法と数式処理システム *Mathematica* の組込み関数を利用した場合の計算時間を比較し，本算法の有効性を示す．

Padé Approximation with the Nourein's Formula

Kosuke Shiihara†

The Padé approximation of high degree is a very powerful tool for many applications. However, the conventional methods require a lot of time when the degree of the Padé approximation is high. In this paper, we present an efficient method based on the Nourein's formula, which is applied to a power series root Hensel construction, to calculate the Padé approximation if a given function is an algebraic function and satisfies some conditions. As an example, we compute the Padé approximation of an algebraic function with our new method and show superiority of our method.

1. はじめに

関数 $f(x)$ に対し，既約な有理関数

$$\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} \qquad (1)$$

で，次の条件を満足するものを $f(x)$ の $[m,n]$-Padé 近似という．

$$f(x)\cdot(b_n x^n + \cdots + b_0) - (a_m x^m + \cdots + a_0) \equiv 0 \pmod{x^{m+n+1}}.$$

式 (1) の係数 a_i, b_j $(i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n)$ は $a_m = 1$ とすることによって，一意に決定される．Padé 近似は数学的に重要であるばかりでなく，多くの応用面において非常に強力なツールとしての役割を担っている．Pommerenke[8] は次のことを示し，次数の高い（すなわち m と n が大きい）Padé 近似の有用性に触れている："$f(z)$ を原点で解析的かつ可算個の特異点を除く全複素平面で解析的な関数とする．このとき特異点を除く任意の点 z と任意の自然数 m, n に対し，比 m/n がつねに一定であるような $[m,n]$-Padé 近似に対し，$\lim_{n\to\infty}|f(z) - [m,n]\text{-Padé}| = 0$ が成立する"．すなわち Padé 近似を行う際に分子と分母の次数をともに十分大きくとれば，近似式が収束半径に関係なくもとの関数に各点収束するのである．

これまでの Padé 近似計算の研究成果[1),2)] としては，Shanks[10)] と Wynn[11)] による ε-アルゴリズムと Padé テーブルとの関連付けや，Brent，Gustavson，Warner ら[3),4)] による高速再帰計算などをあげることができる．しかしながら，前者は主として浮動小数点演算を用いる数値計算を対象としているため，係数誤差をまったく含まない厳密計算（数式計算）に向いているとはいえず，また後者は再帰計算によるものであり，本論で提案する反復法とは方法を異にする．

本論では，べき級数根のヘンゼル構成を行う際に用いられる Nourein 公式[7)] を利用し，**C** 上の二変数多項式を最小多項式に持つ代数関数 $f(x)$ の Padé 近似について述べる．通常の方法が，与えられた関数を一度べき級数に展開し，それを有理式化するのに対し，本論で述べる方法は有理式形式を直接的に計算することに特徴がある．Nourein 公式はもともと一変数多項式の近似根を求める公式で，誤差項に関し任意収束次数を持つものであった．一方，Kitamoto[6)] はこの方法を多変数多項式のべき級数根の解法へと拡張し，任意

† 株式会社さくら銀行投資銀行 DC 金融市場営業部
Derivatives & Fixed Income Division, Investment Banking Division-Company, The Sakura Bank, Limited.

次数で収束するヘンゼル構成を提示した．ヘンゼル構成については文献 6) に詳しいサーベイが記述されている．

本論文は次のように構成されている．2 章で Nourein 公式について簡単に触れ，3 章で Padé 近似と Nourein 公式の関係について述べる．4 章では本論文にて提案される方法が，実際の数式処理システムに搭載されているアルゴリズムと比べて，高速であることを実例を用いて示す．最後に 5 章で結論を述べる．

2. 諸定義

まず本論文で用いるいくつかの用語を定義する．また，本論文で考察される多項式は特に断りのない限り複素数体 $\mathbf{C}$ 上で定義されているものとする．

定義 1（無平方） 多項式 $F(x,y)$ が多重因子を持たないとき，$F(x,y)$ は無平方であるという． ■

定義 2（モニック） 多項式 $F(x,y)$ の，変数 y に関する最高次項の係数が 1 であるとき，$F(x,y)$ は変数 y に関してモニックであるという． ■

定義 3（全次数） $F(x,y)=\sum c_{ij}x^iy^j$，$c_{ij}\in\mathbf{C}$ に対し，$\max\{i+j \mid c_{ij}\neq 0\}$ を $F(x,y)$ の全次数といい $\mathrm{tdeg}F(x,y)$ と表す． ■

二変数多項式 $F(x,y)$ は，$F(0,y)$ がモニックかつ無平方なとき $\mathbf{C}$ 上で次のように因数分解される．

$$\begin{aligned}&F(0,y)=(y-g_1^{(0)})\cdots(y-g_r^{(0)}),\\&y-g_i^{(0)}\neq y-g_j^{(0)}\quad(i\neq j),\quad g_i^{(0)}\in\mathbf{C},\\&r=\deg_y F(x,y).\end{aligned}$$

このとき，ヘンゼル構成によって次式を満たす $g_i^{(k)}(x)\in\mathbf{C}[x]$ $(i=1,\ldots,r)$ を構成できる．

$$\begin{aligned}F(x,y)&\equiv(y-g_1^{(k)}(x))\\&\quad\cdots(y-g_r^{(k)}(x))\pmod{x^{k+1}},\qquad(2)\\y-g_i^{(k)}(0)&=y-g_i^{(0)}.\end{aligned}$$

ヘンゼル構成の詳細については文献 5), 9) を参照されたい．

定義 4（m 次の近似根） 式 (2) において x の次数が $(m+1)$ 以上（ただし $m\le k$）の項を打ち切った各 $g_i^{(k)}(x)$ を $F(x,y)$ の m 次の近似根といい，$g_i^{(m)}(x)$ で表される． ■

定義 5（次数 p で収束するヘンゼル構成） $F(0,y)$ が無平方となるような多項式 $F(x,y)$ に対し，ヘンゼル構成の法が $x^1\to x^p\to x^{p^2}\to\cdots\to x^{p^k}\to\cdots$ のように上げられるとき，このヘンゼル構成を次数 $p\ge 2$ で収束するヘンゼル構成という． ■

次に文献 6) で述べられている結果について簡単に触れておく．そこではヘンゼル構成の手法を利用し，方程式 $F(x,y)=0$ の近似根を計算する反復方法について述べられており，さらにその反復が任意の収束次数を持つように反復公式を構成できることが示されている．反復公式 $I_p(x,y)$ は以下で与えられ，Nourein 公式と呼ばれる．

$$\begin{aligned}y\leftarrow I_p(x,y)&\\=y-\frac{C_0}{C_1-C_0\dfrac{\tilde H_p}{H_p}}&\\=\frac{yC_1H_p-yC_0\tilde H_p-C_0H_p}{C_1H_p-C_0\tilde H_p}.&\qquad(3)\end{aligned}$$

ここで C_r, H_p, $\tilde H_p$ はそれぞれ次のように定義される（$|\cdot|$ は行列式を表す）．

$$C_r=\frac{1}{r!}\left(\frac{\partial^r F(x,y)}{\partial y^r}\right),$$

$$H_p=\begin{vmatrix}C_1&C_0&0&\cdots&0\\C_2&C_1&C_0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\C_{p-1}&C_{p-2}&C_{p-3}&\cdots&C_0\\C_p&C_{p-1}&C_{p-2}&\cdots&C_1\end{vmatrix},$$

$$\tilde H_p=\begin{vmatrix}C_2&C_0&0&\cdots&0\\C_3&C_1&C_0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\C_p&C_{p-2}&C_{p-3}&\cdots&C_0\\C_{p+1}&C_{p-1}&C_{p-2}&\cdots&C_1\end{vmatrix},$$

ただし，$H_0=1$, $\tilde H_0=0$ と定める．

次の定理によって次数 p で収束するヘンゼル構成が与えられる．

定理 1（Kitamoto[6]） $F(x,y)$ を無平方かつ変数 y に関してモニックな二変数多項式とし，$g^{(k)}(x)$ を $F(x,y)=0$ の k 次近似根とする．すなわち $F(x,g^{(k)}(x))\equiv 0 \pmod{x^{k+1}}$ を満足すると仮定する．このとき $F(0,y)$ が無平方であれば，$I_{p-2}(x,g^{(k)}(x))$ $(p\ge 2)$ は $F(x,y)=0$ の $(p(k+1)-1)$ 次近似根である．すなわち $F(x,I_{p-2}(x,g^{(k)}(x)))\equiv 0 \pmod{x^{p(k+1)}}$ が成立する．

証明 文献 6) を参照せよ． ■

定理 1 より $F(x,y)=0$ の近似根が p 次で収束する反復公式は $I_{p-2}(x,y)$ で与えられることが分かる．なお，$p=2, 3, 4$ の場合の反復式を**表 1** に示した．

表 1 $p=2,\ 3,\ 4$ の場合の反復公式
（記号 $'$ で変数 y についての偏微分を表す）
Table 1 The iteration formula for $p=2$, 3 and 4 (For the simplicity, we use the prime symbol for the partial derivative with respect to the variable y).

次数 p	反復式 I_{p-2}
2	$y-\dfrac{F(x,y)}{F'(x,y)}$
3	$y-\dfrac{F(x,y)F'(x,y)}{(F'(x,y))^2-F(x,y)F''(x,y)/2}$
4	$y-\dfrac{F(x,y)((F'(x,y))^2-F(x,y)F''(x,y)/2)}{(F'(x,y))^3-F(x,y)F'(x,y)F''(x,y)+(F(x,y))^2F'''(x,y)/6}$

3. Nourein 公式と Padé 近似の関係

本章では，式 (3) がどのように Padé 近似計算に適用できるかを議論する．まず初めに簡単のため $p=2$, 3, 4 の場合についての考察を行い，次に任意の自然数 $p\geq 2$ の場合について述べる．式 (3) はもともと有理式の形をしており，ヘンゼル構成の場合は変数 x に関するべき級数根へ変換する必要があるが，以下の議論では有理式のままを考える．

補題 1 $F(x,y)$ を二変数多項式で $\deg_y F(x,y)=\mathrm{tdeg}F(x,y)$ を満たすものとする．また，$p=2,3$ あるいは 4 と仮定する．このとき式 (3) で定義される反復式 I_{p-2} は次の形に書くことができる．

$$\frac{cy^s+\displaystyle\sum_{i+j\leq s}c_{ij}x^iy^j}{dy^{s-1}+\displaystyle\sum_{k+l\leq s-1}d_{kl}x^ky^l},\quad (c,d,c_{ij},d_{kl}\in\mathbf{C}).$$

証明 $\deg_y F(x,y)=\mathrm{tdeg}F(x,y)$ であるから $e=\deg_y F(x,y)$ とおけば，$F(x,y)$ を

$$F(x,y)=ay^e+\sum_{i+j\leq e}a_{ij}x^iy^j,\quad (a,\ a_{ij}\in\mathbf{C})$$

と表すことができる．したがって，$r\leq e$ を満たす任意の自然数 r に対し

$$\begin{aligned}C_r&=\frac{1}{r!}\cdot\frac{\partial^rF(x,y)}{\partial y^r}\\&=a\begin{pmatrix}e\\r\end{pmatrix}y^{e-r}+\sum_{i+j\leq e,\ j\geq r}a_{ij}\begin{pmatrix}j\\r\end{pmatrix}x^iy^{j-r}\end{aligned}$$

が成立する．$p=2$ のとき，式 (3) で定義された反復式 I_0 は $I_0=y-F(x,y)/F_y(x,y)$ と表される．したがって次式が得られる．

$$\begin{aligned}I_0&=y-\frac{ay^e+\sum a_{ij}x^iy^j}{aey^{e-1}+\sum a_{ij}jx^iy^{j-1}}\\&=\frac{a(e-1)y^e+\sum a_{ij}(j-1)x^iy^j}{aey^{e-1}+\sum a_{ij}jx^iy^{j-1}}.\end{aligned}$$

よって $p=2$ の場合に題意が示された．$p=3,4$ の場合についても同様にして題意を示すことができる．■

定理 2 $y=\phi(x)$ を代数関数とし，$F(x,y)$ を $y=\phi(x)$ の最小多項式とする．ただし，$F(x,y)$ は

$$\deg_y F(x,y)=\mathrm{tdeg}F(x,y)\qquad(4)$$

を満たし $F(0,y)$ が無平方であると仮定する．また $I_{p-2}(x,y)$ を式 (3) で定義された反復式とし，その分子の変数 y に関する次数を s とする．さらに，

$$\begin{cases}m\geq n+1,\\(2s-p-1)m+(1-p)(n+1)=0,\\p=2,\ 3\ \text{あるいは}\ 4\end{cases}\qquad(5)$$

を満たす自然数 $m,\ n$ が存在すると仮定する．このとき $\psi(x)$ が $\phi(x)$ の $[m,n]$-Padé 近似であれば，$I_{p-2}(x,\psi(x))$ は $\psi(x)$ の $[ms,m(s-1)+n]$-Padé 近似である．

証明 仮定より，$\psi(x)$ は $\phi(x)$ の $[m,n]$-Padé 近似なので，$\psi(x)$ を次のように表すことができる．

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\frac{x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0}\qquad(6)\\&\equiv\phi(x)\quad(\mathrm{mod}\ x^{m+n+1})\\&\quad\begin{pmatrix}a_i,\ b_j\in\mathbf{C},\ j=0,1,\ldots,n\\i=0,1,\ldots,m-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

補題 1 より，反復式は次のように表される．

$$I_{p-2}(x,y)=\frac{cy^s+\displaystyle\sum_{i+j\leq s}c_{ij}x^iy^j}{dy^{s-1}+\displaystyle\sum_{k+l\leq s-1}d_{kl}x^ky^l}.\qquad(7)$$

式 (6) を式 (7) に代入し次式を得る．

$$I_{p-2}(x,\psi(x))$$

$$=\frac{c\left(\dfrac{x^m+\cdots+a_0}{b_nx^n+\cdots+b_0}\right)^s+\sum_{i+j\le s}c_{ij}x^i\left(\dfrac{x^m+\cdots+a_0}{b_nx^n+\cdots+b_0}\right)^j}{d\left(\dfrac{x^m+\cdots+a_0}{b_nx^n+\cdots+b_0}\right)^{s-1}+\sum_{k+l\le s-1}d_{kl}x^k\left(\dfrac{x^m+\cdots+a_0}{b_nx^n+\cdots+b_0}\right)^l}$$

$$=\frac{c\,(x^m+\cdots)^s+\sum_{i+j\le s}c_{ij}x^i\,(x^m+\cdots)^j\,(b_nx^n+\cdots)^{s-j}}{d\,(x^m+\cdots)^{s-1}\,(b_nx^n+\cdots)+\sum_{k+l\le s-1}d_{kl}x^k\,(x^m+\cdots)^l\,(b_nx^n+\cdots)^{s-l}}. \tag{8}$$

このとき，$i+j\le s$ を満たす自然数 i，j に対し

$$\begin{aligned}\deg\{c\,(x^m+\cdots)^s\}&=ms\\&=m(s-j)+mj\\&\ge(n+1)(s-j)+mj\\&=n(s-j)+(s-j)+mj\\&\ge n(s-j)+i+mj\\&=i+mj+n(s-j)\\&=\deg\left\{c_{ij}x^i\,(x^m+\cdots)^j\,(b_nx^n+\cdots)^{s-j}\right\}.\end{aligned}$$

が成立するので，式 (8) の分子の次数は ms であることが分かる．同様に，$k+l\le s-1$ を満たす自然数 k，l に対し

$$\begin{aligned}\deg\left\{d\,(x^m+\cdots)^{s-1}\,(b_nx^n+\cdots)\right\}&=m(s-1)+n\\&=m(s-l-1)+ml+n\\&\ge(n+1)(s-l-1)+ml+n\\&=n(s-l)+(s-1-l)+ml\\&\ge n(s-l)+k+ml\\&=k+ml+n(s-1)\\&=\deg\left\{d_{kl}x^k\,(x^m+\cdots)^l\,(b_nx^n+\cdots)^{s-l}\right\}.\end{aligned}$$

が成り立つので，式 (8) の分母の次数として $m(s-1)+n$ を得る．定理 1 より式 (8) は $I_{p-2}(x,\psi(x))\equiv\phi(x)$ $(\mathrm{mod}\ x^{p(m+n+1)})$ を満たす．すなわち式 (8) の級数展開は $(p(m+n+1)-1)$ 次の項まで $\phi(x)$ と一致している．ここで式 (5) を用いて

$$\begin{aligned}ms+(m(s-1)+n)&=(2s-1)m+n\\&=p(m+n+1)-1\end{aligned}$$

を得る．したがって式 (8) は $\phi(x)$ の $[ms,m(s-1)+n]$-Padé 近似である． ■

例 1 代数関数 $\phi(x)$ と自然数 p をそれぞれ $\phi(x)=\sqrt{x+1}$，$p=2$ とする．$\phi(x)$ の最小多項式は $F(x,y)=y^2-(x+1)$ であり，これは式 (4) を満たしている．このとき反復式は $I_0=(y^2+x+1)/2y$ で与えられるから $s=2$．したがって，式 (5) より，関係式 $m=n+1$ を得る． ■

定理 2 で導入した次数条件，式 (4) および式 (5) はつねに成り立つとは限らない．たとえば，次に示す例では (5) を満たす m，n，p は存在しない．

例 2 代数関数を $\phi(x)=(x^2-x+1)^{1/3}$ とすると，$\phi(x)$ の最小多項式は $F(x,y)=y^3-(x^2-x+1)$ である．

$$\begin{cases}p=2\ \text{のとき}\ s=3\ \text{となり}\ 3m=n+1,\\p=3\ \text{のとき}\ s=4\ \text{となり}\ 2m=n+1,\\p=4\ \text{のとき}\ s=7\ \text{となり}\ 3m=n+1\end{cases}$$

を得る．しかしながら，いずれの場合においても $m\ge n+1$ は満たされない． ■

次に定理 2 を $p\ge5$ の場合に一般化した定理を述べる．

定理 3 $y=\phi(x)$ を代数関数とし，$F(x,y)$ を $\phi(x)$ の最小多項式とする．ただし，$F(0,y)$ は無平方であると仮定する．$p\ge2$ を自然数，

$$I_{p-2}(x,y)=\left(\sum_{i,j}c_{ij}x^iy^j\Big/\sum_{k,l}d_{kl}x^ky^l\right)$$

を式 (3) で定義された反復式とし，さらに

$$e=\max\left\{\deg_y\left(\textstyle\sum_{i,j}c_{ij}x^iy^j\right),\ \deg_y\left(\textstyle\sum_{k,l}d_{kl}x^ky^l\right)\right\}$$

とおく．また，

$$\begin{aligned}&\max{}_{i,j}\{\,i+jm+(e-j)n\mid c_{ij}\ne0\,\}\\&\quad+\max{}_{k,l}\{\,k+lm+(e-l)n\mid d_{kl}\ne0\,\}\\&\qquad=p(m+n+1)-1.\end{aligned}\tag{9}$$

が満たされるような自然数 m，n を選ぶことができたと仮定する．このとき $\psi(x)$ が $\phi(x)$ の $[m,n]$-Padé 近似であれば，$I_{p-2}(x,\psi(x))$ は $\psi(x)$ の $[\tilde{m},\tilde{n}]$-Padé 近似である．ここで $\tilde{m}=\max_{i,j}\{\,i+jm+(e-j)n\mid c_{ij}\ne0\,\}$，$\tilde{n}=\max_{k,l}\{\,k+lm+(e-l)n\mid d_{kl}\ne0\,\}$．

証明 定理 2 と同様にして $\psi(x)$ を $\phi(x)$ の $[m,n]$-Padé 近似としたとき，$I_{p-2}(x,\psi(x))$ は有理関数で分

表 2 計算時間の比較（時間データの単位は秒）
Table 2 Computing time comparison (Timing data are in seconds).

$\sqrt{x+1}$ の Padé 近似	組込み関数を利用	我々の提案する方法による
$\dfrac{x^3+18x^2+48x+32}{6x^2+32x+32}$	0.11	0.11
$\dfrac{x^6+72x^5+840x^4+3584x^3+6912x^2+6144x+2048}{12x^5+280x^4+1792x^3+4608x^2+5120x+2048}$	0.25	0.11
$\dfrac{x^{12}+\cdots+132120576x^2+50331648x+8388608}{24x^{11}+\cdots+110100480x^2+46137344x+8388608}$	1.05	0.11
$\dfrac{x^{24}+\cdots+1688849860263936x+140737488355328}{48x^{23}+\cdots+1618481116086272x+140737488355328}$	13.35	0.16
$\dfrac{x^{48}+\cdots+39614081257132168796771975168}{96x^{47}+\cdots+39614081257132168796771975168}$	433.09	0.27

母と分子の次数がそれぞれ $\max_{k,l}\{k+lm+(e-l)n \mid d_{kl}\neq 0\}$, $\max_{ij}\{i+jm+(e-j)n \mid c_{ij}\neq 0\}$ となることが示される．また，定理 1より $I_{p-2}(x,\psi(x))\equiv\phi(x) \pmod{x^{p(m+n+1)-1}}$ が満たされる．したがって，これらのことから題意が示される． ■

例 3 代数関数 $\phi(x)$ と p をそれぞれ $\phi(x)=\sqrt{x+1}$, $p=5$ とする．$\phi(x)$ の最小多項式は $F(x,y)=y^2-(x+1)$ であり，これは定理 3 の仮定を満たしている．このとき反復式は $I_3=(y^5+10xy^3+10y^3+5x^2y+10xy+5y)/(5y^4+10xy^2+10y^2+x^2+2x+1)$ であるから $e=5$ を得る．式 (9) より，自然数 m, n として $m=n$ あるいは $m=n+1$ を満たすものを選ぶことができる．$m=n$ のとき $\tilde{m}=5m+2$, $\tilde{n}=5m+2$ を，$m=n+1$ のとき $\tilde{m}=5m$, $\tilde{n}=5m-1$ をそれぞれ得る． ■

4. 計 算 例

本章ではいくつかの具体例を示し，従来の方法を利用した場合との計算時間の比較を行う．我々の提案する方法を *Mathematica* 3.0 上に実装し，組込み関数との計算時間の比較を行った．なお，計算は GATEWAY 2000 G6-180（Windows 95，メモリ 64 MB）上で行った．

例 4 代数関数 $\phi(x)=\sqrt{x+1}$ の高次 Padé 近似を計算する．$\phi(x)$ の最小多項式は $F(x,y)=y^2-(x+1)$ で与えられる．自然数 p を $p=2$ とすると，反復式 I_0 は $I_0=(y^2+x+1)/2y$ と表される．式 (9) より，自然数 m, n として $m=n+1$ または $m=n$を満たすものを選ぶことができる．よって，定理 3 より $\phi(x)$ の Padé 近似のうち $[n+1,n]$-型と $[n,n]$-型を初期値として用い，$[k+1,k]$-型高次 Padé 近似を再帰的に計算できることが分かる．たとえば，

$$
\begin{aligned}
&I_0(x,[3,2]\text{-Padé})\\
&=I_0\left(x,\frac{x^3+18x^2+48x+32}{6x^2+32x+32}\right)\\
&=\frac{x^6+72x^5+840x^4+3584x^3+6912x^2+6144x+2048}{12x^5+280x^4+1792x^3+4608x^2+5120x+2048}\\
&=[6,5]\text{-Padé},
\end{aligned}
$$

などと計算できる（**表 2**）．

表 3 計算時間の比較（時間データの単位は秒）
* はメモリ不足のため計算不可能であったことを示す．
Table 3 Computing time comparison (Timing data are in seconds). The symbol * shows that the computation failed due to out of memory.

Padé 近似の次数	組込み関数を利用	我々の提案する方法による
[1, 1]	0.06	0.06
[7, 7]	0.38	0.11
[37, 37]	107.27	0.38
[187, 187]	*	5.33

例 5 例 3 で与えられた代数関数 $\phi(x)=\sqrt{x+1}$, 収束次数 $p=5$ に対して，高次の Padé 近似計算を行う．定理 3 より，自然数 m, n として $m=n$ あるいは $m=n+1$ を満たすものを選ぶことができ，$[n,n]$-Padé, $[n+1,n]$-Padé を I_3 によって反復させると，それぞれ $[5n+2,5n+2]$-Padé, $[5n+5,5n+4]$-Padé が得られる（**表 3**）．

例 6 代数関数を $\phi(x)=x+\sqrt{x+1}$ とする．$\phi(x)$

表 4 計算時間の比較（時間データの単位は秒）
* はメモリ不足のため計算不可能であったことを示す．
Table 4 Computing time comparison (Timing data are in seconds). The symbol * shows that the computation failed due to out of memory.

Padé 近似の次数	組込み関数を利用	我々の提案する方法による
[2, 1]	0.08	0.08
[6, 5]	0.22	0.09
[18, 17]	4.15	0.34
[54, 53]	*	5.32

の最小多項式は $F(x,y)=y^2-2yx+x^2-x-1$ で与えられる．$p=3$ とすると，反復式は $I_1=(y^3-3x^2y+3xy+3y+2x^3-2x^2-2x)/(3y^2-6xy+3x^2+x+1)$ と表される．定理 3 より，自然数 m, n として $m=n+1$ を満たすものを選ぶことができ，$[n+1,n]$-Padé を I_1 によって反復させると，$[3n+3,3n+2]$-Padé が得られる．計算例を**表 4** に示した．

5. 結　　論

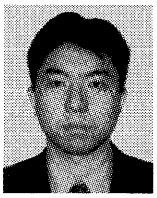
本論では，一定の条件が課された代数関数の Padé 近似の高速計算法について述べた．現状では我々の提案した方法を適用できる関数の範囲はそれほど広いものではない．さらなる研究として適用範囲を広げることが期待される．一方，例で示したように我々の提案した方法が適用できる場合には，従来利用されてきた方法に比べ次数の高い Padé 近似を効率的かつ直接的に計算可能である．1 章で述べたように，次数の高い Padé 近似は非常に好ましい性質を持っており，本論で提案される算法は有用であると思われる．

謝辞 本論文を作成するにあたり，さまざまな面で筆者を励まし導いてくださいました筑波大学数学系・北本卓也助手に心より感謝いたします．

参　考　文　献

1) Baker, Jr., G.A. and Graves-Morris, P.: *Padé Approximants*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Addison-Wesley (1981).
2) Baker, Jr., G.A. and Graves-Morris, P.: *Padé Approximants*, 2nd Edition, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS (1996).
3) Brent, R.P., Gustavson, F.G. and Yun, D.Y.Y.: Fast solution of Toepolitz systems of equations and computation of Padé approximants, *J. Algorithms*, Vol.1, pp.259–95 (1980).
4) Gragg, W.B., Gustavson, F.G., Warner, D.D. and Yun, D.Y.Y.: On fast computation of superdiagonal Padé fractions, *Math. Programming Study* (1982).
5) Hensel, K.: *Theorie der algebraischen Zahlen*, Teubner, Berlin (1908).
6) Kitamoto, T.: Hensel Construction with an Arbitrary Degree of Convergence, *Japan J. Indus. Appl. Math.*, Vol.13, pp.203–215 (1996).
7) Nourein, A.W.: Root Determination by Use of Padé Approximations, *BIT*, Vol.16, No.3, pp.291–297 (1976).
8) Pommerenke, C.: Padé approximants and convergence in capacity, *J. Math. Annal. Appl.*, Vol.41, pp.775–780 (1973).
9) Sasaki, T. and Kako, F.: Solving Multivariate Algebraic Equation by Hensel Construction, preprint (University of Tsukuba and Nara Women University), p.22 (Jan. 1993).
10) Shanks, D.: Nonlinear transformations of divergent and slowly convergent sequences. *J. Math. Phys.*, Vol.34, pp.1–42 (1955).
11) Wynn, P.: L'ε-algorithmo e la tavola di Padé, *Rendi. Mat. Roma*, Vol.20 (1961).

(平成 9 年 7 月 10 日受付)
(平成 10 年 5 月 8 日採録)



椎原　浩輔（正会員）
昭和 46 年生．平成 10 年筑波大学大学院博士課程数学研究科修了．同年（株）さくら銀行入行．現在投資銀行 DC 金融市場営業部トレーディング室勤務．博士（数学）．