

相関論理 R_c における強相関性原理について

5C-2

多川 孝央 程 京徳 牛島 和夫

九州大学工学部

1. はじめに

本論文では、知識表現と知識推論の基礎として相関論理を用いる際に問題となる連言含意のパラドクスと選言含意のパラドクスについて、形式的な特徴を示す。またその特徴より、ある論理式がそれらのパラドクスでないと言えるために形式的に満足すべき必要条件として、強相関原理を提案する。最後に、連言含意のパラドクスのない論理体系を構築する目的で提案された相関論理の体系 R_c について、強相関性原理により評価を行う。

2. 古典数理論理と実質含意のパラドクス

現在知識を論理によって表現し推論する場合、主に古典数理論理とその拡張が表現と推論の基礎として用いられている。古典数理論理においては、人間の論理思考において中心的役割を果たす帰結関係を、前件と後件の真理値関数である実質含意によって表現する。実質含意は人間の論理的思考における帰結関係と本質的に異なるものであり、そのため古典数理論理を知識の表現に用いると実質含意のパラドクスという現象が起きる。これは人間の思考における推論を基準にすると奇異で妥当とはいえない帰結関係を、古典数理論理においては正しいものと認めざるを得ないというものである^[1]。このため古典数理論理に基礎をおく知識処理システムは、帰結関係を推論する際に、人間にとって正しい知識から誤った帰結関係を推論する可能性がある。よって古典数理論理は知識表現には適切でない^[2]。

3. 相関論理と連言含意のパラドクス

相関論理は、古典数理論理よりも人間にとってより自然である論理をめざして構築されたものである。基本的な考え方は、 $A \Rightarrow B$ という論理式が「もし A ならば B である」という帰結関係の妥当な表現と言えるためには、 A と B の間に意味的に関係するものを持つ(これを相関性(relevance)と呼ぶ)べきだというものであり、それは $A \Rightarrow B$ という形の全ての相関論理の論理定理において A と B に出現する変数に共通するものがある、という性質で実現されている。これを相関性原理(relevance principle)という^[1]。相関論理の特徴は、帰結関係の自然な表現として内包的な基本論理結合子を持ち、実質含意のパラドクスを論理定理として持たないということで

ある。これらの特徴より、相関論理は古典数理論理よりも知識表現のモデルとしてより適切であると考えられ、注目されてきた。相関論理の体系には R 、 E 、 T などが知られている^[1]。

しかし近年になってこれらの相関論理にも連言含意のパラドクス、選言含意のパラドクスという別の種類のパラドクスが存在することが指摘された^[2]。

連言含意のパラドクスとは、例えば以下のようなものである。多くの相関論理において公理として存在する $A \wedge B \Rightarrow A$ という論理式について、前件に、帰結関係に関する推論が行われる際に後件 A の真偽に何の影響も与えない B が連言項として存在している。この場合、 B については何の制約もなく、後件 A の否定である $\neg A$ でさえあっても構わない。このため例えば「雪は白く、かつ $1+1=3$ であるならば、雪は白い」「雪は白く、かつ雪は白くないならば、雪は白い」これらがすべて妥当なものとされてしまう。

一方選言含意のパラドクスとは、例えば $A \Rightarrow A \vee B$ について、帰結関係に関する推論が行われる際に、後件の選言項 B の存在に関して、上と類似した問題がおきるというものである。

以上はそれぞれのパラドクスの単純なものである。もっと複雑な連言含意のパラドクスの例としては、 $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \wedge C \Rightarrow B)$ がある。これに $A \Rightarrow B$ を与えて推論規則 Modus Ponens を適用して得られる $A \wedge C \Rightarrow B$ は、前件に後件 B の真偽に関係のない C が連言項として存在する。これは人間の思考からすると奇異であり妥当でない。このような複雑な連言含意のパラドクスは単純な連言含意のパラドクスを含む論理体系から導くことができる。複雑な選言含意のパラドクスも同様にして得ることが出来る。

これらのパラドクスが存在するため、既存の相関論理は、古典数理論理と同様に知識処理システムにおいて人間にとって正しい知識から誤った帰結関係を推論する可能性があり、知識の表現と推論の基礎として採用するのは適切ではない。このため、実質含意のパラドクスも、連言含意の(あるいは選言含意の)パラドクスもない論理体系が望まれている^[2]。

4. 強相関性原理

連言含意の(あるいは選言含意の)パラドクスについて考察するため、命題相関論理 R について知られている形式的な特徴を紹介する。

式あるいは部分式 X について、 X を構成する部分式について前件部と後件部を以下のように定義する^[1]。

Study on Strong Relevance Principle in Relevant Logic R_c

Takahiro TAGAWA, Jingde CHENG, Kazuo USHIJIMA
Faculty of Engineering,
Kyushu University

(1) X は X の後件部に属する。(2) $\neg B$ が X の前件部〔後件部〕に属する場合、 B は X の後件部〔前件部〕に属する。(3) $B \wedge C$ または $B \vee C$ が X の前件部〔後件部〕に属する場合、 B と C は X の前件部〔後件部〕に属する。(4) $B \Rightarrow C$ が X の前件部〔後件部〕に属する場合、 B は X の後件部〔前件部〕に、 C は X の前件部〔後件部〕に属する。

この定義は Gentzen の sequent 演算に由来するものであり、ある論理定理の中に出現するそれぞれの変数が始式 $A \vdash A$ の形において前件の A と後件の A のいずれに相当するものであるかを示している。

この定義を繰り返し適用することによって論理式に出現する変数を全て前件部と後件部のいずれかに分類することができる。相関論理 R の帰結演算のみ、また帰結関係と否定演算に関する部分である $R_{\Rightarrow}, R_{\Rightarrow, \neg}$ に関しては、次の定理が成り立つ^[1]。

定理1: 論理式 A が $R_{\Rightarrow}, R_{\Rightarrow, \neg}$ の論理定理であるならば、 A に出現するすべての変数は前件部と後件部の両方に属する(*)。

この性質(以後(*)で略記する)は R にはあてはまらない。 R の公理の $A \wedge B \Rightarrow A$ と $A \wedge B \Rightarrow B$ 、 $A \Rightarrow A \vee B$ と $B \Rightarrow A \vee B$ に出現する変数にはこの定義の前件部、あるいは後件部の一方にのみ出現するものがあるからである。

ここで、連言含意の(あるいは選言含意の)パラドクスとの関わりにおいて上で $R_{\Rightarrow}$ と $R_{\Rightarrow, \neg}$ が満たした性質について考察を行なう。 $A \wedge B \Rightarrow A$ と $A \Rightarrow A \vee B$ という R の公理を例にとるとそれぞれ「後件 A の真偽になんの影響も与えない B が連言項として前件に存在する」

「前件 A の真偽になんの影響も受けない B が選言項として後件に存在する」という点が知識の表現と推論の基礎としての論理の性質として適切でないとされ、連言含意の(あるいは選言含意の)パラドクスと呼ばれる($A \wedge B \Rightarrow B$ 、 $B \Rightarrow A \wedge B$ も同様である)。これらのパラドクスの問題点は、定理1の(*)の性質の観点からすると、「前件部と後件部の一方にのみ属する変数が存在する」ということに他ならない。sequent 演算における $A \vdash A$ の形をした始式に対する推論規則の適用によって得られる論理定理において、前件部あるいは後件部の一方にのみ属するものとして出現する変数は、単純な連言含意の(あるいは選言含意の)パラドクスにおいて推論の真偽と関係を持たないとして問題とされる任意の命題に相当するものであるからである。また、相関論理 R において、単純な連言含意の(あるいは選言含意の)パラドクスである四個の公理図式以外の公理図式は、(*)の性質を持っている。よって連言含意の(あるいは選言含意の)パラドクスの特徴として、(*)の性質を持たない、ということを挙げることができる。

このため、我々は、定理1において $R_{\Rightarrow}, R_{\Rightarrow, \neg}$ の論理定理が持っているとして示された性質(*)を持つことを、既存の相関性原理に加えて、ある論理式が相関論理

の体系における妥当な論理定理であるための必要条件の一つとすることを提案する。すなわち、ある論理式が連言含意の(あるいは選言含意の)パラドクスでない妥当な相関論理の論理定理であるためには、少なくともその論理式に出現するすべての変数は前件部と後件部の両方に属することが必要であるとする。この性質は従来の相関性原理よりも強い条件になるので、強相関性原理(strong relevance principle)と呼ぶことにする。また、この条件から、ある相関論理の体系において、すべての論理定理が強相関性原理の条件を満足することが、その論理体系が連言含意の(あるいは選言含意の)パラドクスを論理定理として持たないための必要条件であると言うことができる。

5. 強相関性原理による相関論理 R_c の評価

命題相関論理 R_c は連言含意のパラドクスを持たない論理体系を構築するために提案された^[3]。その特徴は単純な連言含意のパラドクスを公理として持っていないということである。しかし、真に R_c が連言含意のパラドクスを論理定理として持たない論理体系であるか否かの評価は、まだされていない。そこで、 R_c の論理定理の集合について我々が上に指摘した連言含意のパラドクスの形式的特徴を持つか否か、すなわち強相関性原理の条件を満足しているか否かを評価する。結論として、次の定理が成立する。

定理2: 命題相関論理 R_c の全ての論理定理は強相関性原理の条件を満足する。

この定理の証明には代数モデルを用いる。

6. 最後に

ある論理式が連言含意のあるいは選言含意のパラドクスでないための必要条件として強相関性原理の条件を提案し、命題相関論理の体系 R_c の全ての論理定理がこの条件を満足することを示した。この強相関性原理は知識表現のモデルとして新たに相関論理の体系を構築する際に有用であると考えられる。

今後の課題としては、強相関原理を反映した R_c の健全かつ完全なモデルの構築が残っている。

参考文献

- [1] A. R. Anderson and N. D. Belnap Jr., "Entailment: The Logic of Relevance and Necessity," vol.1, Princeton University Press, 1975.
- [2] J. Cheng, "Logical Tool of Knowledge Engineering: Using Entailment Logic rather than Mathematical Logic," Proc. ACM 19th Annual Computer Science Conference, pp.218-238, 1991.
- [3] J. Cheng, "Rc - A Relevant Logic for Conditional Relation Representation and Reasoning," Proc. First Singapore International Conference on Intelligent Systems, pp.171-176, 1992.