線形論理における帰納推論

1C－1

山口 文彦[†]　中西 正和[‡]

1　はじめに

線形論理における帰納推論はあまり研究されていない。線形論理は数量を保存する性質があるので、背景知識と仮説が事実を説明するためには、背景理論と仮説がそれぞれの事実とある意味で等価でなければならないという制約を持つ。

2　帰納推論

帰納推論は背景知識と事例が与えられたとき、背景知識を使って事例を説明するような仮説をつくり出す操作である。事例には、背景知識と仮説のもとである事象が成り立つことを表す正事例と成り立たないことを表す負事例がある。

背景知識と仮説が与えられたとき、正事例を導く推論は演繹である。(正事例が与えられた時の) 帰納推論は正事例と背景知識から仮説を導くので、演繹の逆操作であると見ることもできる。そこで、演繹規則を反転させて帰納推論規則とする方法がある [1]。

線形論理では連言を表す演算子が２つ存在する。ここでは特に数量を保存する $\otimes$ を用いて問題を記述することを考える。

背景知識を表す (線形) 論理式 B に対して以下のような事例 E^+, E^- が与えられたとする。

$$B \otimes E^- \not\models \perp \tag{1}$$

$$B \not\models E^+ \tag{2}$$

このとき、以下を満たすような論理式 H を求めることを考える。

$$B \otimes H \otimes E^- \not\models \perp \tag{3}$$

$$B \otimes H \models E^+ \tag{4}$$

ここで、関係 $\models$ は左辺が右辺を意味的に含意することを表す。

3　１個の正事例

正事例が一つ与えられた場合を考える。古典論理の場合は最初の仮説として最初の正事例をそのまま使うことができる。線形論理においては、$(A \multimap B) \otimes H \vdash B$ から H を B とする仮説を用いることができない。

記号的な操作だけを考えて、式 (4) を換える。ここから仮説 H の満たすべき条件を考えると $H \vdash E^+ \wp B^\perp$ となる。この式は H が $E^+ \wp B^\perp$ の充分条件であることを表している。

式を変形して概念の充分条件を表す式を得る操作を考える。この操作は、$A \vdash B$ であるとき、式 B を式 A に置き換える操作である。この操作は演繹の逆演算に他ならない。

1 は $X \wp X^\perp$ の充分条件である。

$$\dfrac{\dfrac{X \vdash X}{\vdash X \wp X^\perp}}{1 \vdash X \wp X^\perp}$$

そこで、$E^+ \wp B^\perp$ の充分条件をもとめることによって H を作る際、相補な論理式を削除することを考える。

$A \otimes B$ は $(A \otimes X) \wp (B \otimes X^\perp)$ の充分条件である。

$$\dfrac{\dfrac{A \vdash A \qquad \dfrac{B \vdash B \qquad \dfrac{X \vdash X}{\vdash X, X^\perp}}{B \vdash X, (B \otimes X^\perp)}}{A, B \vdash (A \otimes X), (B \otimes X^\perp)}}{A \otimes B \vdash (A \otimes X) \wp (B \otimes X^\perp)}$$

上記の２つの充分条件を求める操作は、相補な論理式が $\wp$ でつながれているときそれを削除するものであるから、述語論理を考える場合は $\wp$ の両辺が一方を否定する ($^\perp$ を施す) と単一化可能であるとき削除すればよい。

[†]慶應義塾大学大学院理工学研究科計算機科学専攻博士課程１年 e-mail: yamagu@nak.math.keio.ac.jp
[‡]慶應義塾大学 e-mail: czl@nak.math.keio.ac.jp

A は $?A$ の充分条件である。

$$\frac{A \vdash A}{A \vdash ?A}$$

A' が A の充分条件であるとき、$A' \wp B$ は $A \wp B$ の充分条件であり、$A' \otimes B$ は $A \otimes B$ の充分条件である。

$$\frac{\dfrac{A' \vdash A \qquad B \vdash B}{A' \wp B \vdash A, B}}{A' \wp B \vdash A \wp B} \qquad \frac{\dfrac{A' \vdash A \qquad B \vdash B}{A', B \vdash A \otimes B}}{A' \otimes B \vdash A \otimes B}$$

一般に、正に出現する部分式を充分条件に置き換えた式は、もとの式の充分条件である。

4 複数の正事例

事例が複数与えられる場合は、背景知識と仮説は事例の個数だけ与えられなければならない。背景知識 B と仮説 H が同時に n 個の事例 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ を説明するので、H の満たすべき条件は以下のようになる。

$$\begin{cases} H & \vdash \quad E_1 \wp B^{\perp} \\ H & \vdash \quad E_2 \wp B^{\perp} \\ & \vdots \\ H & \vdash \quad E_n \wp B^{\perp} \end{cases}$$

これは H が $\{E_i \wp B^{\perp} \mid 1 \leq i \leq n\}$ の下界に属する元であることを表す。ここで、& が最大下界を求める演算であることから、以下の式を得る。

$$H \vdash (E_1 \wp B^{\perp}) \,\&\, (E_2 \wp B^{\perp}) \,\&\, \cdots \,\&\, (E_n \wp B^{\perp})$$

5 負事例

負事例が与えられた場合の仮説の満たすべき条件について考える。

$$\vdash B \otimes H \otimes E^{-}$$

基本的なアイデアとしては、この式を変形して $X \vdash H$ の形を作ることができれば、H は X の必要条件で与えられる。複数の負事例に対しては、それぞれの事例に対して $X_i \vdash H$ の形の式を作り、$\{X_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ の最小上界 (m は負事例の個数。最小上界は $\oplus$ を用いて作られる) の必要条件によって H の範囲を定めることができる (この式を公理として得られる論理的帰結の集合)。しかし、このような式を $X \vdash H$ の形に変形する一般的な方法はない。

6 表現の簡単化

複数の正事例から、それぞれ異なる個数の A を仮説として導けるとする。このときそれら複数の正事例に対する仮説は、たとえば $A \oplus (A \otimes A) \oplus (A \otimes A \otimes A)$ といった形になる。ここで、この仮説は各正事例の証明にはそれぞれ適当な数の A を必要とすることを表している。このとき、! を用いて、より簡潔な表現の仮説 $!A$ を考えることができる。この ! を導入する操作は、$!A$ が $A \oplus (A \otimes A) \oplus (A \otimes A \otimes A)$ の充分条件であるから、演繹の逆演算という枠組にある。

7 むすび

線形論理式で表現される概念の帰納推論について述べた。帰納推論は、論理式の取る値が形成する完備束上の、関係 $\vdash$ を使って表された連立不等式の解を求める操作であると見ることもできるだろう。

残された課題としては、負事例に対する扱いがある。負事例が与えられた場合に仮説が満たすべき条件として本稿で挙げたものは、充足不能性を表すが、証明不能とすべきである。しかし、証明不能であることを論理式で表現することができない。

参 考 文 献

[1] Stephen Muggleton and Luc De Raedt, *Inductive Logic Programming : Theory and Methods*, Journal of Logic Programming, vol. 19–20, pp. 629–679, 1994

[2] Yves Deville and Kung-Kiu Lau, *Logic Program Synthesis*, Journal of Logic Programming, vol. 19–20, pp. 321–350, 1994

[3] Andrzej Filinski, *Linear Continuations*, Conference Record of the Nineteenth Annual Symposium on Principles of Programming Languages, ACM Press, pp. 27–38, 1992

[4] 竹内外史, 線形論理入門, 日本評論社, 1995

[5] 古川康一, 人工知能基礎論, オーム社, 1993