テクニカルノート

数値等角写像のためのSymmの積分方程式の一般化とその双対性

井 上 哲 男†

従来のSymmの積分方程式は領域の境界が部分的に解析的（piecewise analytic）との仮定の下で解の存在と唯一性が議論されてきた．特にReichel[11),12)]は，境界が連続な0でない導関数を持つ関数でパラメータ表示できるとの仮定の下で，解の存在と境界のどんなスケーリングに対しても解の唯一性が成立するSymmの積分方程式を導入した．この論文では上記の仮定をしない場合でもReichelと同様に解の存在と唯一性の成立するSymmの積分方程式を導入する．この論文で導入した積分方程式は内部と外部領域に対して双対性を持つ．

Generalization of Symm's Integral Equation for the Numerical Conformal Mapping and the Duality

TETSUO INOUE†

We are here concerned with the system of Symm's integral equations for numerical conformal mappings. Reichel[11),12)] established the modified equations being uniquely solvable for any scaling of the boundary, where the boundary of the domain is assumed to have a parametric representation with a continuous nonvanishing derivative. In this paper the system of the equations is generalized to the case of the domain whose boundary does not satisfy the assumption, where it is also uniquely solvable.

1. はじめに

数値等角写像（等角写像の数値計算）の方法の1つとして，Symmの積分方程式に基づく方法がある[4),6),13)]．

Amano[2)]，天野・井上[3)]，井上・天野[8)]も最近の一連の研究で，Symmの積分方程式に基づく代用電荷法を数値等角写像に応用して，数値実験的方法によりその精度の高さを確認している．代用電荷法の基礎と電気工学に関する問題を中心とした応用と数値実験の結果は文献10)に詳しく述べられている．

数値等角写像は，一般領域より標準領域への写像を求める問題と，その逆の標準領域から一般領域への問題とがある．この論文では，一般領域より標準領域への数値等角写像を求める問題に限定する．

従来のSymmの積分方程式は領域の境界が部分的に解析的（piecewise analytic）との仮定の下で解の存在と唯一性が議論されてきた．特にReichel[11),12)]は，境界が連続な0でない導関数を持つ関数でパラメータ表示できるとの仮定の下で，解の存在と境界のどんなスケーリングに対しても解の唯一性が成立するSymmの積分方程式を導入した．

この論文では上記の仮定をしない場合でもReichelと同様に解の存在と唯一性の成立するSymmの積分方程式を導入する．その際，最近Mhaskar & Saff[9)]によって導入され，その発展が著しいポテンシャル論における極値測度の研究およびそれに基づく漸近定理[7)]が重要な役割を果たす．この論文で導入した積分方程式は内部と外部領域に対して双対性を持つ．

2. ReichelによるSymmの積分方程式

この章ではReichel[11),12)]によるSymmの積分方程式に関する定理を紹介する．

Gは非有界な領域で，その境界をJordan曲線γとしよう．一般性を失うことなしに，Gは∞と0をその内部と外部に含むとすることができる．

$g(z)$はGを単位円外$\{w : |w| > 1\}$上に等角に写

† 神戸商船大学
Kobe Mercantile Marine College

像して，$z=\infty$ の近傍で

$$g(z) = dz + d_0 + \frac{d_1}{z} + \cdots \tag{1}$$

が成立するとしよう．ここで d, d_0, d_1 は定数．そのとき，$g(z)$ は $D \cup \gamma$ を $\{w : |w| \geq 1\}$ に1対1連続に対応するように拡張することができることが知られている[1]．以下では，拡張された関数も $g(z)$ と書くことにする．

境界 γ はパラメータ表示が可能で，その関数が連続な0でない導関数を持つと仮定する．このとき Gaier[4] の結果に基づいて，Reichel[11),12] は次のような定理を導いた．

定理 2.1 z_0 は境界 γ 上の，$g(z_0)=1$ を満たす点とする．$z \in \gamma$ として，連立積分方程式

$$q + \int_\gamma \log \frac{1}{|z-\zeta|} \sigma(\zeta)|d\zeta| = 0, \tag{2}$$

$$\int_\gamma \sigma(\zeta)|d\zeta| = 1 \tag{3}$$

は唯一の解 $\sigma^* \in L^2(\gamma)$, $q^* \in R$ を持つ．そのとき $g(z)$ は次式によって与えられる．

$$g(z) = \exp \left(q^* + \int_\gamma \log \frac{1}{(z-\zeta)} \sigma^*(\zeta)|d\zeta| + ic \right). \tag{4}$$

ここで $z \in G \cup \gamma$, $\exp(q^*)$ は γ の容量 $cap(\gamma)$, $c \in R$ である．

この定理および次章の定理 3.4 と同様の結果は Henrici[6] にも紹介されている．

3. Symm の積分方程式の一般化

定理 2.1 において γ はパラメータ表示が可能で，その関数が連続な0でない導関数を持つと仮定した．この章では γ が単に Jordan 曲線で上記の仮定がない場合にも成立する定理 2.1 の一般化を行う．すなわち，ボレル測度を用いた積分表示を導入する．その準備として，ポテンシャル論におけるボレル測度，容量の概念を紹介する．

$M(\gamma)$ を γ に含まれる台（support）を持つ正のボレル測度[14] σ で，$\sigma(\gamma)=1$ を満足するものの全体とする．そのとき，γ の容量 $cap(\gamma)$ を次式で定義する[14]：

$$cap(\gamma) = \exp(V), \tag{5}$$

$$I(\sigma) = \int \log|z-t| d\sigma(z) d\sigma(t), \tag{6}$$

$$V = \sup_{\sigma \in M(\gamma)} I(\sigma) = I(\mu). \tag{7}$$

式 (7) を満たす $\mu \in M(\gamma)$ が存在して，ただ1つであることは Mhaskar & Saff[9] の Theorem 3.1 (b) において証明されている．ここで，この概念を用いて定理 2.1 の一般化である次の定理を示し証明する．ただし

$$g'(\infty) = d > 0 \tag{8}$$

と仮定する．

定理 3.1 $z \in \gamma$ として，連立積分方程式

$$q + \log|z| + \int_\gamma \log\left|1 - \frac{\zeta}{z}\right| d\sigma(\zeta) = 0, \tag{9}$$

$$\int_\gamma d\sigma(\zeta) = 1 \tag{10}$$

は唯一の解 $\sigma^* \in M(\gamma)$, $q^* \in R$ を持つ．そのとき $g(z)$ は次式によって与えられる．

$$g(z) = \exp(q^*) \times z \exp\left\{ \int_\gamma \log\left(1 - \frac{\zeta}{z}\right) d\sigma^*(\zeta) \right\}. \tag{11}$$

ここで $z \in G \cup \gamma$,

$$\exp(q^*) = d = \frac{1}{cap(\gamma)}, \quad \sigma^* = \mu. \tag{12}$$

証明 等角写像関数 $g(z)$ は次のように表せることはすでに知られている[7]．

$$g(z) = \frac{\exp\{\int \log(z-\zeta) d\mu(\zeta)\}}{cap(\gamma)}. \tag{13}$$

したがって，

$$q = \log \frac{1}{cap(\gamma)}, \quad \sigma = \mu \tag{14}$$

は連立方程式 (9), (10) の解である．

その唯一性の証明は次のようにする．$\{\sigma_1, q_1\}$, $\{\sigma_2, q_2\}$ を連立積分方程式 (9), (10) の解とする．このとき，次式の $h(z)$ において $z \to \infty$ とすることによって $q_1 = q_2$ を導くことができる．すなわち，

$$h(z) = q_1 - q_2 + \int_\gamma \log\left|1 - \frac{\zeta}{z}\right| d(\sigma_1(\zeta) - \sigma_2(\zeta)) \tag{15}$$

は $G \cup \{\infty\}$ で調和で，境界 γ 上で0である．最大値の原理より

$$h(z) = 0, \quad z \in D \cup \gamma \tag{16}$$

が成立するので，式 (15) において $z \to \infty$ より $q_1 = q_2$. 次に，

$$\sigma_1(\zeta) = \sigma_2(\zeta) \tag{17}$$

を示そう．上記の結果を用いて $z \in D \cup \gamma - \{\infty\}$ に対して，等式

$$\int_\gamma \log\left|1 - \frac{\zeta}{z}\right| d\sigma_1(\zeta) + \log|z| = \int_\gamma \log\left|1 - \frac{\zeta}{z}\right| d\sigma_2(\zeta) + \log|z| \tag{18}$$

が成立することが分かる．したがって，

$$\int_\gamma \log|z-\zeta|d\sigma_1(\zeta)=\int_\gamma \log|z-\zeta|d\sigma_2(\zeta) \tag{19}$$

が成立する．さらに，Cauchy-Riemann の関係よりある定数 $c \in R$ が存在して，等式

$$\int_\gamma \log(z-\zeta)d\sigma_1(\zeta) = \int_\gamma \log(z-\zeta)d\sigma_2(\zeta)+ic \tag{20}$$

が成立する．両辺を z で微分することによって，次式を導くことができる．

$$\int_\gamma \frac{1}{z-\zeta}d\sigma_1(\zeta)=\int_\gamma \frac{1}{z-\zeta}d\sigma_2(\zeta). \tag{21}$$

式 (21) が任意の $z \in D\cup\gamma-\{\infty\}$ に対して成立するので，Cauchy 変換の唯一性[5]によって，目的とした次式を導くことができる．

$$\sigma_1(\zeta)=\sigma_2(\zeta). \tag{22}$$

境界 γ がパラメータ表示可能で，その関数が連続な 0 でない導関数を持つ場合は定理 3.1 を用いて，前章の定理 2.1 を次のように修正することができる．

定理 3.2 $z\in\gamma$ として，連立積分方程式

$$q+\log|z|+\int_\gamma \log\left|1-\frac{\zeta}{z}\right|\sigma(\zeta)|d\zeta|=0, \tag{23}$$

$$\int_\gamma \sigma(\zeta)|d\zeta|=1 \tag{24}$$

は唯一の解 $\sigma^*\in L^2(\gamma)$，$q^*\in R$ を持つ．そのとき，$g(z)$ は次式によって与えられる．

$$g(z)=\exp(q^*)\times z\exp\left\{\int_\gamma \log\left(1-\frac{\zeta}{z}\right)\sigma(\zeta)|d\zeta|\right\}. \tag{25}$$

ここで $z\in G\cup\gamma$,

$$\exp(q^*)=d=\frac{1}{cap(\gamma)}. \tag{26}$$

次に，有界な Jordan 領域から単位円内部への等角写像 $w=f(z)$ を考える．この写像関数は原点における正規化条件 $f(0)=0$，$f'(0)>0$ の下に一意的に定まる[1]．この問題に対して，上記の定理 3.1 の応用として次のような定理 3.3 が成立することが容易に分かる．その際，関数

$$g(z)=\frac{1}{f(1/z)} \tag{27}$$

に対して定理 3.1 を適用する．その後，関数 $f(z)$ に関する定理に書き直す．$z=0$ を内部に含む有界な Jordan 領域 G の境界を γ としよう．$f(z)$ は G を $\{w:|w|<1\}$ の上へ等角写像し，$z=0$ の近傍で

$$f(z)=bz+b_2z^2+\cdots \tag{28}$$

が成立するものとする．$b>0$，b_2 は定数．

定理 3.3 $z\in\gamma$ として，連立積分方程式

$$q+\log|z|+\int_\gamma \log\left|1-\frac{z}{\zeta}\right|d\sigma(\zeta)=0, \tag{29}$$

$$\int_\gamma d\sigma(\zeta)=-1 \tag{30}$$

は唯一の解 $-\sigma^*\in M(\gamma)$，$q^*\in R$ を持つ．そのとき $f(z)$ は次式によって与えられる．

$$f(z)=\exp(q^*)\times z\exp\left\{\int_\gamma \log\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)d\sigma^*(\zeta)\right\}. \tag{31}$$

ここで $z\in G\cup\gamma$，$\exp(q^*)=b$.

証明は容易であり省略する．

定理 3.1 に基づいて Reichel による定理 2.1 を修正して定理 3.2 を得た．これと同様の方法によって，Theorem 2.1[12]も定理 3.3 に基づいて修正すると次のようになる．

定理 3.4 $z\in\gamma$ として，連立積分方程式

$$q+\log|z|+\int_\gamma \log\left|1-\frac{z}{\zeta}\right|\sigma(\zeta)|d\zeta|=0, \tag{32}$$

$$\int_\gamma \sigma(\zeta)|d\zeta|=-1 \tag{33}$$

は唯一の解 $\sigma^*\in L^2(\gamma)$，$q^*\in R$ を持つ．そのとき $f(z)$ は次式によって与えられる．

$$f(z)=\exp(q^*)\times z\exp\left\{\int_\gamma \log\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\sigma(\zeta)|d\zeta|\right\}. \tag{34}$$

ここで $z\in G\cup\gamma$，$\exp(q^*)=b$.

Reichel[11),12)]の定理では成立していなかった内部と外部の等角写像に対しての双対性（duality）が定理 3.1 と定理 3.3 および定理 3.2 と定理 3.4 の間で成立する．双対性とは変換（式 (27)）によってスキームが互いに入れ替わることを意味する．

4. おわりに

この論文では Reichel[11),12)]が導入した Symm の積分方程式を双対性が成立する形に修正した．さらに Mhaskar & Saff[9]によって導入され，その発展が著しいポテンシャル論における極値測度に基づく漸近定理[7]を用いて Symm の積分方程式を一般化した．それらは Reichel の場合と同様に解の存在と唯一性が成立する．さらに従来の Symm の積分方程式にはない内部と外部の等角写像に対しての双対性が成立することは優れた数学的特性といえよう．逆にいえば関数

$$g(z)=\frac{1}{f(1/z)} \tag{35}$$

によって，内部問題を外部問題に置き換えられることにより双対性を持たないスキームは数学的に不自然であると信じる．

この論文は理論に中心がある．上記の定理等に基づく近似関数の数値実験による精度の検証は論文2)，3)，8) 等に詳しい．

参考文献

1) Ahlfors, L.V.: *Complex Analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York (1966).
2) Amano, K.: A charge simulation method for the numerical conformal mapping of interior, exterior and doubly-connected domains, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol.35, pp.353–370 (1994).
3) 天野 要，井上哲男：代用電荷法による数値等角写像のスケール変換不変性，日本応用数理学会論文誌，Vol.8, pp.1–17 (1998).
4) Gaier, D.: *Lecture on Complex Approximation*, Birkhäuser (1987).
5) Garnett, J.: *Analytic capacity and measure*, Lecture Notes in Math., Vol.297, Springer-Verlag (1972).
6) Henrici, P.: *Applied and Computational Complex Analysis 3*, John Wiley & Sons, New York (1986).
7) 井上哲男：重みのついた極値多項式に関する漸近定理の応用，日本応用数理学会論文誌，Vol.4, pp.205–209 (1994).
8) 井上哲男，天野 要：数値内部等角写像のための代用電荷法における新しいスキームによる理論的な電荷点配置に基づく数値実験的研究，日本応用数理学会論文誌，Vol.7, pp.429–442 (1997).
9) Mhaskar, H.N. and Saff, E.B.: Weighted analogues of capacity, transfinite diameter and Chebyshev constant, *Constr. Approx.*, Vol.8, pp.105–124 (1992).
10) 村島定行：代用電荷法とその応用，森北出版，東京 (1983).
11) Reichel, L.: On polynomial approximation in the complex plane with application to conformal mapping, *Math. Computation*, Vol.44, pp.425–433 (1985).
12) Reichel, L.: A fast method for solving certain integral equations of the first kind with application to conformal mapping, In 13), pp.125–142.
13) Trefethen, L.N. (ed.): *Numerical Conformal Mapping*, North-Holland, Amsterdam (1986).
14) Tsuji, M.: *Potential Theory in Modern Function Theory*, 2nd ed., Chelsea, New York (1958).

(平成10年 6 月9日受付)
(平成10年10月2日採録)