# 単調集合値論理関数の基本的性質

７Ｐ－１ 中村 豊 高木 昇 中島 恭一
富山県立大学工学部

## 1 はじめに

従来の 2 値論理回路がブール関数に基礎を置くのと同様に, バイオ素子による多値論理回路の構成[1]は集合値論理関数により数学的に定式化される. 一般に $n$ 変数 $r$ 値の集合値論理関数は, $(2^r)^{2^{r^n}}$ 個存在し, その数は極めて膨大である. また, 工学の分野においてブール関数以外の多値論理関数の研究が盛んに行われている. 集合値論理関数と同様に, 一般に $n$ 変数 $m$ 値の多値論理関数は $m^{m^n}$ 個存在し, その数は $m$ 及び $n$ の増加にともない指数関数的に増加する. このため, 意味のある特殊な関数族の研究も数多く行われている. 例えば, 文献 [2] では多値論理関数の単調構造についての研究である. そこで, 本文では集合の包含関係に着目して, この関係に対して単調な集合値論理関数を取り扱い, その必要十分条件及び論理式表現について述べる.

## 2 諸定義

集合値論理では, $r$個の要素の論理値集合$r = \{0, 1, \ldots, r-1\}$ のべき集合 $\mathcal{P}(r)$ を真理値集合として取り扱う. $n$ 変数 $r$ 値集合値論理関数 $f(x_1, \ldots, x_n)(x_i \in \mathcal{P}(r))$ を写像 $f : \mathcal{P}(r)^n \to \mathcal{P}(r)$ とする. 和集合演算, 及び積集合演算をそれぞれ記号$\cup$及び$\cap$で表し, 論理和演算及び 論理積演算演算と呼ぶことにする. また, 真理値集合上では, 集合の包含関係$\subseteq$ (または $\supseteq$) が半順序関係であることは明白である. この包含関係に対して単調構造を成すというのは以下のように定義される.

**定義 2.1**
集合値論理関数 $F$が $(x_1, \ldots, x_n) \supseteq (y_1, \ldots, y_n)$(任意の $i$ に対して $x_i \supseteq y_i$) を満足するような任意の入力ベクトル $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{P}(r)^n$に対して $F(x_1, \ldots, x_n) \supseteq F(y_1, \ldots, y_n)$ であるとき, $F$を単調集合値論理関数と呼ぶ.

ここで, リテラル $\neg_a x$ をつぎのように定義する.

**定義 2.2** $\forall a, x \in \mathcal{P}(r)$ に対して

$$\neg_a x = \begin{cases} r & if\ a \subseteq x \\ \phi & otherwise\ (\text{但し}, \phi\text{は空集合}) \end{cases} \tag{1}$$

演算$\neg_a$について次のいくつかの補題が証明される.

**補題 2.1** $\forall x, y \in \mathcal{P}(r)$ に対して

$$x \supseteq y \quad \Leftrightarrow \quad \forall a \in \mathcal{P}(r) \text{ に対して} \neg_a x \supseteq \neg_a y$$

**補題 2.2** $\forall a, b \in \mathcal{P}(r)$ に対して

$$a \supseteq b \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathcal{P}(r) \text{ 対して } \neg_a x \subseteq \neg_b x$$

また, 定義 2.1 は補題 2.2 より次のように言い換えることができる.

**定義 2.3** 任意の $i$ について$\neg_{a_i} x_i \supseteq \neg_{a_i} y_i$を満足するようなどんな入力ベクトル $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)$ に対しても$\neg_a F(x_1, \ldots, x_n) \supseteq \neg_a F(y_1, \ldots, y_n)$ であるとき, $F$を単調集合値論理関数と呼ぶ.

## 3 単調集合値論理関数の必要十分条件

ここで, もう一つのリテラル $x^a$を定義する.

**定義 3.1** $\forall a \in \mathcal{P}(r)$ に対して

$$x^a = \begin{cases} r & if\ x = a \\ \phi & otherwise \end{cases} \tag{2}$$

定義 3.3 のリテラル演算を用いると, $\neg_a x$ は次のように表現できる.

$$\neg_a x = \bigcup_{b \supseteq a} x^b \tag{3}$$

関数の論理式というのは, 変数 $x_i$, 単項演算$\neg_a$, 論理和 $\cup$, 論理積$\cap$及び定数$\phi$, $r$を使って表現されるもの

---

Fundamental Properties of Monotone Set-Valued Logic Functions
Y.Nakamura, N.Takagi and K.Nakashima
Toyama Prefectural University
Kosugi, Toyama 939-03, Japan.

である．各変数のリテラルを高々一つしか含まないような論理積を項と呼び．いくつかの項の論理和で表現されるものを積和形式（*sum of products form*）という．

**補題 3.1** 任意の $n$ 変数集合値論理関数 $F(x_1 \ldots, x_n)$ の単項演算$\neg_a$を行った$\neg_a F(x_1 \ldots, x_n)$はつぎのような積和形式で表現できる．

$$\neg_a F(x_1, \ldots, x_n) = \bigcup_{a \subseteq F(b_1, \ldots, b_n)} x_1^{b_1} \cap \ldots \cap x_n^{b_n} \quad (4)$$

以上の定義及び補題を用いて、単調集合値論理関数の必要十分条件を示す．

**定理 3.1** 集合値論理関数 $F(x_1, \ldots, x_n)$ が単調である必要十分条件は．任意の $a \in \mathcal{P}(\boldsymbol{r})$ に対して，$\neg_a F(x_1, \ldots, x_n)$が$\neg_{b_1} x_1, \ldots, \neg_{b_n} x_n$及び定数$\phi, \boldsymbol{r}$のみを含む積和形式で表現できることである．すなわち，

$$\neg_a F(x_1, \ldots, x_n) = \bigcup_{a \subseteq F(b_1, \ldots, b_n)} \neg_{b_1} x_1 \cap \ldots \cap \neg_{b_n} x_n \quad (5)$$

のように論理式表現できることである．

式 (5) において、$\neg_\phi x_i$のような変数のリテラルは取り除くことが可能である．また、式 (4) と式 (5) を比較すると、単調集合値論理関数は $x_i^{a_i}$ が$\neg_{a_i} x_i$に置き換えれることがわかる．

## 4　単調集合値論理関数の論理式表現

前章で得られた$\neg_a F(x_1, \ldots, x_n)$の論理式表現と論理和．論理積．定数 $a \in \mathcal{P}(\boldsymbol{r})$ のみを用いて任意の単調集合値論理関数 $F(x_1, \ldots, x_n)$ は式 (6) のように表現できる．

**定理 4.1** 任意の単調集合値論理関数の論理式表現は次式で得られる．

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \bigcup_{\substack{a \in \mathcal{P}(\boldsymbol{r}) \\ a \neq \phi}} a \cap \neg_a F(x_1, \ldots, x_n) \quad (6)$$

また．式 (6) は次の補題を利用することにより簡単化される．

**補題 4.1** 単調集合値論理関数では，空集合と要素の数が 1 個の集合（*singlton*）を除いた任意の $y$に対する $y \cap \neg_y F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ はいくつかの *singlton* の $\{a\} \cap \neg_{\{a\}} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に吸収される．

補題 4.1 より次の定理が得られる．

**定理 4.2** 任意の単調集合値論理関数は，*singlton* の積項 $\{a\} \cap \neg_{\{a\}} F(x_1, \ldots, x_n)$ と定数$\phi, \boldsymbol{r}$のみで表現できる．すなわち，

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigcup_{a \in \boldsymbol{r}} \{a\} \cap \neg_{\{a\}} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (7)$$

のように論理式表現できる．

つまり，式 (6) では $|\mathcal{P}(\boldsymbol{r})| - 1 = 2^r - 1$ 個の積項を必要としたが、式 (7) より単調集合値論理関数を表現するためには、高々$|\boldsymbol{r}| = r$個の積項のみで表現できる．

## 5　まとめ

本稿では，多値論理回路を構成する上で用いられている集合値論理関数のすべてを取り扱わず，集合の包含関係に対して単調である部分系について考えた．まず，必要な演算$\neg_a$の定義を行い，その演算についてのいくつかの補題を与えた．そして単調集合値論理関数の必要十分条件を論じ、$\neg_{b_1} x_1, \ldots, \neg_{b_n} x_n$及び定数$\phi, \boldsymbol{r}$のみを含む積和形式で論理式表現できることが単調集合値論理関数の必要十分条件であることがわかった。それからその論理式表現について述べ，高々$|\boldsymbol{r}| = r$個の積項のみで表現できることを示した．

### 参考文献

[1] T. Aoki, M. Kameyama and T. Higuchi: "Design of Highly Parallel Set Logic Network Based on a Bio-Device Model", *Proc. 19th Int. Sym. on Multipled-Valued Logic, IEEE*, pp. 360-367 (May 1989).

[2] K. Nakashima and N. Takagi: "Fundamental Properties of Multiple-Valued Logic Functions Monotonic with Respect to Ambiguity", *IEICE Trans.*, vol.E76-D, no.5, pp. 540-547 (May 1993).