導出法による線形論理 CLL_e の自動証明戦略

2P－2

南澤 吉昭　　米崎 直樹

東京工業大学情報理工学研究科計算工学専攻

1 はじめに

線形論理では加法性，乗法性の結合子が存在するため，古典論理で言う節形式のような標準形を作ることは困難である．このことが自動証明を困難にしている理由の一つと考えられる．そこで [4] および，その手法を拡張した [2] では非節形式導出法 (NCLR) を提案している．

この NCLR に対し，書き換え規則の変更と，規則の適用順序に関するヒューリスティックの導入を行なうことで，証明の効率化をはかる．

2 非節形式導出法 (NCLR)

以下に，[2] で与えられた，拡張された NCLR に関する諸定義を示す．

定義 2.1 (標準形) p を原子式とし，

$$\begin{aligned} N \equiv\ & \mathbf{1} \mid \mathbf{0} \mid \top \mid \bot \mid p \mid {\sim}p \mid !N \mid ?N \mid \\ & N_1 * N_2\ (N_i \neq \mathbf{1}) \mid N_1 + N_2\ (N_i \neq \mathbf{0}) \mid \\ & N_1 \sqcap N_2\ (N_i \neq \top, N_1 \neq N_2) \mid \\ & N_1 \sqcup N_2\ (N_i \neq \bot, N_1 \neq N_2) \end{aligned}$$

定義 2.2 (空節) $\{\Delta\}$ ($\bot \in \Delta$) または $\{\mathbf{0}, !\Gamma\}$ を空節といい，□ で表す．

定義 2.3 (節表現)

$$C \equiv \Box \mid \{\Gamma\} \mid C_1 \wedge C_2 \mid C_1 \vee C_2$$

定義 2.4 (書き換え規則)

$$\{?A, !\Gamma\} \leadsto \{A, !\Gamma\} \quad (1)$$
$$\{\mathbf{1}, \Delta\} \leadsto \{\Delta\}\ (\Delta \neq \emptyset) \quad (2)$$
$$\{A * B, \Gamma\} \leadsto \{A, B, \Gamma\} \quad (3)$$
$$\{A \sqcup B, \Gamma\} \leadsto \{A, \Gamma\} \vee \{B, \Gamma\} \quad (4)$$
$$\{A \sqcap B, \Gamma\} \leadsto \{A, \Gamma\} \wedge \{B, \Gamma\} \quad (5)$$
$$\{!A, \Gamma\} \leadsto \{\Gamma\} \wedge \{A, !A, \Gamma\} \quad (6)$$

$\{\Gamma_{1.1}\} \cup \{\Gamma_{1.2}\} \equiv \{\Gamma_1\}$ であるとき，

$$\{A + B, \Gamma_1, !\Gamma_2\} \leadsto \{A, \Gamma_{1.1}, !\Gamma_2\} \vee \{B, \Gamma_{1.2}, !\Gamma_2\} \quad (7)$$

定義 2.5 (導出規則) $N(A)$ を A と等価な標準形の式とし，$G \equiv N({\sim}F)$ とする時

$$\{A + F, B + G, \Gamma\} \leadsto \{A + B + \mathbf{0}, \Gamma\} \quad (8)$$
$$\{A + \mathbf{0}, \Gamma\} \leadsto \{A, \Gamma\} \quad (9)$$
$$\{A + F, !G, \Gamma\} \leadsto \{A, !G, \Gamma\} \quad (10)$$

定義 2.6 (空節の規則)

$$C \wedge \Box \leadsto \Box \quad (11)$$
$$C \vee \Box \leadsto C \quad (12)$$

これ以後，上に示した書き換え規則，導出規則，空節の規則の0回以上の適用を $\leadsto^*$ と表記する．

NCLR には節表現の選択の基準や，証明途中でその枝を失敗とみなす基準として，また，(7)[+] の規則を適用した時の Γ_1 の分割の戦略としてもいくつかのヒューリスティックが採用されている．

3 NCLR の拡張

証明の効率化のため2節に示した NCLR の規則に変更を加える．また，[1] や [3] では証明図内の推論規則の移動可能性について述べている．この移動可能性を考慮し，NCLR を実現する際に必要となる，規則の適用に関するヒューリスティックを示す．

3.1 規則の拡張

(6) の規則を以下のように変更する．

$$\{!A, \Gamma\} \leadsto \{A, !A, \Gamma\} \quad (13)$$

$\{\Gamma\} \leadsto^* \Box$ の時について，$!A$ はいずれの規則の適用に関しても制限とはならないので，$\{!A, \Gamma\}$ に対しても $\{\Gamma\}$ の時と同様に規則を適用すれば $\{\mathbf{0}, !\Delta, !A\}$ または $\{\bot, \Delta, !A\}$ となるので，いずれの場合も $\{!A, \Gamma\} \leadsto^* \Box$ となる．

さらに，以下の書き換え規則を追加する．書き換え規則を追加する代わりに，標準形に変形する時点でこれらの処理を行なうことも可能である．

$$\{!!A, \Gamma\} \leadsto \{!A, \Gamma\} \quad (14)$$
$$\{??A, \Gamma\} \leadsto \{?A, \Gamma\} \quad (15)$$

3.2 規則の適用順序

節表現に書き換え規則，導出規則を適用する．

注目している節表現に対し，次の 1. から 7. の順に規則の適用を試み，最初に適用可能となる規則を適用する．その結果書き換えられた節表現に対し，再び 1. から順に規則の適用を試みる．適用を試みる順序は以下の通りである．

Proof Strategies in Linear logic (CLL_e) on Non Clausal Linear Resolution (NCLR)

Yoshiaki Minamisawa, Naoki Yonezaki
Department of Computer Science, Graduate School of Information Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology, Japan
2-12-1, Oookayama, Meguro-ku Tokyo 152, Japan

1. (1)[?], (14)[!!], (15)[??] の規則を適用する．
2. (2)[**1**], (3)[$*$] の規則を適用する．
3. (4)[$\sqcup$] の規則を適用する．
4. 前段が (5)[$\sqcap$], (7)[+] 又は (13)[!] であれば，その分解によって生じた A, B に対して規則を適用する．ただし，最外結合子が！のものは除く．
5. 導出規則 (8) (9) (10) が適用できれば適用する．
6. (5)[$\sqcap$], (7)[+] の規則を適用する．
7. (13)[!] の規則を適用する．

ただし，この通りに規則を適用していけば必ず証明できる訳ではないので，必要に応じてバックトラックを生じる．以下の理由により 1. ～ 4. についてはバックトラックを必要としない．

[1] で $\sqcup, *, \mathbf{1}, ?$ について示されている定理から，以下の定理が成立する．

定理 3.1 F を $\sqcup, *$ のどちらかの最外結合子を持つ式または **1** とし，$\{F,\Gamma\} \leadsto^* \square$ とする．この時，F を分解する規則で始まり $\{F,\Gamma\} \leadsto^* \square$ とする規則の適用の列が存在する．

定理 3.2 $\{?F, !\Gamma\} \leadsto^* \square$ とする．この時，？の規則で始まり $\{?F, !\Gamma\} \leadsto^* \square$ とする規則の適用の列が存在する．

また，!!, ?? については以下の定理が成立する．

定理 3.3 F を $!!A, ??A$ のどちらかの形の式とし，$\{F,\Gamma\} \leadsto^* \square$ とする．この時，F を分解する規則で始まり $\{F,\Gamma\} \leadsto^* \square$ とする規則の適用の列が存在する．

以上の定理より，処理中の式が証明可能ならば，1. 2. 3. により決定された規則の適用を行なっても証明可能であることが分かる．

従って，バックトラックの必要が生じた際にこれらの規則の適用が証明失敗の原因となることはない．

$+, \sqcap, !$ については，[1] で示されている定理から以下の定理が成立する．

定理 3.4 F を $+, \sqcap, !$ のいずれかの最外結合子を持つ式とし，$\{F,\Gamma\} \leadsto^* \square$ とする．この時，F を分解する規則の直後には F の部分式を分解する規則があり $\{F,\Gamma\} \leadsto^* \square$ とする規則の適用の列が存在する．ただし，分解された F の部分式の最外結合子が！の場合を除く．

以上の定理より，処理中の式が証明可能ならば，4. の様に規則を適用される式を決定し，その式に規則を適用しても証明可能であることがわかる．

従って，この場合もバックトラックの必要が生じた際に 4. による決定が証明失敗の原因となることはない．

上記の定理で，「導出された F の部分式の最外結合子が！の場合を除く」とあるのは，一つには F の導出のすぐ上で？の推論規則が用いられている場合があるからである．この時，NCLR において F の次に分解されるべき式は $?A$ という形の式であり，これは，4. よりも 1. の方が前にあることで保障される．

またもう一つの理由は，！に関する *weakning* や *contraction* は，書き換え規則の拡張の際に書き換え規則の中に吸収されているため，F の次に分解されるべき式は $!A$ の形の式とはならない場合があるからである．

(13)[!] については，この書き換え規則だけが節表現中の結合子の数を A の結合子の数だけ増やしてしまうことになるので，7. として一番最後にした．

4 まとめ

証明図の性質を利用し規則適用順序に関するヒューリスティックを導入することにより，非節形式導出法 (NCLR) の推論規則の変更，拡張を行なった．

これ以外の規則の拡張や効率化については以下が考えられる．

- 規則の適用順序だけではなく，規則を適用する節表現の選択や，規則を適用するための式の選択などについてもヒューリスティックを導入する．
- 規則の適用順序に関してもさらに別のヒューリスティックを導入する．
- NCLR の特色の一つである導出規則について，導出規則を適用するための相補的な式として，どのような範囲の式を扱えばもっとも効率的であるかについて検討する．

参考文献

[1] D.Galmiche and G.Perrier. Foundations of proof search strategies design in linear logic. *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 813, pp. 101–113, 1994.

[2] Miyoko Kawamura and Naoki Yonezaki. Non clausal linear resolution for propositional linear logic. *Preprint of The Fourth European-Japanese Seminar on Information Modelling and Knowledge Bases*, Vol. 1, , 1994.

[3] Tanel Tammet. Proof strategies in linear logic. Department of Computing Science, Chalmers University of Technology, 1993.

[4] 川村美代子, 米崎直樹. Linear logic の自動証明法. 第 6 回 人工知能学会全国大会論文誌, Vol. 1. pp. 95–98, 1992.