2P－1

β 節集合に対する Davis-Putnam の手続きの一般化*

山本雅人 † 大柳俊夫 ‡ 大内 東 †

† 北海道大学工学部 ‡ 札幌医科大学保健医療学部

1 はじめに

節集合の充足可能性を判定するための方法として，Davis-Putnam の手続きがある [1]．また，著者らは IEMSAT と呼ばれる方法を提案し，Davis-Putnam の手続きとの密接な関係を明らかにしている [2]．IEMSAT は 0-1 計画問題を解く一般的な方法である陰的列挙法に基づいたアルゴリズムである．一方，節を一般化した β 節といわれる節がある [3]．β 節とはその節中の β 個のリテラルが真であるとき，また，そのときに限り真となる節であり，$\beta = 1$ のとき通常の節と同じものになる．著者らは，既に β 節を用いることによって簡単に表現が可能な制約が存在することを示し，β 節からなる β 節集合の充足可能性問題を解く方法として IEMBSAT を提案している [4]．

本稿では，IEMSAT と Davis-Putnam の手続きとの密接な関係から，Davis-Putnam の手続きを β 節を扱う立場から見直しを行い，β 節集合に対して適用可能となるような拡張を行う．また，β 節の有効性について，最近注目されている GSAT などの局所探索法との比較実験などを通して検討する [5][6][7]．

2 SAT

充足可能性問題 (SAT) とは，以下のような m 個の節からなる節集合 S が与えられているとき，すべての節を真とする原子論理式への真理値の割当てが存在するかどうかを判定する問題である [8]．各節 C_i $(i = 1, \cdots, m)$ はリテラル (原子論理式かまたはその否定) の選言である．

$$S = \{C_1, \cdots, C_m\}$$

*Generalization of Davis-Putnam Procedure for a set of β clauses

Masahito YAMAMOTO and Azuma OHUCHI
Faculty of Engineering, Hokkaido University
Toshio OHYANAGI
School of Health Sciences, Sapporo Medical University

3 Davis-Putnam の手続き

節集合 S の充足可能性を判定する手続きとして Davis-Putnam の手続き (以下，DP) がある．DP は本質的に 1 リテラル規則，分割規則の二つの規則からなると考えられる．この他にトートロジー規則，純リテラル規則などがあるが，計算効率の面から一般には用いられない．

[1 リテラル規則]

節集合 S' 中に単位節 l が存在すれば，S から l を含むすべての節を取り除く．また，S から $\neg l$ をすべて消去する．

[分割規則]

節集合 S' 中に現れる原子論理式 P について，$S' \cup \{P\}$ と $S' \cup \{\neg P\}$ を生成する．これらの充足可能性を調べ，共に充足不能なら S' は充足不能である．

これらの規則を節集合 S に対して用いながら，S' が空となれば元の節集合 S は充足可能であり，S' 中に空節が現れれば S は充足不能である．

4 β 節

定義 1 (β **節**) β 節とは，少なくとも β 個 のリテラルが真となるとき，またそのときに限り真となる節であり，$C(\beta)$ と表す．このとき，β を $C(\beta)$ の次数という．

例えば，$x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3$ (2) は，3 つのリテラル x_1，$\neg x_2$，$\neg x_3$ のうち 2 つが真であるとき，真となる β 節であり，この節の次数は 2 である．

定義 2 (**充足度**) β 節 $C(\beta)$ 中の真であるリテラルの個数を $C(\beta)$ の充足度という．

定義 3 (β **単位節**) β 節 $C(\beta)$ 中のリテラルの個数と $C(\beta)$ の次数が等しい節を β 単位節という．

定義 4 (矛盾節) β 節 $C(\beta)$ 中のリテラルの個数より $C(\beta)$ の次数が大きい節を矛盾節という．

以下のような制約は β 節を用いることによって，簡潔に表現することができる．

・少なくとも k 個のリテラルが真である

$\rightarrow x_1 \vee \cdots \vee x_n(k)$

・高々 k 個のリテラルが真である

$\rightarrow \neg x_1 \vee \cdots \vee \neg x_n(n-k)$

・ちょうど k 個のリテラルが真である

$\rightarrow (x_1\vee,\cdots,\vee x_n(k))\wedge(\neg x_1\vee,\cdots,\vee\neg x_n(n-k))$

β **節集合に対する充足可能性問題** (β **SAT**) **とは**，以下のような β 中のすべての β 節をすべて真とするような原子論理式への真理値の割当てが存在するかどうかを決定することである．

$$S_B = \{C_1(\beta_1),\cdots,C_n(\beta_n)\}$$

5 DP の一般化

β 節集合 S_B の充足可能性を判定する手続きは，DP の 1 リテラル規則を以下の β 単位リテラル規則に置き換えることによって得られる．

[β 単位リテラル規則]

節集合 S' 中に β 単位節が存在するとき，β 単位節中の各リテラル l_i に対して，S' 中の l_i を含むすべての β 節の充足度を 1 つ増やす．また，$\neg l_i$ を含むすべてのリテラルを S' から消去する．

上の β 単位リテラル規則と前述の分割規則を用いながら，すべての節に対してその節の充足度が次数以上になれば充足可能であり，矛盾節が生成すれば充足不能である．

6 実験

β 節での表現が通常の節に比べて効率的であることを示すために，n-クイーン問題や pigeon hole 問題を β 節集合に変換し，今回の DP を一般化した手続きで解いた実験を行い，通常の節集合との違いを考察する．実験では，IEMBSAT や Dubois らが開発した ASAT と呼ばれるプログラムに基づき，β 節に対応させたものを用いる [9]．実験の方法，結果および考察については当日発表する．

7 おわりに

本稿では，β 節集合に対する充足可能性を判定する方法として，Davis-Putnam の手続きを一般化した手続きを提案した．また，実験によってその有効性について検討した．

参考文献

[1] Davis M. and Putnam H. : A Computing Procedure for Quantification Theory. *Journal of the ACM*, Vol 7, pp. 201–215 (1960).

[2] 大柳，山本，大内：陰的列挙法に基づく SAT アルゴリズム, 情報処理学会論文誌, Vol 34, No. 12, pp. 2464–2473 (1993).

[3] Hooker J. N. : Generalized Resolution and Cutting Planes. Annals of Operations Research, Vol. 12, pp. 217–239 (1988).

[4] 大柳, 山本, 大内 : 命題論理における β 節充足可能性問題とその解法, 電気学会論文誌 C, Vol 114-C, No. 7/8, pp. 796–804 (1993).

[5] Selman B., Levesque H. and Mitchell D. A New Method for Solving Hard Satisfiability Problems. In *Proceedings of AAAI-92*, pp. 440–446 (1992).

[6] Mitchell D., Selman B. and Levesque H. : Hard and Easy Distributions of Sat Problems. In *Proceedings of AAAI-93*, pp. 459–465 (1992).

[7] Crawford J. M. and Auton L. D. : Experimental Results on the Crossover Point in Satisfiability Problems. In *Proceedings of AAAI-93*, pp. 21–27 (1993).

[8] Chang C. -L. and Lee R. C. -T. : Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving. Academic Press, (1973).

[9] Dubois O., Andre P., Boufkhad Y. and Carlier J. : Can a Very Simple Algorithm be Efficient for Solving the SAT Problem ?, via anonymous ftp from dimacs.rutgers.edu : /pub/ challenge/ sat/ contributed/ dubois/ dubois.tex.