高次漸化式によるフラクタル・グラフィックス

6C－7

青山智夫
宮崎大学工学部電気電子工学科

1．はじめに

一般に漸化式：$Z_{n+1}=f(Z_n, Z_{n-1}, Z_{n-2}, \ldots, C)$　　(1)

は適切に係数をとれば，フラクタル図形を生成できると予想されている．[1]
しかし，実際にどのように係数を取れば良いのか，またそのときに生成される画像はどのようなものであるのかを示した文献は少ない．本研究の目的は，高次漸化式，特に2次漸化式から生成されるフラクタル図形について明確にすることである．

2．高次漸化式の特徴

まず高次漸化式：

$$Z_{n+2}=Z_{n+1}^2+\mathrm{sgn}Z_n+A;\quad Z_0=0, Z_1=C, \qquad (2)$$

から生成される数列$\{Z_i(i=0,1,2,\ldots)\}$の性質を調べる．ここで，Aは複素数，Cは複素数の集合である．sgn=(1,-1)．十分大きな整数値Kを取るとき，

$$\| Z_K \| < \theta \qquad (3)$$

なる{C}集合を漸化式の画像（表現形）という．θは閾値である．

①A=0のとき，原点(0,0)近傍のCに対する$\{Z_i\}$数列は，Cの代表点をδとすると，

$Z_0=0,\ Z_1=C\equiv\delta,\ Z_2=\delta^2\equiv\varepsilon$．

sgn=1では，$Z_3=\varepsilon^2+\delta, Z_4=\varepsilon^2(\varepsilon^2+2\delta)+2\varepsilon$,

$Z_5=\varepsilon^4\{(\varepsilon^2+2\delta)^2+4(\varepsilon^2+2\delta)\}+5\varepsilon^2+\delta, \ldots\ldots$

sgn=-1では，$Z_3=\varepsilon^2-\delta, Z_4=\varepsilon^2(\varepsilon^2-2\delta), Z_5=\varepsilon^4(\varepsilon^2-2\delta)^2-\varepsilon^2+\delta, \ldots\ldots$

となってsgn=-1の各項は相互に打ち消し合うように作用し，添字$i\to\infty$に対し，sgn=1の場合よりも緩やかに$\|Z_\infty\|\to\infty$になる．これは不動点(0,0)近くの漸化式(2)の画像の面積が大きくなることを示す．経験的に漸化式の画像面積が大きいと，その周辺部に興味深い映像が存在する確率が高いことが知られている．ゆえにsgn=-1として，その漸化式の解析を行った．

②$A\neq0$ and $O(A^2)\ll O(A)$, $O(\delta^2)\ll O(\delta)$, $O(\delta A)\ll O(\delta)$ とのとき，漸化式(2)から生成される$\{Z_i\}$数列は，

$Z_0=0,\ Z_1=C\equiv\delta,\ Z_2=A-\delta$．

$\therefore\ \{Z_0, Z_1, Z_2, \ldots\}=\{0, \delta, A-\delta, A-\delta, \delta, \delta, A-\delta, A-\delta, \delta, \ldots\}$

A Study of Fractal-Graphics Based on the Second Order Iteration

Tomoo Aoyama
the Faculty of Engineering, Miyazaki University
1-1 Gakuen Kibanadai Nishi, Miyazaki-city, 889-21, Japan

となる．従って，漸化式(2)を無限に計算していっても，0点近傍で振動し，Z_∞が発散する方向になかなか向かわない．数値計算によって$\{Z_i\}$数列の動きを可視化すると，A，δの値によって種々の形を間欠的に生成する興味深い現象が見られる．
図1は横軸に$\{i\}$，縦軸に$\{\|Z_i\|\}$を $1\leq i\leq 762525$の範囲で示した，
図2は複素平面を実軸-1.4～0.6，虚軸-0.625～0.625の範囲で，$729759\leq i\leq 762525$区間の$\{Z_i\}$数列を示した．

3．高次漸化式を用いたフラクタル・グラフィックス

漸化式(2)は $Z_{n+1}=Z_n{}^2+A$ 型とは全く異なる性質である．この漸化式を使って式(3)によって画像表現形（図3,4）を計算した．このとき文献[2)]の手法を利用した．

図１　$\{\|Zi\|\}$

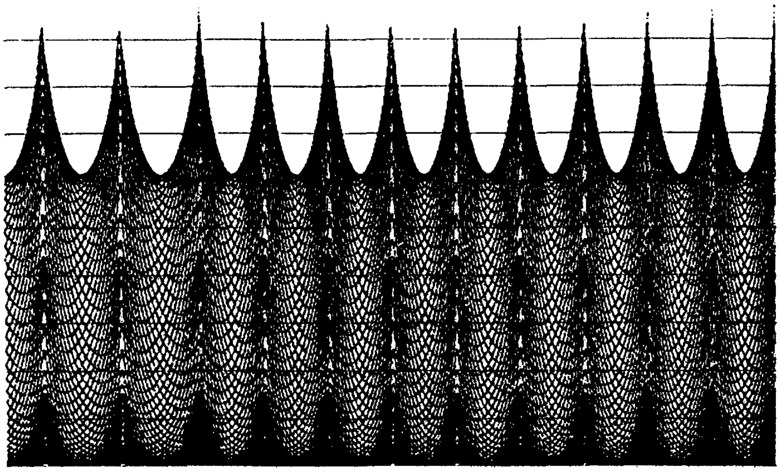

図２　$\{Zi\}$

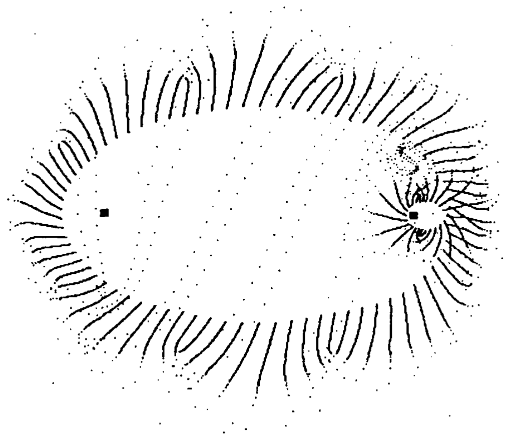

図３　フラクタル図形［１］

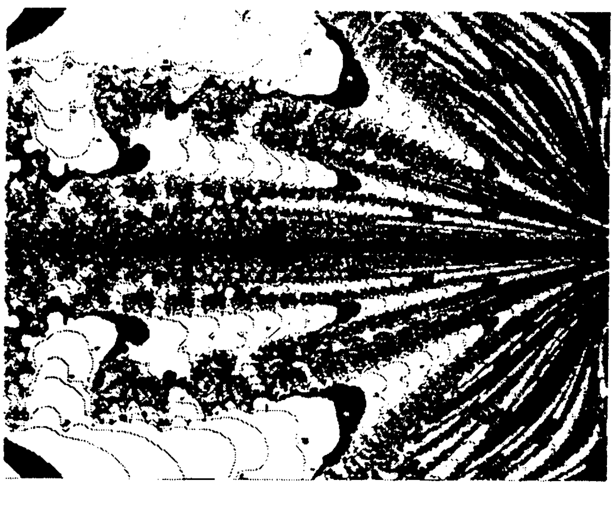

図４　フラクタル図形［２］

1)マンデルブロー著，広中監訳「フラクタル幾何学」日経サイエンス社(1985)．
2)青山智夫著「フラクタル・レイトレーシング」海文堂(1993)．